This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRA
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
RSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANF
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVE
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRA
FORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
ERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
ARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANF
· STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVE
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR

# MATHESIS

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1993. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

# MATHESIS

## RECUEIL MATHÉMATIQUE

## A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

## ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

**P. MANSION** ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

*Ut pictura mathesis*
PH. BRETON.

---

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME X. — ANNÉE 1900.**

(TOME XX DE LA COLLECTION.)

---

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
23, RUE DU CALVAIRE, 23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1900

... de Paris.

... (depuis 1842).

... fondée en 1825 par GARNIER ... par GERONO.

... (1874-1880).

... élémentaires (ou Journal de Mathé-... fondé en 1877 par BOURGET, continué d'abord ... par G. MARIAUD.

... fondé en 1894 par MM. LAISANT et ...

... des sciences.

... pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826. ... par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, ... (en allemand surtout).

... pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE ... par RESAL, puis par JORDAN.

... Deuxième série, tome troisième, pages 327

STANFORD ...
OCT 21 196...
MATHEMATICS

THESIS

# ...SIS

## ...UESTIONS
## ...UE;

...o.

...ntrinsèque, on est conduit à
...ait la position par rapport au
...occupe certaines positions remar-
...iale principale, axe central, etc.)
...ourbe inconnue ($M_1$). La droite étant
...(M), par ses cosinus directeurs $\alpha, \beta, \gamma$,
..., $\xi, \eta, \zeta$ (liées aux cosinus par la relation
... savoir (*), avant tout, que les variations
...es, dans l'espace, divisées par l'arc élémen-
...courbe fondamentale, ont les expressions que

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\beta}{\rho}, \quad \dot{\beta} = \frac{d\beta}{ds} - \frac{\gamma}{r}, \quad \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{r},$$
$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{ds} - \frac{\zeta}{\rho}, \quad \dot{\eta} = \frac{d\eta}{ds} - \frac{\zeta}{r} - \gamma, \quad \dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{ds} + \frac{\xi}{\rho} + \frac{\eta}{r} + \beta. \tag{1}$$

...s formules $s$, $\rho$, $r$ représentent l'arc et les rayons de courbure
Il convient de leur adjoindre les formules, qui font connaître
...riations des coordonnées d'un *point* quelconque :

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} - \frac{z}{\rho} + 1, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds} - \frac{z}{r}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{ds} + \frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}. \tag{2}$$

**2.** Il est aisé de démontrer que la distance entre les droites $d$ et $d'$, qui correspondent aux points M et M', infiniment voisins sur la courbe fondamentale, est

$$\pm \frac{\dot{\alpha}\xi + \dot{\beta}\eta + \dot{\gamma}\zeta}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2}}\, ds.$$

Afin que la droite passe TANGENTE à une courbe, il faut donc, et il suffit, que l'on ait

$$\dot{\alpha}\xi + \dot{\beta}\eta + \dot{\gamma}\zeta = 0. \tag{3}$$

(*) *Geometria intrinseca*, p. 125.

**ABRÉVIATIONS.**

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

CGQ., Correspondance physique et mathématique, fondée en 1825 par GARNIER et QUETELET, continuée par QUETELET.

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME., (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué d'abord par G. DE LONGCHAMPS, ensuite par G. MARIAUD.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

*Crelle*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

*Liouville*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

STANFORD
OCT
MATHEMATICS

# MATHESIS

## REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

par M. Ernest Cesàro.

1. Dans mainte question de Géométrie intrinsèque, on est conduit à exprimer qu'une droite $d$, dont on connaît la position par rapport au trièdre fondamental d'une courbe (M), occupe certaines positions remarquables (tangente, binormale, normale principale, axe central, etc.) dans le trièdre de quelque autre courbe inconnue ($M_1$). La droite étant définie, par rapport au trièdre de (M), par ses cosinus directeurs $\alpha, \beta, \gamma$, et par ses autres coordonnées, $\xi, \eta, \zeta$ (liées aux cosinus par la relation $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$), il faut savoir (*), avant tout, que les variations absolues de ces coordonnées, dans l'espace, divisées par l'arc élémentaire $MM' = ds$ de la courbe fondamentale, ont les expressions que voici:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot\alpha = \dfrac{d\alpha}{ds} - \dfrac{\gamma}{\rho}, & \dot\beta = \dfrac{d\beta}{ds} - \dfrac{\gamma}{r}, & \dot\gamma = \dfrac{d\gamma}{ds} + \dfrac{\alpha}{\rho} + \dfrac{\beta}{r}, \\ \dot\xi = \dfrac{d\xi}{ds} - \dfrac{\zeta}{\rho}, & \dot\eta = \dfrac{d\eta}{ds} - \dfrac{\zeta}{r} - \gamma, & \dot\zeta = \dfrac{d\zeta}{ds} + \dfrac{\xi}{\rho} + \dfrac{\eta}{r} + \beta. \end{array}\right. \tag{1}$$

Dans ces formules $s, \rho, r$ représentent l'arc et les rayons de courbure de (M). Il convient de leur adjoindre les formules, qui font connaître les variations des coordonnées d'un *point* quelconque :

$$\dot x = \frac{dx}{ds} - \frac{z}{\rho} + 1, \quad \dot y = \frac{dy}{ds} - \frac{z}{r}, \quad \dot z = \frac{dz}{ds} + \frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}. \tag{2}$$

2. Il est aisé de démontrer que la distance entre les droites $d$ et $d'$, qui correspondent aux points M et M', infiniment voisins sur la courbe fondamentale, est

$$\pm \frac{\dot\alpha\xi + \dot\beta\eta + \dot\gamma\zeta}{\sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}}\, ds.$$

Afin que la droite $d$ soit TANGENTE à une courbe, il faut donc, et il suffit, que l'on ait

$$\dot\alpha\xi + \dot\beta\eta + \dot\gamma\zeta = 0. \tag{3}$$

(*) *Geometria intrinseca*, p. 125.

Par exemple, si la droite est invariablement liée au trièdre de (M), o trouve, en substituant les valeurs (1) dans l'égalité (3),

$$\frac{\beta\eta}{\rho^2} - \frac{\alpha\eta + \beta\xi}{\rho r} + \frac{\alpha\xi}{r^2} = \frac{\alpha\beta}{\rho} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{r}. \qquad (4$$

Nous avons discuté, ailleurs(*), cette relation. Nous nous bornons ici, à signaler le cas (exceptionnel) des courbes caractérisées par l'équation intrinsèque

$$\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{\rho r} = \frac{1}{r}. \qquad (5$$

Pour que la relation (4) soit vérifiée par des valeurs *constantes* de $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha\beta = 0, \ \alpha\xi = 0, \ \frac{\beta\eta}{a} = -\frac{\alpha\eta + \beta\xi}{b} = \beta^2 + \gamma^2. \qquad (6$$

Sans tenir compte des parallèles à la tangente ($\alpha = 1$), situées dans le plan rectifiant ($\xi = \eta = 0$), on voit qu'on doit avoir

$$\alpha = 0, \quad \beta\eta = a, \quad -\beta\xi = b, \qquad (7$$

et qu'il n'y a pas d'autre moyen de satisfaire aux conditions (6) tant que $a \lesseqgtr 0$. Les équations (7) définissent une infinité de parallèles au plan normal, s'appuyant sur la droite qui joint M au point $(a, b)$ du plan rectifiant, et constituant ainsi un conoïde du troisième degré. Les projections de ces droites sur le plan normal enveloppent une parabole, dont le foyer est M, et dont le sommet se trouve sur la normale principale, à la distance $b$ de M. En particulier, pour $b = 0$, on voit que *les courbes, dont la torsion est proportionnelle au carré de la flexion, sont caractérisées par l'existence d'un conoïde droit (du troisième degré), invariablement lié à leur trièdre fondamental, et dont chaque génératrice engendre une surface développable.* Lorsqu'on fait tendre $a$ vers zéro, l'équation (5) tend à représenter un *cercle gauche*, et le conoïde (7) s'aplatit indéfiniment sur le plan normal : il s'y réduit au système des tangentes à une parabole; mais en même temps, pour $a = 0$, une seconde parabole apparaît dans le plan osculateur, parcequ'on peut alors satisfaire aux conditions (6) en prenant, au lieu de (7),

$$\beta = 0, \quad \xi = 0, \quad -\alpha\eta = b\gamma^2.$$

(*) *Geometria intrinseca*, p. 149.

3. Demandons-nous, maintenant, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $d$ soit la BINORMALE de quelque courbe $(M_1)$. Soient $p$ et $q$ les distances de M au plan rectifiant et au plan osculateur de $(M_1)$, au point $M_1$ qui correspond à M sur la courbe inconnue. *Lorsqu'on fixe le trièdre de* $(M_1)$, la variation absolue de $q$ dans l'espace, évidemment mesurée par la projection $\alpha ds$ de MM' sur $d$, est égale à $dq - pd\sigma$, où $d\sigma$ est l'angle de torsion de $(M_1)$, qu'on peut calculer par la formule

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}. \tag{8}$$

Cela résulte de la seconde formule (2), appliquée au point M ($x. y = q$, $z = p$) dans le trièdre de $(M_1)$. On a donc

$$\alpha + p\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dq}{ds}. \tag{9}$$

Telle est la condition cherchée, dans laquelle il nous reste à exprimer $p$ et $q$ en fonction des coordonnées de $d$, et de leurs variations. Soient $x, y, z$ les coordonnées du point inconnu $M_1$, par rapport au trièdre de (M). La tangente à $(M_1)$, dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $\dot x. \dot y. \dot z$, doit être perpendiculaire à $d$ et à $d'$, de sorte que

$$\alpha\dot x + \beta\dot y + \gamma\dot z = 0, \quad \dot\alpha\dot x + \dot\beta\dot y + \dot\gamma\dot z = 0. \tag{10}$$

Or, on a

$$\beta\zeta - \gamma\eta = \beta(\beta x - \alpha y) + \gamma(\gamma x - \alpha z) = x + \alpha q \text{ ; etc.}$$

Donc

$$x = \beta\zeta - \gamma\eta - \alpha q, \quad y = \gamma\xi - \alpha\zeta - \beta q, \quad z = \alpha\eta - \beta\xi - \gamma q; \tag{11}$$

puis

$$\begin{cases} \dot x = (\beta\dot\zeta - \gamma\dot\eta) + (\dot\beta\zeta - \dot\gamma\eta) - \alpha\dot q - \dot\alpha q, \\ \dot y = (\gamma\dot\xi - \alpha\dot\zeta) + (\dot\gamma\xi - \dot\alpha\zeta) - \beta\dot q - \dot\beta q, \\ \dot z = (\alpha\dot\eta - \beta\dot\xi) + (\dot\alpha\eta - \dot\beta\xi) - \gamma\dot q - \dot\gamma q. \end{cases} \tag{12}$$

Dans ces formules, $\dot q ds$ représente la variation absolue de $q$, dans l'espace, *lorsqu'on fixe le trièdre de* (M). Cette variation est d'ailleurs égale à $pd\sigma$ en vertu de la seconde formule (2), appliquée au point M

(considéré comme fixe) dans le trièdre de $(M_1)$. Cela posé, il suffit remplacer $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ par leurs valeurs (12) dans les égalités (10) pour obten

$$p\frac{d\sigma}{ds} = \begin{vmatrix} \alpha & \dot{\alpha} & \xi \\ \beta & \dot{\beta} & \eta \\ \gamma & \dot{\gamma} & \zeta \end{vmatrix}, \quad -q\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \begin{vmatrix} \alpha & \dot{\alpha} & \dot{\xi} \\ \beta & \dot{\beta} & \dot{\eta} \\ \gamma & \dot{\gamma} & \dot{\zeta} \end{vmatrix}. \qquad (1$$

4. Les coordonnées (11) appartiennent, pour $q$ arbitraire, à un poi quelconque de $d$, et les formules (12) font connaître la direction de l tangente au lieu décrit par ce point; mais $\dot{q}ds$ n'y représente plus $pd\sigma$ car c'est précisément l'égalité entre ces deux quantités, qui caracté rise $d$ comme binormale. Il est d'ailleurs facile de se convaincre qu cette égalité ne diffère pas de la condition (9). En effet, si l'on appliqu les formules (2) aux coordonnées (11), en tenant compte des formules (1 et (12), on trouve

$$\dot{q} = \frac{dq}{ds} - \alpha.$$

Cette relation, presque évidente, subsiste toujours; mais elle ne se réduit à la condition (9) que pour $\dot{q}ds = pd\sigma$.

5. Proposons-nous, maintenant, de déterminer les coordonnées de la droite $d_1$, commune perpendiculaire à $d$ et $d'$. Les cosinus directeurs doivent satisfaire aux conditions

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0, \quad \dot{\alpha}\alpha_1 + \dot{\beta}\beta_1 + \dot{\gamma}\gamma_1 = 0,$$

et, par suite, leurs valeurs sont

$$\alpha_1 = (\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\frac{ds}{d\sigma}, \quad \beta_1 = (\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma})\frac{ds}{d\sigma}, \quad \gamma_1 = (\alpha\dot{\beta} - \beta\dot{\alpha})\frac{ds}{d\sigma}. \qquad (15)$$

Pour calculer les autres coordonnées, écrivons les conditions de rencontre de $d_1$ avec $d$ et $d'$ :

$$\Sigma\alpha\xi_1 = -\Sigma\alpha_1\xi = -\frac{ds}{d\sigma}\Sigma(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\xi = -p,$$

$$\Sigma\dot{\alpha}\xi_1 = -\Sigma\alpha_1\dot{\xi} = -\frac{ds}{d\sigma}\Sigma(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\dot{\xi} = q\frac{d\sigma}{ds}.$$

Nous avons, maintenant, le système

$$\begin{cases} \alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1 = -p, \\ \dot\alpha\xi_1 + \dot\beta\eta_1 + \dot\gamma\zeta_1 = q\dfrac{d\sigma}{ds}, \\ \alpha_1\xi_1 + \beta_1\eta_1 + \gamma_1\zeta_1 = 0, \end{cases}$$

qui nous donne

$$\xi_1 = -\alpha p + \dot\alpha q\frac{ds}{d\sigma},\quad \eta_1 = -\beta p + \dot\beta q\frac{ds}{d\sigma},\quad \zeta_1 = -\gamma p + \dot\gamma q\frac{ds}{d\sigma}. \qquad (16)$$

Dans ces formules, $p$ et $q$ sont *définis* par les égalités (13). Nous devons toutefois remarquer que $p$ représente toujours la distance de M au plan $dd_1$, parceque les cosinus directeurs de la perpendiculaire à ce plan sont proportionnels à $\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma$, et l'on a bien, indépendamment de $q$,

$$p\frac{d\sigma}{ds} = -\Sigma\dot\alpha x = -\Sigma\dot\alpha(\beta\zeta - \gamma\eta) = \begin{vmatrix} \alpha & \dot\alpha & \xi \\ \beta & \dot\beta & \eta \\ \gamma & \dot\gamma & \zeta \end{vmatrix}.$$

De même la valeur de $q$ est précisément celle qu'on doit substituer dans les égalités (11) pour obtenir les coordonnées du *point central* de $d$, parceque la seconde relation (10) ne cesse pas (comme la première) d'être vérifiée, et, par suite, la substitution des valeurs (12) dans cette relation conduit toujours à la valeur (13) de $q$. Il n'en est pas ainsi de $p$; car on trouve, par le même procédé, en tenant compte de la relation (14),

$$\dot\alpha x + \dot\beta y + \dot\gamma z = \alpha + p\frac{d\sigma}{ds} - \frac{dq}{ds}, \qquad (17)$$

ce qui réduit l'une à l'autre la condition (9) et la première relation (10).

6. Les formules du paragraphe précédent nous mettent à même de voir quel est le lien qui existe entre les deux questions que nous avons traitées dans les §§ 2, 3, et comment il est possible de ramener la seconde à la première. Pour que $d$ soit la *binormale* d'une courbe, il faut et il suffit que $d_1$ soit *tangente* à une autre courbe. Or, on déduit des formules (15) et (16), par un calcul facile,

$$\dot\alpha_1\dot\xi_1 + \dot\beta_1\dot\eta_1 + \dot\gamma_1\dot\zeta_1 = \left(\alpha + p\frac{d\sigma}{ds} - \frac{dq}{ds}\right)\frac{ds^2}{d\sigma^2}\Sigma(\beta\dot\gamma - \gamma\dot\beta)\ddot\alpha.$$

La condition (3), appliquée à la droite $d_1$, nous reconduit donc à l condition (9); car on ne peut avoir identiquement

$$\begin{vmatrix} \alpha & \dot{\alpha} & \ddot{\alpha} \\ \beta & \dot{\beta} & \ddot{\beta} \\ \gamma & \dot{\gamma} & \ddot{\gamma} \end{vmatrix} = 0$$

sans que la droite $d$ reste parallèle à un plan, ce qui est impossible pou la binormale d'une courbe gauche.

7. On peut faire une application simple de la formule (9) dans le ca où la droite $d$ est invariablement liée au trièdre de (M). Les coordonnées $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ sont alors constantes, et la substitution des valeurs (1) dans les formules (8) et (13) donne

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} - \left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{\alpha}{r}\right)^2, \quad p\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\xi}{r} - \frac{\eta}{\rho},$$
$$-q\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{\gamma}{\rho} + \left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{\gamma\xi - \alpha\zeta}{\rho} - \frac{\beta\zeta - \gamma\eta}{r}\right);$$

puis l'égalité (9) devient une relation, à coefficients constants, entre les courbures et leurs dérivées. Si l'on veut que cette relation ait lieu entre les courbures, indépendamment de l'arc, on doit prendre

$$\alpha + \frac{\xi}{r} - \frac{\eta}{\rho} = 0, \quad q = \textit{constante}.$$

Donc, si (M) n'est pas une courbe de Bertrand, il faut que $\alpha$, $\xi$, $\eta$ soient nuls, et, par suite, qu'il en soit de même de $\gamma\zeta$. L'hypothèse $\gamma = 0$ nous donne les parallèles à la binormale, situées dans le plan rectifiant. En laissant de côté ces droites, il nous reste à supposer $\zeta = 0$. Dans cette hypothèse, $d$ est une des normales de (M); mais cette courbe n'est pas quelconque, puisque la condition $q = \textit{constante}$ exige qu'il y ait entre les courbures une relation telle que celle-ci :

$$\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{\rho}.$$

La droite qui joint M au point $(\sqrt{a(b-a)}, a)$ du plan normal est la binormale de la courbe décrite par ce point. En particulier, pour $a = b$, la droite en question n'est autre que la normale principale de (M), d'où il suit que *les courbes caractérisées par l'équation* $\rho r^2 = a(\rho^2 + r^2)$ *ont*

*pour normales principales les binormales d'une autre courbe*. Ce résultat est d'ailleurs évident. En effet, la dernière équation exprime que l'axe central se trouve à une distance *constante* de la droite rectifiante, et par suite, qu'il engendre une surface parallèle à la surface rectifiante. Donc la normale principale (commune perpendiculaire à deux axes infiniment voisins) ne cesse pas d'être la binormale de la courbe enveloppée par l'axe central. (*A continuer*).

---

## SUR TROIS HYPERBOLES ASSOCIÉES A UN TRIANGLE;

par M. A. Droz-Farny.

M. J. Neuberg a publié dans l'*Educational Times*, sous le numéro 13955 le joli théorème suivant, qui constitue un intéressant exercice de géométrie projective :

*On construit sur les côtés d'un triangle* ABC, *trois triangles isosceles variables* A'BC, B'CA, C'AB. *Les droites* BA', BC' *coupent* AC *en* $B_1$, $B_2$; *les droites* CB', CA' *coupent* BA *en* $C_1$, $C_2$; *enfin les droites* AC', AB' *coupent* CB *en* $A_1$, $A_2$. *Cela posé, les droites* $B_1C_2$, $C_1A_2$, $A_1B_2$ *enveloppent trois hyperboles qui touchent deux des côtés du triangle* ABC *et ont pour asymptote le troisième côté; ces courbes ont pour tangente commune, la droite de Lemoine du triangle* ABC.

Voici la solution que j'ai publiée dans le numéro de janvier 1899. Soit $A_0$ le milieu de BC; le lieu géométrique du sommet A' est la médiatrice correspondant au côté BC; elle rencontre AC et AB respectivement en $\beta$ et $\gamma$.

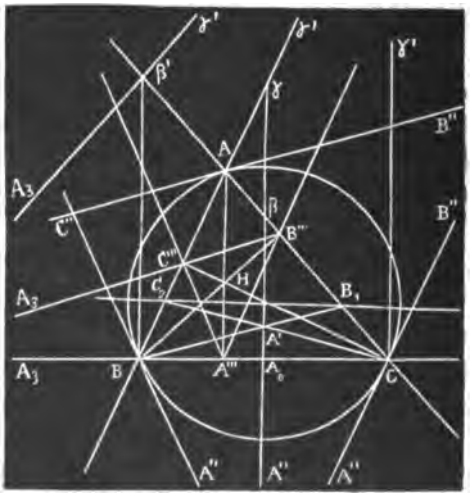
Les rayons BA' et CA' décrivent deux faisceaux perspectifs, donc les ponctuelles $B_1$ et $C_2$ sont homographiques; la droite $B_1C_2$ enveloppe une conique tangente aux côtés AC et AB.

En faisant coïncider A' avec $\beta$ ou $\gamma$, on constate qu'au point $\beta$ de la série $B_1$, ou qu'à $\gamma$ de la série $C_2$ correspond chaque fois dans l'autre série le point A. La conique touche donc les côtés AC et AB aux points où ils sont rencontrés par la médiatrice du troisième côté; $\beta\gamma$ est donc la polaire de A.

Si A' coïncide avec $A_0$, $B_1$, tombe en C et $C_2$ en B; la conique est tangente aux trois côtés du triangle, et, d'après un théorème connu, le conjugué harmonique de $A_0$, intersection de BC avec la polaire de A, par rapport à B et C, c'est-à-dire ici le point à l'infini de BC, sera le

point de contact sur cette droite. La conique est une hyperbole dont est une des asymptotes.

On pourrait encore démontrer ce dernier fait en s'appuyant sur théorème suivant, conséquence du théorème de Brianchon : Dans tou conique inscrite dans un triangle, les trois droites qui joignent sommet au point de contact sur le côté opposé se coupent en un mêm point. Or ici, Bβ et Cγ se croisent en P, et comme le triangle γBC e isoscèle, AP est parallèle à BC et rencontre par conséquent cette droi en son point à l'infini.




Le segment compris entre les asymptotes, d'une tangente quelconque à une hyperbole, étant divisé en parties égales par son point de contact, il est facile de voir, que la seconde asymptote de notre courbe correspond au point à l'infini de la médiatrice.

Soit $A_1$ le point d'intersection des deux asymptotes, ou le centre de l'hyperbole; comme $BB_1$ et $CC_2$ sont alors remplacées par les droites $B\beta'$, $C\gamma'$ perpendiculaires à BC et que $B\beta' = a \operatorname{tang} C$ et $C\gamma' = a \operatorname{tang} B$, on a

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\operatorname{tang} C}{\operatorname{tang} B}.$$

(*) Dans le trapèze $B\beta'\gamma'C$, la diagonale $AA_1$ est divisée harmoniquement par $B\beta'$, $C\gamma'$, donc le côté BC est divisé harmoniquement par $A_1$ et la hauteur $AA'''$ (de ABC issue de A). On en conclut que les centres des trois hyperboles sont les points de rencontre des côtés homologues du triangle ABC et du triangle orthique $A'''B'''C'''$ (J. N.)

En faisant coïncider A′ avec le pôle A″ de BC par rapport au cercle circonscrit ABC, la tangente $B_1C_2$ devient évidemment la droite de Lemoine du triangle.

Les trois hyperboles correspondant aux trois médiatrices du triangle, sont donc inscrites dans un quadrilatère ayant pour côtés les trois côtés du triangle ABC et la droite de Lemoine de ce triangle. En vertu du théorème de Newton, leurs trois centres sont donc en ligne droite, la ligne de jonction des milieux des trois diagonales du quadrilatère. Par conséquent, si les tangentes au cercle ABC, menées aux sommets A, B, C rencontrent BC, CA, AB en $A_4$, $B_4$, $C_4$, les points $A_5$, $B_5$, $C_5$ et les milieux des droites $AA_4$, $BB_4$. $CC_4$ sont sur une même droite.

---

## ×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**1.** *Sur une réussite.* Dans $n$ urnes numérotées de 1 à $n$, sont placées au hasard $n$ boules numérotées de 1 à $n$. De l'urne 1, on tire la boule qui s'y trouve et qui porte par exemple le numéro $a$; on la substitue à la boule occupant l'urne correspondante $a$; cette boule portait par exemple le numéro $b$; on recommence avec la boule $b$ comme avec la boule $a$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on rencontre la boule 1 que l'on place dans l'urne 1. Cette opération terminée, le jeu est dit *réussi* si toutes les boules sont alors dans les urnes correspondantes.

Cherchons la probabilité de la réussite.

Etablissons d'abord qu'il y a des chances égales d'amener la boule 1 au premier, au second tirage, ou à un tirage quelconque. 1°) Il y a une probabilité $\frac{1}{n}$ d'amener la boule au premier tirage. 2°) L'amener au second tirage est un événement qui peut arriver de $n-1$ manières également possibles, car, au premier coup, on a des chances égales d'amener un des nombres 2, 3,.... $n$ et, de chacune de ces manières, la probabilité d'amener 1 au second coup est $\frac{1}{n-1}$; on a donc, pour l'arrivée de la boule 1 au deuxième tirage, la probabilité

$$\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

3°) on démontre sans peine, de proche en proche, le lemme énoncé, lequel

est d'ailleurs pour ainsi dire intuitif. Il est possible d'en donner d'autres démonstrations.

A présent, si l'on amène la boule 1 au $n^{ième}$ tirage, on a passé par toutes les urnes et, dans ce cas, la réussite est certaine.

Il en est de même si le numéro 1 arrive au $(n-1)^{ième}$ coup, car une seule urne n'aura pas été visitée, et celle-là contient à coup sûr la boule correspondante.

Si 1 est amené au $(n-k)^{ième}$ coup, $k$ urnes n'auront pas été visitées et, pour que ces urnes contiennent leurs numéros correspondants, il n'y a qu'une chance favorable sur un nombre de cas égal au nombre de permutations simples de $k$ objets.

La probabilité totale de notre réussite est donc

$$\frac{1}{n}\left[1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\right].$$

La parenthèse contient les $n$ premiers termes du développement de $e$. On vérifie immédiatement que la réussite est *probable* pour $n < 6$.

En pratique, on réalise les conditions de l'énoncé en alignant sur la table des cartes ou des dominos, retournés de façon à être cachés; on leur assigne mentalement un ordre dans lequel ces objets doivent se ranger, ce qui remplace le numérotage des urnes. On peut employer un jeu complet de dominos ou de cartes ou une partie déterminée (les 8 cœurs par exemple).

Le lecteur peut s'exercer à traiter la question plus complexe que voici : on tire les boules des urnes 1 et 2; on opère avec la première comme il est dit plus haut et, l'opération étant terminée, on recommence avec la boule tirée de l'urne 2. La probabilité de la réussite est alors augmentée. (M. Stuyvaert).

×2. *Substitutions monocycliques.* Voici une autre solution du problème traité dans la note précédente. Convenons de désigner par le symbole

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 \cdots a_n \\ 1\ 2 \cdots n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

un *état* quelconque des urnes : les nombres de la seconde ligne sont les numéros des urnes; les nombres supérieurs, ceux des boules déposées respectivement dans ces urnes, de sorte que l'urne $i$ contient la boule $a_i$. Remarquons immédiatement que le nombre des états possibles des urnes

est celui des permutations des nombres 1, 2, ... $n$ et que les colonnes du symbole (1) peuvent être interverties arbitrairement.

Cela posé, au lieu de déplacer les boules comme l'indique l'énoncé, il revient au même de disposer les urnes dans l'ordre suivant. L'urne 1 continue à occuper le premier rang à gauche ; si elle contient la boule $b_1$ (pour plus de facilité, nous écrivons $b_1$ au lieu de $a_1$), l'urne $b_1$ sera placée au deuxième rang, si elle contient le boule $b_2$, l'urne $b_2$ sera placée au troisième rang, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions à une urne $b_p$ qui contient la boule 1. On aura une *réussite* si les urnes suivantes renferment chacune la boule ayant le numéro de l'urne ; nous convenons de placer ces urnes dans un ordre quelconque à la suite de l'urne $b_p$.

Une réussite est donc figurée par le symbole

$$\begin{pmatrix} b_1 b_2 \cdots b_p & 1 & b_{p+1} \cdots b_{n-1} \\ 1 & b_1 \cdots b_{p-1} b_p b_{p+1} & \cdots b_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

qui représente une *substitution monocyclique* ; le *cycle* est $b_1 b_2 \ldots b_{p-1} b_p$, c'est un arrangement quelconque des $n-1$ nombres 2, 3, ... $n$ pris $p$ à $p$. Le nombre total de réussites est donc égal à celui des arrangements de $n-1$ nombres pris à 1 à 1, 2 à 2, ... $n-1$ à $n-1$ ; toutefois il faut y comprendre la *substitution identique*

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \cdots n \\ 1\,2\,3 \cdots n \end{pmatrix}$$

ou la réussite sans déplacement de boule (ou d'urne), qu'on peut faire correspondre au symbole $A_{n-1,0} = 1$. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + A_{n-1,2} + \cdots + A_{n-1,n-1}}{P_n},$$

ce qui s'accorde avec le résultat trouvé par M. Stuyvaert.

(J. Neuberg).

*3. *Formules combinatoires.* On a, par les formules connues du calcul des différences,

$$\Delta \sin x = \sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta^2 \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \Delta \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = -4 \sin^2 \frac{h}{2} \sin(x+h),$$

$$\Delta^3 \sin x = -2^3 \sin^3 \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{3h}{2}\right),$$

$$\Delta^4 \sin x = 2^4 \sin^4 \frac{h}{2} \sin (x + 2h);$$

en général,

$$\Delta^{2n} \sin x = (-1)^n 2^{2n} \sin^{2n} \frac{h}{2} \sin (x + nh),$$

$$\Delta^{2n+1} \sin x = (-1)^n 2^{2n+1} \sin^{2n+1} \frac{h}{2} \cos \left[ x + \frac{(2n+1)h}{2} \right] (*).$$

Or on a, d'autre part,

$$\Delta^{2n} \sin x = \sin x - C_{2n,1} \sin (x+h) + C_{2n,2} \sin (x+2h) - \cdots + \sin (x+2nh),$$

$$\Delta^{2n+1} \sin x = -\sin x + C_{2n+1,1} \sin (x+h) - C_{2n+1,2} \sin (x+2h) + \cdots + \sin [x + (2n+1)h].$$

D'où les formules

$$(A) \begin{cases} \sin x - C_{2n,1} \sin (x+h) + C_{2n,2} \sin (x+2h) - \cdots + \sin (x+2nh) \\ \qquad = (-1)^n 2^{2n} \sin^{2n} \dfrac{h}{2} \sin (x + nh) \\ \sin x - C_{2n+1,1} \sin (x+h) + C_{2n+1,2} \sin (x+2h) - \cdots - \sin [x + (2n+1)h] \\ \qquad = (-1)^{n+1} 2^{2n+1} \sin^{2n+1} \dfrac{h}{2} \cos \left[ x + \dfrac{(2n+1)h}{2} \right]. \end{cases}$$

Faisons $h = 2\pi$ : les deux formules donnent, en remplaçant $2n$ ou $2n+1$ par $m$,

$$\sin x - C_{m,1} \sin x + C_{m,2} \sin x - C_{m,3} \sin x + \cdots \pm \sin x = 0,$$

d'où la relation connue

$$1 - C_{m,1} + C_{m,2} - C_{m,3} + \cdots \pm 1 = 0.$$

En faisant $h = \pi$ et divisant par $\sin x$, on obtient

$$1 + C_{m,1} + C_{m,2} + C_{m,3} + \cdots + 1 = 2^m.$$

Par la substitution de $\pi + h$ à $h$, les formules (A) deviennent

$$\sin x + C_{m,1} \sin (x+h) + C_{m,2} \sin (x+2h) + \cdots + \sin (x+mh)$$
$$= 2^m \sin^m \frac{h}{2} \sin \left( x + \frac{m}{2} h \right).$$

---

(*) On trouve assez facilement ces formules et beaucoup d'autres relatives aux sinus et aux cosinus, en calcul des différences, en se servant des identités

$$2i \sin x = e^{xi} - e^{-xi}, \quad 2 \cos x = e^{xi} + e^{-xi},$$

et observant que les exponentielles ordinaires se comportent en algèbre comme les exponentielles réelles. (P. M.)

Cette dernière donne, pour $x = 2k\pi$,

$$C_{m,1} \sin k + C_{m,2} \sin 2k + \cdots + C_{m,m} \sin mk = 2^m \sin^m \frac{k}{2} \sin \frac{m}{2} k.$$

Le lecteur peut s'exercer à tirer d'autres conséquences de ces formules.

(M. STUYVAERT.)

×3. *Une application de la théorie de l'inversion.* Soient A, B deux points fixes et M un point variable d'une circonférence O. On sait que l'angle AMB est constant. Si l'on transforme la figure par inversion en prenant pour pôle un point P de la circonférence O, on trouve le théorème suivant :

On considère sur une droite donnée deux points fixes A, B et un point mobile M. Si P est un point fixe extérieur à la droite AB, les circonférences PAM, PBM se coupent sous un angle constant.

La démonstration directe de cette proposition ne présente pas de difficulté. (ORLANDO).

---

## SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE POSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1899;

par M. A. GOB, professeur à l'Athénée de Hasselt.

Nous démontrerons le théorème suivant qui généralise la question posée au concours général(*).

*Etant données une conique* (c) *et deux tangentes fixes d et d' à cette conique, on décrit un cercle variable* (c') *tangent aux droites d et d'. Le lieu du point d'intersection des deux tangentes communes autres que d et d' aux courbes* (c) *et* (c') *se compose des deux coniques homofocales à la conique* (c) *et passant par le point d'intersection des droites d et d'.*

La démonstration de cette proposition dépend évidemment du théorème suivant : *si par deux points pris à volonté sur une conique homofocale à une conique* (c), *on mène à la conique* (c) *des couples de tangentes, ces quatre droites sont tangentes à une même circonférence.*

Nous donnerons deux démonstrations de ce théorème.

---

(*) Voir *Mathesis*, 1899 (2), IX, pp. 250-252 les solutions de M. Déprez. La question est la suivante : *Par un point donné sur une ellipse, on fait passer une série de cercles tangents en ce point à l'ellipse. On mène les tangentes communes aux deux courbes. Quel est le lieu de leur point de rencontre?*

Première démonstration. Soient une conique (C), F l'un de ses foyers, Δ la directrice correspondante, et (C′) une circonférence coupant la conique (C) aux points A, B, C, D, les droites AC et BD étant également inclinées sur Δ, on peut décrire une circonférence (C″) tangente à AC et à BD aux points E et H où ces droites rencontrent Δ.

Transformons la figure par polaires réciproques par rapport au point F; les lignes (C) et (C′) auront pour transformées, la première une circonférence (*c*) ayant pour centre le pôle O de Δ et la seconde une conique (*c′*) ayant le point F pour foyer. Les polaires des points A, B, C, D, sont quatre tangentes communes aux courbes (*c*) et (*c′*), et les droites AC et BD ont pour pôles deux sommets opposés M et N du quadrilatère MPNQ formé par ces tangentes. Enfin les points E et H ont pour polaires les droites OM et ON; la circonférence (C″) se transforme donc en une conique (*c″*) ayant F pour foyer et tangente aux droites OM et ON aux points M et N. Si F′ est le second foyer de la conique (*c′*), la droite MF′ étant symétrique de MF par rapport à OM, passera par le second foyer de la conique (*c″*). De même NF′ passe par ce second foyer; ce point est donc F′ et les coniques (*c′*) et (*c″*) sont homofocales. On a donc le théorème suivant qui est équivalent au théorème énoncé plus haut :

*Etant données une circonférence* (*c*) *et une conique* (*c′*), *on mène à ces courbes quatre tangentes communes*; *deux sommets opposés du quadrilatère formé par ces tangentes sont situés sur une conique* (*c″*) *homofocale à la conique* (*c′*).

Deuxième démonstration. Il suffirait pour établir le théorème précédent de démontrer que l'on a $MF \pm MF' = NF \pm NF'$, ce qui revient à dire que les droites MF, MF′, NF, NF′, sont tangentes à une même circonférence, qui doit d'ailleurs être concentrique au cercle (*c*) puisque les droites OM et ON sont les bissectrices des angles FMF′, FNF′. Il est plus simple de démontrer la réciproque de cette proposition que l'on peut énoncer comme il suit :

*Etant donné un quadrilatère circonscrit* MPNQ *à un cercle* (C), *on mène par deux sommets opposés* M *et* N *de ce quadrilatère des tangentes à un cercle concentrique au cercle* (C). *Deux sommets opposés* F *et* F′ *du quadrilatère formé par ces tangentes sont les foyers d'une conique inscrite au quadrilatère* MNPQ.

Il suffira de démontrer que les droites PF et PF′, QF et QF′ sont

isogonales par rapport aux angles P et Q. Transformons la figure par polaires réciproques par rapport au cercle (*c*). Si l'on observe que deux droites isogonales par rapport à l'un des angles M, N, P, Q ont pour polaires des points situés à égale distance du centre du cercle (*c*), on voit que l'on est ramené à démontrer le théorème suivant.

*Soit* ABCD *un quadrangle inscrit dans un cercle* (C). *Une circonférence concentrique à la circonférence* (C) *coupe le côté* AD *aux points* R *et* S, *le côté* BC *aux points* T *et* U; *les droites* RT *et* SU *rencontrent les côtés* AB *et* P'Q' *en des points symétriques par rapport aux milieux de ces côtés.*

Le théorème se démontre facilement. En effet, soient $\alpha$ et $\beta$ les points de rencontre des droites RT et SU avec AB et X le point de concours des côtés AD et BC; le triangle ABX coupé par les sécantes RT et SU donne :

$$\frac{\alpha B}{\alpha A}=\frac{TB}{TX}\times\frac{RX}{RA},\quad \frac{\beta B}{\beta A}=\frac{UB}{UX}\times\frac{SX}{SA}.$$

D'où, par multiplication,

$$\frac{\alpha B}{\alpha A}\times\frac{\beta B}{\beta A}=\frac{TB.UB}{RA.SA}\times\frac{RX.SX}{TX.UX}.$$

Le second membre de cette égalité est égal à l'unité, car les points A et B étant équidistants du centre du cercle RSTU ont même puissance par rapport à ce cercle. On a donc

$$\frac{\alpha B}{\alpha A}=\frac{\beta A}{\beta B},\quad \text{d'où}\quad \alpha B=\beta A.$$

Note. Sur la question de concours de 1899, voir dans *Mathesis*, 1881, (1) I, pp, 53-57, l'article intitulé : *Sur un lieu géométrique* (P. Ruex), avec une longue note de M. Neuberg où sont analysées ou indiquées les solutions de J. Serret, Gerono, Breton de Champ, J. Neuberg et Mister, P. Serret, le P. Lecointe, pour la question proposée ou pour la question généralisée. (P. M.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Question 889.

(Voir *Mathesis* (2), III, p. 264).

*Une montre a* 3 *aiguilles égales des heures, minutes, secondes et de même pivot. On demande s'il viendra un moment où les* 3 *aiguilles auront leurs extrémités aux sommets d'un triangle équilatéral.*

*Solution par* M. Emmerich. Supposons que la chose arrive si l'aiguil des heures se trouve à $x$, l'aiguille des minutes à $(x+20)$ et l'aiguil des secondes à $(x+40)$ minutes après 12 heures. On a

$$x:(60n+x+20)=1:12,\quad x:(60n'+x+40)=1:720$$

et, après l'élimination de $x$,

$$(3n+1):(3n'+2)=11:719=(3a+2):(3a'+2).$$

C'est impossible, car

$$(3n+1)(3a'+2)=\mathscr{M}\,3+2,\quad\text{et}\quad(3n'+2)(3a+2)=\mathscr{M}\,3+1.$$

En supposant que l'aiguille des heures se trouve à $x$, l'aiguille de secondes à $(x+20)$ et l'aiguille des minutes à $(x+40)$ minutes aprè 12 heures, on trouve

$$(3n+2):(3n'+1)=11:719,$$

également impossible. Il n'y a pas d'autres cas à distinguer.

*Solution par* M. J. Gillet. Plus généralement, les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ de vitesses respectives $v_1$, $v_2$, $v_3$ $(v_1<v_2<v_3)$ se mouvant sur une cir conférence à partir d'une origine commune O, et dans le même sens; o demande s'il viendra un moment où le triangle $M_1M_2M_3$ sera semblabl à un triangle donné $A_1A_2A_3$.

Prenons O pour origine des espaces, et soient $\alpha_3$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ les arcs sous tendus par $M_1M_2$, $M_2M_3$, $M_3M_1$ au bout du temps cherché.

Prenons comme inconnue $OM_1=x$; alors

$$OM_2=x+\alpha_3+2k\pi,\quad OM_3=x-\alpha_2+2k'\pi,$$

$k$ et $k'$ étant deux nombres entiers positifs ou négatifs, qu'il s'agit d déterminer.

Les espaces parcourus étant proportionnels aux vitesses, on doit avoi

$$\frac{x}{v_1}=\frac{x+\alpha_3+2k\pi}{v_2}=\frac{x-\alpha_2+2k'\pi}{v_3};\qquad(1)$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{2k\pi+\alpha_3}{v_2-v_1}=\frac{2k'\pi-\alpha_2}{v_3-v_1},$$

puis

$$2k'\pi(v_2-v_1)-2k\pi(v_3-v_1)=(v_3-v_1)\alpha_3+(v_2-v_1)\alpha_2.\qquad(2)$$

Si la quantité $(v_3-v_1)\alpha_3+(v_2-v_1)\alpha_2$ est exactement divisible par $2\pi$, et si $v_3-v_1$ et $v_2-v_1$ sont deux nombres entiers premiers entre eux, l'équation (2) est résoluble en nombres entiers.

A chaque couple de valeurs de $k$ et $k'$ correspond une valeur de $\varpi$ donnée par les équations (1). On a ensuite

$$t = \frac{\varpi}{v_1}$$

comme réponse à la question.

En particulier, si le triangle donné $A_1A_2A_3$ est équilatéral, on a

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{2\pi}{3};$$

pour que l'équation (2) soit résoluble en nombres entiers, on doit avoir

$$v_2 + v_3 - 2v_1 = \mathscr{M}.3.$$

Cette condition n'est pas remplie si $M_1$, $M_2$, $M_3$ sont les extrémités des aiguilles d'une montre; donc, etc.

Cette solution pourrait être plus explicite, quant au choix des unités de temps et de longueur. On peut prendre pour unité de temps le temps que met l'aiguille $M_1$ à parcourir le cadran, pour unité de longueur la longueur de la circonférence du cadran. Nous laissons au lecteur le soin de modifier et de rectifier la solution de M. Gillet dans le sens qui vient d'être d'indiqué.

M. Hacken expose une autre méthode, très ingénieuse; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de la reproduire.

M. Delahaye a traité le problème plus général où l'une des aiguilles est la bissectrice de l'angle des deux autres.

---

## Question 939.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 127).

*Un triangle* ABC *se déplace de telle façon que les extrémités du côté* BC *qui a une longueur constante, décrivent deux courbes données et que le côté* AB *soit tangent à une troisième courbe donnée. On demande de construire la tangente à la trajectoire de* M *et de déterminer le point de contact de* AC *avec son enveloppe* : 1° *si l'angle* C *reste constant*; 2° *si le côté* AC *a une longueur constante.* (L. Meurice).

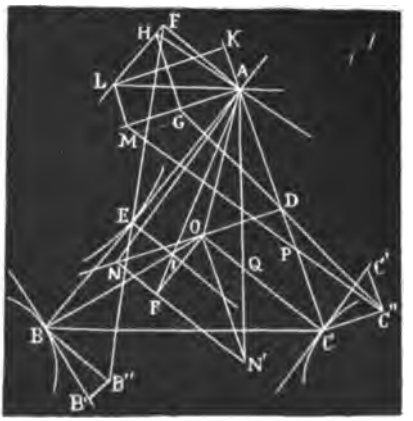
Soient BB′, CC′, les tangentes aux trajectoires des points B, C, et soit E le point de contact de AC avec son enveloppe. La longueur BC étant invariable, le point de concours O des normales en B et C est le centre instantané de rotation de BC; donc les vitesses BB′, CC′, des points B, C sont proportionnelles à OB, OC.

1° Si l'angle C reste constant, O est aussi le centre instantané de rotation de CA; donc la projection D de O sur CA est le point de contact de

CA avec son enveloppe. Nous pouvons maintenant déterminer les vitesses de circulation de A autour des points D, E. Celle de C étant la projection CC'' de CC' sur une normale à CA, nous menons C''D qui coupe en G une normale en A à AC; de même en projetant BB' en BB'' sur une normale en AB et en traçant B''E qui coupe en F la perpendiculaire élevés en A sur AB, on obtient la vitesse de circulation AF de A autour de E. Un quadrangle birectangle construit sur AG, AF détermine la vitesse AH de A.

2° Si la longueur AC est constante, nous connaissons la vitesse de glissement AK = C''C' de A sur CA. La règle du quadrilatère des vitesses appliquée aux vitesses partielles AF, AK de A fait connaître la vitesse définitive AL de A. La vitesse de circulation de A considérée sur AC étant la projection AM de AL sur AG, et celle de C étant CC'', la droite C''M coupe AC au point de contact P de l'enveloppe.

Autre solution. On peut fonder la solution exclusivement sur la




théorie du centre instantané de rotation; dans ce qui suit, toutes les vitesses seront portées sur des perpendiculaires à leurs directions.

1° Nous représentons les vitesses de B et C sur leurs trajectoires par BO, CO. Si la distance CA était invariable, la vitesse de A serait AO; comme il suffit de supposer encore à A une vitesse dirigée suivant CA pour tenir compte du changement de la distance CA, l'extrémité N de la vitesse effective de A est sur la droite OD perpendiculaire à AC.

Si l'on considère la droite BA comme entraînée par son point B, elle a un centre instantané I à la rencontre de BO avec la normale en E à

AB. Les vitesses de B et de A, si la distance BA était constante, seraient proportionnelles à BI et AI ; celle de B étant déjà supposée égale à BO, on obtiendrait celle de A en menant à AB une parallèle OF'(*) qui coupe AI en F'. Cette vitesse AF' se combinant avec une vitesse de A le long de BA; l'extrémité de la vitesse effective se trouve donc sur la droite F'N perpendiculaire à AN, en N à la rencontre avec DO. AN est la normale à la courbe (A).

2° On vient de voir que l'extrémité de la vitesse de A considérée sur la droite BA est sur NF' ; supposons-là en N'. AC ayant une longueur invariable, le centre instantané de rotation de AC est à la rencontre Q des normales CO, AN' des trajectoires des points C,A et les vitesses de ces points sont proportionelles à QC, QA. Mais la vitesse de C a déjà été représentée par CO ; donc si l'on mène ON' parallèle à AC, l'extrémité de la vitesse de A est sur cette parallèle, et comme elle se trouve aussi sur NF, elle est déterminée par l'intersection de deux droites.

(J. Neuberg).

---

## Question 1096.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 264).

***Trouver les lieux du centre, des foyers et des sommets des coniques inscrites dans un triangle donné*** ABC ***et dont les axes ont des directions données*** $\delta,\delta'$. (Déprez)

***Solution analytique par*** M. Hacken. Soient

$$x\cos\alpha_r + y\sin\alpha_r = \sqrt{a^2\cos^2\alpha_r + b^2\sin^2\alpha_r},\quad (r=1,2,3) \qquad (1)$$

les équations de BC, CA, AB par rapport aux axes $Ox$, $Oy$ de l'une des coniques. Les angles $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ sont connus, ce sont les inclinaisons des hauteurs de ABC sur $\delta$; $a$ et $b$ sont variables.

1° ***Lieu du centre.*** Appelons $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ les distances du centre O à BC, CA, AB. On déduit de (1)

$$\delta_r^2 = a^2\cos\alpha_r + b^2\sin^2\alpha_r;$$

éliminant $a^2$ et $b^2$, on a pour le lieu cherché

$$\begin{vmatrix} \delta_1^2 & \cos^2\alpha_1 & \sin^2\alpha_1 \\ \delta_2^2 & \cos^2\alpha_2 & \sin^2\alpha_2 \\ \delta_3^2 & \cos^2\alpha_3 & \sin^2\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(*) Dans la figure, F sur NN', doit être remplacé par F'.

Ce lieu est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à $\delta$, $\delta'$ ; car les points à l'infini sur ces directions sont des foyers de paraboles inscrites à ABC et ayant un axe parallèle à $\delta$ ou $\delta'$.

2. *Lieu des foyers.* Soient maintenant $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ les distances d'un foyer à BC, CA, AB; de (1) on conclut

$\delta_r = c\cos\alpha_r - \sqrt{a^2\cos^2\alpha_r + b^2\sin^2\alpha_r}$, ou $\delta_r^2 - 2\delta_r c\cos\alpha_r - b^2 = 0$.

L'élimination de $b$ et $c$ donne pour le lieu des foyers la cubique

$$\begin{vmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\cos\alpha_1 & 1 \\ \delta_2^2 & \delta_2\cos\alpha_2 & 1 \\ \delta_3^2 & \delta_3\cos\alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les foyers appartenant à l'axe désigné ci-dessus par $Oy$ vérifient l'équation

$$\begin{vmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\sin\alpha_1 & 1 \\ \delta_2^2 & \delta_2\sin\alpha_2 & 1 \\ \delta_3^2 & \delta_3\sin\alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

car il suffit d'intervertir les noms des axes ou de remplacer les angles $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ par leurs compléments.

3° *Lieu des sommets.* On a maintenant :

$$\delta_r = a\cos\alpha_r + \sqrt{a^2\cos^2\alpha_r + b^2\sin^2\alpha_r},$$

ou

$$\delta_r^2 - 2\delta_r a\cos\alpha_r - b^2\sin^2\alpha_r = 0;$$

le lieu des sommets a donc pour équation :

$$\begin{vmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\cos\alpha_1 & \sin^2\alpha_1 \\ \delta_2^2 & \delta_2\cos\alpha_2 & \sin^2\alpha_2 \\ \delta_3^2 & \delta_3\cos\alpha_3 & \sin^2\alpha_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\sin\alpha_1 & \cos^2\alpha_1 \\ \delta_2^2 & \delta_2\sin\alpha_2 & \cos^2\alpha_2 \\ \delta_3^2 & \delta_3\sin\alpha_3 & \cos^2\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

*Solution géométrique par* M. Jeřabeck. Nous désignons par I, I', I'', I''' les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC.

1° Menons une droite quelconque $d$ parallèle à $\delta$ et considérons-la comme axe principal d'une conique $K^2$ inscrite à ABC.

Pour trouver le centre O et les foyers E, F de $K^2$ situés sur $d$, nous désignons par $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$, $(C_1, C_2)$ les points de rencontre de $d$ avec les bissectrices (AI, AI''), (BI, BI'), (CI, CI'') ; ces points se correspondent dans une involution (I) ayant pour points doubles E et F, pour point central O. Pour construire les éléments doubles, nous projetons l'involu-

tion ($A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$) à partir de A sur la circonférence ABC suivant l'involution ($A'_1A_2$, $B'_1B'_2$, $C'_1C'_2$). Les cordes $A'_1A'_2$, $B'_1B'_2$, $C'_1C'_2$ concourent au pôle P de la seconde involution (I'), les droites $A'_1B'_1$ et $A'_2B'_2$, $A'_1B'_2$ et $A'_2B'_1$ se coupent sur l'axe $p$, qui rencontre la circonférence aux points doubles $\varepsilon, \varphi$ de (I'). Les droites $A\varepsilon$, $A\varphi$ rencontrent $d$ aux points cherchés E,F.

Le lieu de ces points est une cubique ; car sur toute droite $d$ parallèle à $\delta$ nous avons trois points du lieu, savoir les deux points E,F que nous venons de déterminer et le foyer à l'infini de la parabole inscrite à ABC et dont les diamètres sont parallèles à $\delta$.

Les points E,F sont aussi donnés comme points d'intersection de la droite $d$ avec la transformée de $d$ par inversion triangulaire. Cette transformée est une conique passant par A,B,C et par l'inverse du point à l'infini sur $\delta$. Lorsque $d$ se transporte parallèlement à $\delta$, cette droite et sa transformée par inversion engendrent un faisceau de rayons et un faisceau de coniques qui sont projectifs. — Il résulte de là que les foyers appartiennent à une cubique circulaire. (La droite à l'infini a pour ligne inverse la circonférence ABC, de sorte que les points cycliques font partie du lieu des foyers).

2° Pour obtenir le centre O sans passer par les foyers, nous construisons sur $A_1B_1$ et $B_2A_2$ deux triangles homothétiques $L_1A_1B_1$, $L_2B_2A_2$ ($L_2B_2$ parallèle à $L_1A_1$,...); la droite $L_1L_2$ coupe $d$ au point central O de l'involution ($A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$).

Prenons pour $L_1$ le centre I du cercle inscrit à ABC; $L_2$ décrit alors une ponctuelle semblable à celles des points $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$. Par suite, le lieu du point O est engendré par l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux projectifs de rayons, dont l'un a pour sommet le point à l'infini sur $\delta$ et l'autre le point I; ce lieu est donc une hyperbole $H^2$ dont les asymptotes sont parallèles aux directions $\delta$, $\delta'$.

3° Désignons par S un sommet de $K^2$ situé sur $d$, et par $s$ la tangente en S. Si l'on donne $s$, pour trouver $d$, nous cherchons d'abord le centre O comme intersection de l'hyperbole $H^2$ avec la droite joignant les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les tangentes $s$, BC, CA, AB. Il résulte de là qu'il existe deux coniques $K^2$, $K'^2$ ayant même tangente au sommet S.

Sur chaque droite $s$ parallèle à $\delta'$, nous trouvons ainsi deux points du lieu des sommets; mais le point à l'infini sur $s$ est le sommet à l'infini

d'une parabole inscrite à ABC et dont les diamètres sont parallèles à $d$. Le lieu est donc une cubique.

M. E. N. Barisien a résolu la même question.

Pour trouver le centre O de $K^2$, on peut construire la symétrique $d'$ de BC par rapport à $d$, puis la droite unissant les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre tangentes BC, CA, AB, $d$. Sur chaque droite $d$ on trouve ainsi un centre; mais le point à l'infini sur $d'$ est le centre de la parabole inscrite à ABC et dont les diamètres sont parallèles à $d$. Par conséquent, le lieu du centre est une conique.

---

## Question 1166.

(Voir *Mathésis* (2) VIII, p. 104).

*$a, b, c, x, y$ désignant des quantités complexes, si l'on suppose*

$$y = ax^2 + bx + c,$$

*comment construit-on le point $y$ qui correspond à un point donné $x$?*

*Solution par* M. Emmerich. Représentons les points $a, b, c, x$ de la manière usuelle dans un système de coordonnées rectangulaires avec l'origine O. Après avoir marqué le point 1 sur l'axe OX on construit sur $Ox$ un triangle directement semblable au triangle $O1a$; le sommet sera le point $ax$. Par $ax$ on mène une droite parallèle et égale à $Ob$, ce qui conduit au point $ax + b$.

En écrivant $y = (ax + b)x + c$ on voit qu'il ne s'agit alors que d'une répétition en prenant $ax + b$, $c$ au lieu de $a$, $b$.

Remarque. Si le point $x$ décrit une droite, le point $ax + b$ décrit aussi une droite, car les systèmes $(x)$ et $(ax)$ sont semblables et les systèmes $(ax)$ et $(ax + b)$ sont égaux. Le point $x^2$ décrit en général une parabole; il en est de même des points $ax^2$, $a(x - \lambda)^2$, $a(x - \lambda)^2 + \mu$; la dernière expression peut être identifiée à $ax^2 + bx + c$.

Pour démontrer analytiquement que le point $z \equiv x^2$ décrit une parabole, posons

$$z = z_1 + z_2 i = (x_1 + x_2 i)^2 = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 x_2 i, \quad z_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad z_2 = 2x_1 x_2$$

On en conclut

$$x_1^2 = \tfrac{1}{2}(z_1 + \sqrt{z_1^2 + z_2^2}), \quad x_2^2 = \tfrac{1}{2}(-z_1 + \sqrt{z_1^2 + z_2^2}).$$

Soit $lx_1 + mx_2 = n$ le lieu du point $x$. On a

$$l^2 x_1^2 + 2lmx_1 x_2 + m^2 x_2^2 = n^2,$$

$$(l^2+m^2)\sqrt{z_1^2+z_2^2}+(l^2-m^2)z_1+2lmz_2=2n^2,$$

$$(l^2+m^2)^2(z_1^2+z_2^2)=(l^2-m^2)^2z_1^2+4lm(l^2-m^2)z_1z_2$$
$$+4l^2m^2z_2^2+pz_1+qz_2+r,$$

$$4l^2m^2z_1^2-4lm(l^2-m^2)z_1z_2+(l^2-m^2)^2z_2^2=pz_1+qz_2+r,$$

ce qui représente une parabole.

La même parabole sera décrite par $z$ quand $x$ parcourt la droite

$$lx_1+mx_2=-n.$$

Lorsque $n=0$, le point $z$ décrit la droite

$$2lmz_1=(l^2-m^2)z_2.$$

Note. On passe du point $x$ au point $x'$ en construisant sur $Ox$ un triangle $Ox'x'$ semblable au triangle $O1x$. Si $r$, $\theta$ sont les coordonnées polaires de $x$, celles de $x'$ sont $r^2$, $2\theta$; par suite, si le point $x$ décrit une courbe $f(r,\theta)=0$, l'équation du lieu de $x'$ est $f(\sqrt{r},\frac{1}{2}\theta)=0$. On en conclut immédiatement que la droite

$$r=\frac{a}{\cos(\theta-\alpha)}$$

a pour transformée la parabole

$$r=\frac{a^2}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\alpha\right)}=\frac{2a^2}{1+\cos(\theta-2\alpha)}.$$

L'intérêt principal de la question 1166 consistait à montrer que la transformation $y=ax^2+bx+c$, par une translation, une homothétie et une seconde translation se ramène à la transformation $y=x^2$.

(J. N.)

---

## ×Question 1198.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 280).

***Eliminer x et y entre les équations***

$$\cos x+\cos y=a,\quad \operatorname{cotg}x+\operatorname{cotg}y=b,\quad \operatorname{cosec}x+\operatorname{cosec}y=c.$$

(Wilkinson).

***Solution par*** M. E. N. Barisien. La première équation s'écrit

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a. \tag{1}$$

En divisant membre à membre les deux dernières, on trouve

$$(2)\qquad \frac{\sin(x+y)}{\sin x+\sin y}=\frac{\cos\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x-y}{2}}=\frac{b}{c}.$$

De (1) et (2), on tire immédiatement

$$(3)\qquad \cos\frac{x-y}{2}=\sqrt{\frac{ac}{2b}},\quad \cos\frac{x+y}{2}=\sqrt{\frac{ab}{2c}},$$

$$\sin(x+y)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=2\sqrt{\frac{ab}{2c}\left(1-\frac{ab}{2c}\right)}.$$

Or, la seconde équation s'écrit

$$\sin(x+y)=b\sin x\sin y=\frac{b}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]=$$

$$b\left(\cos^2\frac{x-y}{2}-\cos^2\frac{x+y}{2}\right).$$

En y portant les valeurs (3), on a pour résultat de l'élimination de $x$ et $y$:

$$4b(2c-ab)=a(b^2-c^2)^2.$$

La même question a été résolue par M. M. Sintsof (Kazan), Van Dorsten (Rotterdam), Emmerich (Mülheim) et Delahaye (Roye).

---

### ×Question 1284.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 152)

*Calculer le rayon du cercle inscrit à un triangle* ABC, *en fonction des distances* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *de son centre aux trois sommets.*

*Solution par* MM. E. N. Barisien, Déprez et Delahaye (Roye). Si $r$ est le rayon du cercle inscrit, on a

$$(1)\qquad \sin\frac{A}{2}=\frac{r}{\alpha},\quad \sin\frac{B}{2}=\frac{r}{\beta},\quad \sin\frac{C}{2}=\frac{r}{\gamma}.$$

Or, de ce que $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$, il résulte la relation

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1.$$

En y portant les valeurs (1), il vient

$$\frac{1}{r^3}-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{1}{r}-\frac{2}{\alpha\beta\gamma}=0. \tag{2}$$

Le rayon $r$ dépend donc de l'équation (2) qui est du troisième degré. La condition de réalité des trois racines est

$$\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)^3\geq\frac{27}{\alpha^2\beta^2\gamma^2},\quad\text{ou}\quad\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\geq\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}};$$

elle est toujours vérifiée, puisque la moyenne arithmétique de trois nombres est supérieure ou égale à la moyenne géométrique. L'équation (2) ayant une seule variation, admet une racine positive et deux racines négatives.

Remarque. Soit maintenant $\rho$ le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A. Si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignent encore les distances du centre de ce cercle aux trois sommets, on a

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\rho}{\alpha},\quad\cos\frac{B}{2}=\frac{\rho}{\beta},\quad\cos\frac{C}{2}=\frac{\rho}{\gamma},$$

avec la relation

$$\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=1;$$

de sorte que l'équation qui donne $\rho$ s'écrit

$$\frac{1}{\rho^3}-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{1}{\rho}+\frac{2}{\alpha\beta\gamma}=0. \tag{3}$$

C'est l'équation (2) où $r$ est remplacé par $-\rho$; donc une racine négative de (2) correspond à un cercle exinscrit.

*Solution par* M. Clavero y Guervos. On a

$$p-a=\sqrt{\alpha^2-r^2},\quad p-b=\sqrt{\beta^2-r^2},\quad p-c=\sqrt{\gamma^2-r^2};$$

d'où, par addition et par multiplication,

$$p=\sqrt{\alpha^2-r^2}+\sqrt{\beta^2-r^2}+\sqrt{\gamma^2-r^2},$$

$$(p-a)(p-b)(p-c)=\sqrt{(\alpha^2-r^2)(\beta^2-r^2)(\gamma^2-r^2)}.$$

On sait que

$$r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p};$$

donc l'équation cherchée est

$$r^2(\sqrt{\alpha^2-r^2}+\sqrt{\beta^2-r^2}+\sqrt{\gamma^2-r^2})=\sqrt{(\alpha^2-r^2)(\beta^2-r^2)(\gamma^2-r^2)},$$

ou, sous forme rationnelle,

$$r^6-\frac{(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)^2}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}r^4+\frac{1}{2}(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)r^2-\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2\gamma^2=0.$$

*Solutions par* M. Emmerich. 1° I désignant le centre du cercle inscrit, et $A_1$, $B_1$, $C_1$ les points de contact des côtés avec ce cercle, la surface BIC a pour expressions

$$\frac{1}{2}ar \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\beta\gamma \sin \mathrm{BIC}=\frac{1}{2}\beta\gamma\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\beta\gamma\frac{p-a}{\alpha};$$

on en conclut

$$\alpha ar=\beta\gamma\,(p-a),$$

ou

$$\frac{\beta\gamma}{r}(p-a)-\alpha\,(p-b)-\alpha\,(p-c)=0.$$

Entre cette équation et les deux analogues, éliminons $p-a$, $p-b$, $p-c$, etc.

2° Si l'on appelle $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles $BIA_1$, $CIB_1$, $AIC_1$, on a $\lambda+\mu+\nu=\pi$, d'où

$$1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu-2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu=0.$$

Or

$$\cos\lambda=\frac{r}{\alpha},\quad \cos\mu=\frac{r}{\beta},\quad \cos\nu=\frac{r}{\gamma};$$

substituons ces valeurs, etc.

Cette solution est immédiatement applicable au triangle sphérique; on trouve

$$\cot^2 r-\cot r.\,\Sigma\cot^2\alpha-2\cot\alpha\cos\beta\cot\gamma=0.$$

L'équation trouvée par M. Clavero y Guervos se décompose dans les deux équations de la première solution.

---

## *QUESTIONS D'EXAMEN.

**933.** Etant donnée la fraction $\frac{m}{n}$ : 1° Trouver les nombres entiers $a$, $b$, $c$... tels que l'on ait

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{15}+\frac{b}{15^2}+\frac{c}{15^3}+\cdots;$$

2° Chercher la condition nécessaire et suffisante pour que le second membre de cette égalité se compose d'un nombre limité de termes. 3° Cette condition étant remplie, quel sera le nombre des fractions à calculer ?

*(Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles*, 1898).

La question revient à transporter dans le système à base 15 la théorie des fractions décimales.

**923**. On donne deux triangles ABC, A'B'C'. Si le point M est tel que MA, MB, MC coupent respectivement B'C', C'A', A'B' en trois points $A_1$, $B_1$, $C_1$ en ligne droite, inversement MA', MB', MC' couperont respectivement BC, CA, AB en trois points $A_2$, $B_2$, $C_2$ également en ligne droite. (*Journal de Vuibert*).

On a :

$$\frac{B'A_2}{C'A_2}=\frac{B'AM}{C'AM},\quad \frac{C'B_2}{A'B_2}=\frac{C'BM}{A'BM},\quad \frac{A'C_2}{B'C_2}=\frac{A'CM}{B'CM};\quad \frac{BA_2}{CA_2}=\frac{BA'M}{C'AM},\ldots.$$

Faisons le produit des trois premières égalités, puis celui des trois dernières, etc.

**924**. On donne un parallélogramme $ABB_1C$; sur $BB_1$ on porte des longueurs $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4,\ldots$ égales à $BB_1$. Une droite quelconque menée par C rencontre les droites AB, $AB_1$, $AB_2$, $AB_3$, etc., aux points D, $D_1$, $D_2$, $D_3$, etc. Si l'on pose $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{n}$, démontrer que

$$\frac{AD_1}{D_1B_1}=\frac{1}{n+1},\quad \frac{AD_2}{D_2B_2}=\frac{1}{n+2},\ldots$$

(Biddle, *Ed. Times.*)

La 1re proportion se déduit de la considération des triangles semblables $AD_1D$, $B_1D_2D$ ; les autres sont des conséquences de la première, car on peut substituer au parallélogramme $ABB_1C$ le parallélogramme $AB_1B_2C$ ou $AB_2B_3C$...., ce qui change $n$ successivement en $n+1$, $n+2$,...

**925**. Démontrer les égalités

$$x^{m-1}\sqrt[m]{m}\sqrt[m]{\frac{x^m}{m}}=x^m,\quad a^{\frac{n\log(\log a)}{\log a}}=(\log a)^n,$$

$$\log(a-\sqrt{a^2-1})=-\log(a+\sqrt{a^2-1}),$$

$$\tfrac{7}{16}\log(3+2\sqrt{2})-4\log(\sqrt{2}+1)=\tfrac{25}{8}\log(\sqrt{2}-1),$$

$$2\log 3a-\log 2a-\log 4a=2\log 3-3\log 2.$$

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1951.** Une conique variable touche les côtés du triangle ABC au points A′, B′, C′. Si les droites AA′, BB′, CC′ se coupent sur la circonférence circonscrite au triangle ABC, la conique touche constamment la droite de Lemoine de ABC. (E. LEMOINE)

***1952.** L'angle $\varphi$ étant donné, on pose pour abréger

$$f(a, b, c) = \frac{\cos a.\cos b.\cos c}{\cos\varphi} + \frac{\sin a.\sin b.\sin c}{\sin\varphi} - 1;$$

démontrer que les quatre équations à six inconnues

$$f(X, y, z) = 0,\quad f(x, Y, z) = 0,\quad f(x, y, Z) = 0,\quad f(X, Y, Z) = 0,$$

ont une triple infinité de solutions. (G. FONTENÉ)

**1953.** Par deux points donnés A, B faire passer une circonférence qui coupe une droite donnée $m$ ou une circonférence donnée O sous un angle donné $\alpha$. (ORLANDO)

Ce problème n'est pas nouveau; nous le proposons parce qu'il est susceptible de plusieurs solutions. (J. N.)

**1954.** La somme des carrés des coefficients des différentes puissances de $x$ dans le développement de

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^m$$

est le cœfficient de $x^{km}$ (coefficient maximum) dans le développement de

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^{2m}$$

(A. BOUTIN).

**1955.** Si le nombre $2m + 1$ est plus grand que 3 et premier avec 3, prouver que

$$\frac{(x^{6m+3} - y^{6m+3})(x - y)}{(x^{2m+1} - y^{2m+1})(x^3 - y^3)} = P^2 - xyQ^2,$$

où l'on a posé

$$P = (x + y)Q + x^m y^m,\quad Q = (x - y)\frac{(x^m - y^m)(x^{m+1} - y^{m+1})}{x^3 - y^3}.$$

(C. E. BICKMORE)

**1956.** Soient B, C deux points fixes d'une circonférence, A un point mobile sur cette courbe. Etudier la variation de l'aire du triangle compris entre la médiane et la hauteur issues de A dans le triangle ABC.

Même question pour le triangle ayant pour sommets le point A, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABC.

# NOTES SUR LES CONIQUES;

par M. H. MANDART.

1. *Equation quadratique des axes de symétrie d'une conique représentée par*

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0.$$

On sait que les tangentes menées aux points de contact d'une conique et d'un cercle bitangents sont également inclinées sur les axes de la courbe. La droite des contacts est donc parallèle à l'un d'eux, et le centre du cercle se trouve par conséquent sur l'autre.

*Le centre d'un cercle bitangent à une conique décrit donc l'un des axes de symétrie de la courbe.*

Ce théorème permet de trouver aisément l'équation du couple des axes de symétrie. En effet, l'équation

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0$$

représente un cercle bitangent à la conique représentée par l'équation générale, quand on a les relations

$$l - \lambda^2 = m - \mu^2 \quad , \quad h = \lambda\mu;$$

le centre du cercle est déterminé par les équations

$$F'_x - 2(\lambda x + \mu y + \nu)\lambda = 0 \quad , \quad F'_y - 2(\lambda x + \mu y + \nu)\mu = 0.$$

Ses coordonnées satisfont donc aux relations

$$F'^2_x - F'^2_y = 4(\lambda x + \mu y + \nu)^2(\lambda^2 - \mu^2) = 4(\lambda x + \mu y + \nu)(l - m),$$
$$F'_x F'_y = 4(\lambda x + \mu y + \nu)^2 \lambda\mu = 4(\lambda x + \mu y + \nu)h,$$

ou à l'équation

$$F'^2_x - \frac{l - m}{h} F'_x F'_y - F'^2_y = 0,$$

laquelle représente par conséquent les axes de symétrie de la courbe.

2. *Formules qui donnent les coordonnées des foyers de la conique*

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0.$$

On sait que les foyers d'une conique se trouvent aux points d'intersection des tangentes isotropes.

Si dans l'équation générale des tangentes de coefficient angulaire $q$,

$$Ny - F = q(Nx - G) \pm \sqrt{-\Delta(l + 2hq + mq^2)},$$

où N, F, G ont les valeurs

$$N = lm - h^2, \quad F = gh - lf, \quad G = hf - mg,$$

on remplace $q$ respectivement par $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, on obtient les équations

$$Ny - F - (Nx - G)\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-\Delta(l - m + 2h\sqrt{-1})},$$

$$Ny + F + (Nx - G)\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-\Delta(l - m - 2h\sqrt{-1})},$$

pour ces tangentes. Ces quatre droites se rencontrent deux à deux aux quatre foyers de la conique donnée.

Les équations ci-dessus combinées donnent les égalités suivantes

$$(Ny - F)^2 + (Nx - G)^2 = \pm\Delta\sqrt{(l - m)^2 + 4h^2},$$

$$(Ny - F)^2 - (Nx - G)^2 = -\Delta(l - m), \quad (Ny - F)(Nx - G) = \Delta h. \quad (1)$$

Des deux premières on tire

$$2(Ny - F)^2 = -\Delta(l - m \mp \sqrt{(l - m)^2 + 4h^2}),$$

$$2(Nx - G)^2 = \Delta(l - m \pm \sqrt{(l - m)^2 + 4h^2}),$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondant. En extrayant les racines carrées de chacune de ces égalités, on a, à cause de la troisième des relations (1),

$$2(Ny - F) = \pm\sqrt{-2\Delta(l - m \mp \sqrt{(l - m)^2 + 4h^2})},$$

$$2(Nx - G) = \pm\sqrt{2\Delta(l - m \pm \sqrt{(l - m)^2 + 4h^2})}.$$

Exemple. *Trouver les foyers de la conique représentée par l'équation*

$$x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x - 2y - 2 = 0.$$

Pour cette courbe on a :

$$N = -6, \quad F = 3, \quad G = 0, \quad \Delta = 9,$$

$$-4y - 2 = \pm\sqrt{-2(3 \mp 5)}; \quad -4x = \pm\sqrt{2(3 \pm 5)}; \quad (-4y - 2)(-4x) = 8$$

D'où pour les coordonnées des quatre foyers :

$$-4y - 2 = +\sqrt{-2(3 - 5)}; \quad -4x = +\sqrt{2(3 + 5)}; \quad x = -1, \; y = -1.$$

$$-4y - 2 = -\sqrt{-2(3 - 5)}; \quad -4x = -\sqrt{2(3 + 5)}; \quad x = 1, \; y = 0.$$

$$-4y - 2 = +\sqrt{-2(3 + 5)}; \quad -4x = -\sqrt{2(3 - 5}; \quad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}, \; y = -\tfrac{1}{2}(1 + 2\sqrt{}$$

$$-4y - 2 = -\sqrt{-2(3 + 5)}; \quad -4x = +\sqrt{2(3 - 5)}; \quad x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}, \; y = -\tfrac{1}{2}(1 - 2\sqrt{}$$

3. *Rayon du cercle osculateur en un point d'une conique*

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0.$$

Supposons les axes de coordonnées rectangulaires; en les transportant parallèlement à eux-mêmes au point A $(x', y')$ de la conique considérée, l'équation de la courbe devient

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + xF'_{x'} + yF'_{y'} = 0.$$

Si nous choisissons maintenant pour axes des coordonnées la tangente au point A et la normale au même point, l'équation de la conique prend la forme

$$l'x^2 + 2h'xy + m'y^2 + 2f'y = 0$$

avec les relations

$$F'^2_{x'} + F'^2_{y'} = 4f'^2, \quad \Delta = -l'f'^2.$$

De ces deux égalités, on tire

$$2\frac{f'}{l'} = \pm\frac{(F'^2_{x'} + F'^2_{y'})^{\frac{3}{2}}}{4\Delta}$$

L'équation du cercle osculateur est donc, par rapport aux nouveaux axes,

$$x^2 + y^2 \pm \frac{(F'^2_{x'} + F'^2_{y'})^{\frac{3}{2}}}{4\Delta}\cdot y = 0;$$

et son rayon a par conséquent pour expression

$$\pm\frac{F'^2_{x'} + F'^2_{y'}}{8\Delta}.$$

Il devient infini quand la conique se réduit à deux droites.

4. *Carré de la distance du centre d'une conique*

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0$$

*au sommet d'un angle droit circonscrit.* On rapporte la courbe aux côtés de l'angle comme axes des coordonnées, elle a alors une équation de la forme

$$a^2x^2 + 2h'xy + b^2y^2 + 2apx + 2bpy + p^2 = 0,$$

avec les relations

$$a^2 + b^2 = l + m, \quad h'^2 - a^2b^2 = h^2 - lm,$$

$$a^2b^2p^2 + 2abh'p^2 - a^2b^2p^2 - a^2b^2p^2 - h'^2p^2 = -p^2(h' - ab)^2 = \Delta.$$

Le carré de la distance considérée est, en désignant par $x'$ et $y'$ les coordonnées du centre

$$x'^2+y'^2=\frac{b^2p^2(h'-ab)^2}{(a^2b^2-h'^2)^2}+\frac{a^2p^2(h'-ab)^2}{(a^2b^2-h'^2)^2}=\frac{p^2(a^2+b^2)(h'-ab)^2}{(a^2b^2-h'^2)^2}$$

$$=-\frac{(l+m)\Delta}{(h^2-lm)^2}.$$

Comme cette quantité est constante, on en conclut que le sommet d'un angle droit circonscrit à une courbe du second degré à centre décrit un cercle concentrique à la courbe et ayant pour rayon, la racine carrée de l'expression ci-dessus.

*Corollaire.* Pour une ellipse, la quantité $(l+m)\Delta$ est toujours négative.

5. *Centre et asymptotes d'une conique réduite à un couple de droites.* De ce que les discriminants des deux équations

$$F(x,y)\equiv lx^2+2hxy+my^2+2gx+2fy+n=0,$$
$$lx^2+2hxy+my^2+xF'_{x'}+yF'_{y'}+F(x',y')=0,$$

sont identiques, on conclut, $\Delta$ étant la valeur commune du discriminant, l'identité suivante

$$(lm-h^2)F(x',y')-\tfrac{1}{4}(lF'^2_{y'}-2hF'_{x'}F'_{y'}+mF'^2_{x'})=\Delta.$$

On peut l'écrire

$$4(lm-h^2)\left[F(x,y)+\frac{\Delta}{h^2-lm}\right]=lF'^2_y-2hF'_xF'_y+mF'^2_x.$$

Cette identité montre que si $\Delta$ est nul, l'équation du second degré représente un couple de droites et que le centre et les asymptotes du système dans ce cas, sont respectivement le point d'intersection des deux droites et ces droites elles-mêmes.

Elle montre également que les asymptotes d'une conique passent par le centre de la courbe.

6. *Les asymptotes sont les tangentes issues du centre.* La droite représentée par l'équation

$$y=qx+t,$$

est tangente à la courbe

$$lx^2+2hxy+my^2+2gx+2fy+n=0,$$

quand l'équation

$$(l+2hq+mq^2)x^2+2[(h+mq)t+g+fq]+mt^2+2ft+n=0,$$

a ses racines égales. On a alors la relation

$$[(h+mq)t+g+fq]^2-(l+2hq+mq^2)(mt^2+2ft+n)=0,$$

de laquelle on tire

$$t=\frac{gh-lf-(hf-mg)q\pm\sqrt{-\Delta(l+2hq+mq^2)}}{lm-h^2}.$$

Les tangentes de coefficient angulaire $q$, sont donc représentées par l'équation

$$y-y'-q(x-x')\pm\frac{\sqrt{-\Delta(l+2hq+mq^2)}}{lm-h^2}=0.$$

Lorsque $\Delta$ est nul, toutes les tangentes passent par le centre.

Dans le cas d'une courbe non dégénérée, on a pour toute tangente passant par le centre l'égalité $l+2hq+mq^2=0$, qui montre que cette droite coïncide avec une asymptote.

---

## REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

par M. E. Cesàro (*Suite*, v. p. 5).

8. Que faut-il pour que la droite $(\alpha, \beta, \ldots, \zeta)$ soit la NORMALE PRINCIPALE de quelque courbe ? Les coordonnées du point $M_1$ de cette courbe, qui appartient à la droite considérée $d$, ont toujours la forme (11); mais $q$ n'a pas l'expression (13), parce que ce n'est plus la seconde condition (10) qui doit être vérifiée, mais seulement la première. Aussi, pour éviter toute confusion, nous désignerons dorénavant par $q_0$ la valeur (13) de $q$, et par $q_0+q_1$ celle que nous allons déterminer de manière que $d$ soit la normale principale de $(M_1)$. C'est $q_0$ qu'il faut substituer à $q$ dans les formules (11) pour connaître le point de rencontre de $d$ avec l'axe central de $(M_1)$; mais c'est $q=q_0+q_1$ qu'il faut faire s'il s'agit de trouver $M_1$. Pour que $d$ soit simplement *normale* à $(M_1)$ il faut, en vertu de (17), que la condition (9) soit remplie. Cela posé, la direction de la tangente à $(M_1)$ étant définie par les cosinus

$$a=\dot{x}\frac{ds}{ds_1},\quad b=\dot{y}\frac{ds}{ds_1},\quad c=\dot{z}\frac{ds}{ds_1}, \tag{18}$$

ou

$$\frac{ds_1}{ds}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2},$$

il suffit évidemment d'exprimer que les variations de ces cosinus sont proportionnelles à $\alpha, \beta, \gamma$, ce qu'on peut, d'ailleurs, résumer en une seule relation, en se servant de l'égalité évidente

$$\begin{vmatrix} \alpha & a & \dot{a} \\ \beta & b & \dot{b} \\ \gamma & c & \dot{c} \end{vmatrix}^2 = \Sigma\,(\gamma\dot{b} - \beta\dot{c})^2.$$

On voit par là, après avoir remplacé $a, b, c$ par leurs valeurs (18), que la relation cherchée est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \dot{x} & \ddot{x} \\ \beta & \dot{y} & \ddot{y} \\ \gamma & \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, si l'on remplace $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ par les valeurs (12), et $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ par les valeurs qu'on déduit des précédentes, on trouve

$$q^2\Sigma\,(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\,\ddot{\alpha} + q\left[2p_0\frac{d\sigma^2}{ds^2} - \Sigma\,(\dot{\alpha}\ddot{\xi} - \ddot{\alpha}\dot{\xi})\right]$$
$$+ 2\,(pp_1 - p_0q_0)\frac{d\sigma^2}{ds^2} + \Sigma\,(\beta\dot{\zeta} - \gamma\dot{\eta})\left(\ddot{\xi} - \xi\frac{d\sigma^2}{ds^2}\right) = 0, \qquad (19)$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\Sigma\dot{\alpha}\dot{\xi} = p_0\frac{d\sigma}{ds}, \quad \Sigma\dot{\alpha}\ddot{\xi} = p_1\frac{d\sigma^2}{ds^2},$$

de sorte que $p_1$ est le *paramètre de distribution* des plans tangents, sur la surface engendrée par $d$. Comme on devait s'y attendre, l'équation obtenue est du second degré en $q$. Cela tient à ce qu'il *peut* y avoir deux courbes $(M_1)$, qui sont alors, nécessairement, deux courbes de Bertrand. Il peut se faire aussi qu'il y en ait une infinité, qui sont toujours des hélices circulaires, constituant le second système d'asymptotiques sur un *hélicoïde à plan directeur*. Pour que $d$ engendre une pareille surface il faut donc, et il suffit, que les trois coefficients de l'équation (19) soient simultanément nuls.

9. Lorsque $d$ passe par M on a $\xi = \eta = \zeta = 0$, et, par suite, $p = 0$, $p_0 = 0$. La condition (19) se réduit à

$$q^2\Sigma\,(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\ddot{\alpha} - q\Sigma\,(\dot{\alpha}\dot{\xi} - \ddot{\alpha}\dot{\xi}) + \Sigma\,(\beta\dot{\zeta} - \gamma\dot{\eta})\,\ddot{\xi} = 0, \qquad (20)$$

ou $dq = \alpha ds$. Si, par exemple, $d$ est une normale, faisant un angle constant avec la normale principale, $q$ doit avoir une valeur constante $-\varepsilon$, et la relation (20) peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{\beta}{\rho} + \frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{\alpha} - \frac{\gamma}{\rho}} = 0.$$

En particulier, pour $\beta = 0$, on voit qu'*il doit y avoir une relation linéaire entre les courbures de* (M) *afin que les normales principales de cette courbe jouent le même rôle par rapport à une autre courbe.* C'est là un théorème bien connu, qu'on doit à M. Bertrand. Pour $\gamma = 0$, on parvient à cet autre résultat connu : *les courbes dont les binormales sont les normales principales d'une autre courbe sont caractérisées par la relation*

$$\frac{1}{\rho} + \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{r} = 0. \tag{21}$$

Pour avoir un exemple de ces courbes, il suffit de rendre gauche une chaînette en lui donnant une torsion proportionnelle à l'arc.

**19**. Nous allons faire une autre application de la formule (19) en cherchant les courbes (M) *dont les axes centraux sont les normales principales d'une autre courbe* ($M_1$). Évidemment (M) et ($M_1$) appartiennent à une même famille, qu'il s'agit de caractériser au point de vue intrinsèque. Les coordonnées de l'axe central de (M) sont

$$\alpha = \cos\varphi, \quad \beta = \sin\varphi, \quad \gamma = 0, \quad \xi = -l\sin\varphi, \quad \eta = l\cos\varphi, \quad \zeta = 0,$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{r}{\rho}, \quad l = \frac{\rho r^2}{\rho^2 + r^2}.$$

On trouve sans peine que $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\xi}, \dot{\eta}$ et $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}$ sont respectivement égaux aux premières et aux secondes dérivées de $\alpha, \beta, \xi, \eta$, tandis que

$$\dot{\gamma} = 0, \quad \dot{\zeta} = 0, \quad \ddot{\gamma} = -\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{l\, ds}, \quad \ddot{\zeta} = l\frac{d}{ds}\frac{\sin\varphi}{l}.$$

Cela étant, la relation (19) devient

$$q^2\frac{\sin\varphi}{l} + q\frac{d}{ds}\frac{dl}{d\varphi} - l\frac{dl}{d\varphi}\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{l} = 0,$$

ou $dq = \cos\varphi . ds$. Il suffit de poser $q d\varphi = \operatorname{tg}\psi . dl$ pour que l'équation différentielle qui précède se réduise à $l d\psi = \sin\varphi . ds$. L'élimination de $q$ et $\psi$ entre les égalités

$$\frac{dq}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\operatorname{tg}\psi}{q}, \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{\sin\varphi}{l} \tag{22}$$

conduit à la relation intrinsèque cherchée :

$$\frac{(\rho^2 + r^2)(r d\rho - \rho dr)}{(\rho^2 - r^2) r d\rho - 2\rho^2 dr} \int \frac{\rho ds}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} = r \operatorname{tang} \int \frac{\sqrt{\rho^2 + r^2}}{\rho r} ds.$$

**11.** On peut avoir deux exemples fort simples en prenant $q = l$, $\psi = \pm\varphi$. Les équations (22) se réduisent alors aux deux qui suivent

$$\frac{dl}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \pm \frac{\sin\varphi}{l},$$

et celles-ci exigent que l'une ou l'autre des relations

$$l = a \sin\varphi, \quad l \sin\varphi = a$$

soit vérifiée. On trouve $l = a \sin\frac{s}{a}$ dans le premier cas, $l = \sqrt{a^2 + s^2}$ dans le second. Dans ce second cas, on a aussi $sr = a\rho$, et il est aisé de voir que les deux courbes sont(*) des géodésiques sur le cône engendré par les côtés d'un angle droit, qui tourne autour d'une bissectrice. Dans l'autre cas elles appartiennent à la famille caractérisée par l'équation

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}.$$

On trouve, en effet, que les équations intrinsèques de (M) sont

$$\frac{a}{\rho} = \sin\frac{s}{a}, \quad \frac{a}{r} = -\cos\frac{s}{a}.$$

Il est facile de construire ces courbes en partant de l'épicycloïde engendrée par un point P d'une circonférence de rayon $a\sqrt{2} - a$, qui roule sans glisser sur une circonférence de rayon $2a$. Soit PQ un rayon de courbure de l'épicycloïde (P). Sur ce rayon, comme diagonale, construisons le carré dans le plan perpendiculaire au plan de (P). Les extrémités M et $M_1$ de l'autre diagonale décrivent les courbes cherchées : MQ est la normale principale de (M) et l'axe central de ($M_1$),

(*) « *Geometria intrinseca* » p. 144.

comme $M_1Q$ est la normale principale de $(M_1)$ et l'axe central de (M). Les deux autres côtés du carré enveloppent deux cycloïdes tordues en hélice sur le cylindre, qui a pour section droite l'épicycloïde (Q). Si l'on rabattait tous les carrés dans le plan des épicycloïdes, les courbes (M) et $(M_1)$ s'y trouveraient transformées en deux épicycloïdes semblables à (P) et à (Q). Remarquons enfin que, dans les deux exemples qui précèdent, les courbes (M) et $(M_1)$ sont égales entre elles, et symétriquement placées par rapport à un plan ou à une droite.

**12.** Pour compléter le système des formules données dans les paragraphes précédents, il nous reste à nous occuper de la détermination de la courbe $(M_1)$ dans tous les cas considérés. Remarquons d'abord que, pour la tangente aussi bien que pour la binormale, c'est $q = q_0$ qu'on doit prendre, parce que $M_1$ est le point central de $d$. Occupons-nous, en premier lieu, du cas où $d$, définie en direction par les cosinus $\alpha, \beta, \gamma$, est TANGENTE à $(M_1)$. Les cosinus directeurs de cette tangente ont toujours les expressions (18), d'où il suit, en rappelant l'égalité (17),

$$\frac{ds_1}{ds} = \Sigma \alpha \dot{x} = \alpha + p\frac{d\sigma}{ds} - \frac{dq_0}{ds}.$$

Dans cette formule $d\sigma$ est l'angle de contingence, qu'on sait calculer par la formule (8). On trouve ensuite, pour le rayon de flexion,

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\sigma} = p + \frac{\alpha - \dfrac{dq_0}{ds}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2}}.$$

On sait enfin que les cosinus directeurs de la binormale, qui ont les expressions (15), ont leurs variations proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale principale, et, partant, à $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$. On trouve ainsi, par l'emploi de formules connues,

$$(\ddot{\beta}\dot{\gamma} - \dot{\gamma}\ddot{\beta})\frac{ds}{d\sigma} + \cdots = -\frac{\dot{\alpha}}{r_1}\frac{ds_1}{d\sigma}\ ;\ \text{etc.}$$

Il vient donc, en multipliant, par $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, et additionnant,

$$\frac{1}{r_1\rho_1^2} = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^5 \Sigma(\beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta})\ddot{x}.$$

Pour faire une application de ces formules, considérons l'axe central d'une courbe appartenant à la famille $\rho r^2 = a(\rho^2 + r^2)$. Les coordonnées

d'une telle droite et leurs variations sont données par les formules du § 10, en y supposant $l = a$. On trouve $d\sigma = d\varphi$, et

$$\frac{ds_1}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{a}{r} = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Lorsque (M) est donnée, $\varphi$ est une fonction connue de $s$, et l'élimination de $s$ entre les équations qui précèdent fournit les équations intrinsèques de $(M_1)$. Dans le cas général on peut obtenir, par l'élimination de $s$ et de $\varphi$, une seule relation caractéristique :

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{d}{ds_1}\operatorname{arctg}\frac{a}{r_1} = 0.$$

Celle-ci, comme on devait s'y attendre, n'est autre que la relation (21), qui caractérise les courbes admettant pour binormales les normales principales d'une autre courbe. (*A continuer.*)

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

×5. *Aire d'un quadrilatère.* 1° Soient $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$ les sommets d'un quadrilatère convexe. On a, *en grandeur et en signe,*

$$A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad A_3A_4A_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix};$$

la somme de ces aires donne

$$A_1A_2A_3A_4 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Si l'on retranche la seconde colonne de la première, on trouve

$$A_1A_2A_3A_4 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \\ 0 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

En retranchant la première ligne de la troisième, la deuxième de la quatrième, on trouve

$$A_1A_2A_3A_4 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Cette formule peut se démontrer directement. En effet, si par l'origine O des coordonnées on mène OB, OC parallèles aux diagonales $A_1A_3$, $A_2A_4$, on forme un triangle OBC équivalent au quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$. Mais les coordonnées des points B, C sont

$$(x_3 - x_1, y_3 - y_1), \quad (x_4 - x_2, y_4 - y_2), \text{ etc.}$$

2° Considérons un quadrilatère concave $A_1A_2A_3A_4$, et supposons le point $A_4$ à l'intérieur du triangle $A_1A_2A_3$. En tenant compte de la règle des signes, on peut encore écrire

$$A_1A_2A_3A_4 = A_1A_2A_3 + A_3A_4A_1;$$

par suite les formules (1), (2), (3) subsistent encore.

3° Supposons maintenant un quadrilatère étoilé $A_1A_2A_3A_4$ dont les côtés $A_2A_3$, $A_1A_4$ se coupent en un point D compris entre les côtés $A_1A_2$, $A_3A_4$. Les triangles $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_1$ sont de signes contraires. Leur différence arithmétique est égale à celle des triangles $DA_1A_2$, $DA_3A_4$; c'est cette différence qu'on appelle aire du quadrilatère étoilé et qui est représentée par les formules (1), (2), (3).

Menons la droite $A_4E$ égale et parallèle à $A_3A_1$. La différence des valeurs absolues des aires $A_1A_2A_3$, $A_2A_4A_1$ est égale à l'aire d'un triangle ayant pour base $A_1A_3$ et pour hauteur la différence des hauteurs des triangles $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_1$; donc elle est encore égale à l'aire du triangle $A_2A_4E$, ou à l'expression (3).

4° Considérons deux quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ et soient Q, Q' leurs aires définies comme il vient d'être expliqué, de sorte que

$$2Q = \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}, \quad 2Q' = \begin{vmatrix} x'_3 - x'_1 & y'_3 - y'_1 \\ x'_4 - x'_2 & y'_4 - y'_2 \end{vmatrix}.$$

Effectuons la multiplication des deux déterminants; en posant

$$\rho_{rs} = x_r x'_s + y_r y'_s, \quad \rho_{rr} = x_r x'_r + y_r y'_r,$$
$$\lambda_r = x_r^2 + y_r^2, \quad \lambda'_r = x_r'^2 + y_r'^2,$$

on trouve

$$4QQ' = \begin{vmatrix} \rho_{33} - \rho_{31} - \rho_{13} + \rho_{11} & \rho_{34} - \rho_{14} - \rho_{32} + \rho_{12} \\ \rho_{43} - \rho_{23} - \rho_{41} + \rho_{21} & \rho_{44} - \rho_{42} - \rho_{24} + \rho_{22} \end{vmatrix},$$

expression qu'on peut transformer en introduisant les distances $A_rA'_s = d_{rs}$. En effet, observant que

$$d_{rs}^2 = (x_r - x'_s)^2 + (y_r - y'_s)^2 = \lambda_r + \lambda'_s - 2\rho_{rs},$$

on pourra remplacer $\rho_{rs}$ par $\frac{1}{2}(\lambda_r + \lambda'_s - d_{rs}^2)$ et écrire

$$16QQ' = \begin{vmatrix} -d_{33}^2 + d_{31}^2 + d_{13}^2 - d_{11}^2 & -d_{34}^2 + d_{14}^2 + d_{32}^2 - d_{12}^2 \\ -d_{13}^2 + d_{23}^2 + d_{41}^2 - d_{21}^2 & -d_{44}^2 + d_{42}^2 + d_{24}^2 - d_{22}^2 \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait coïncider les deux quadrilatères, on obtient

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2d_{13}^2 & d_{14}^2 + d_{23}^2 - d_{34}^2 - d_{12}^2 \\ d_{14}^2 + d_{23}^2 - d_{34}^2 - d_{13}^2 & 2d_{24}^2 \end{vmatrix},$$

ou la formule connue

$$16Q^2 = 4f^2g^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2,$$

où $a, b, c, d$ sont les côtés consécutifs d'un quadrilatère et $f, g$ les diagonales (Comparez Dostor, NAM., 1874, p. 559). (J. N.).

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

### Question 785.

(Voir *Mathesis* (2), II, p. 216).

*Soient* $H_a$, $H_b$, $H_c$ *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC; $M_a$, $M_b$, $M_c$ *les points de rencontre des droites* AM, BM, CM *avec* BC, CA, AB. *Les triangles* $AH_bH_c$, $H_aBH_c$, $H_aH_bC$ *étant inversement semblables à* ABC, *appelons* $M'_a$, $M'_b$, $M'_c$ *respectivement l'homologue de* $M_a$ *dans* $AH_bH_c$, *l'homologue de* $M_b$ *dans* $H_aBH_c$, *l'homologue de* $M_c$ *dans* $H_aH_bC$. *Trouver le lieu du point* M *tel que les droites* $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ *concourent en un même point* M'; *trouver aussi le lieu du point* M'. (E. Lemoine).

*Solution par* M. Emmerich. 1° Soient X, Y, Z les coordonnées normales du point M rapporté au triangle fondamental ABC. Les équations de $H_bH_c$ et de $AM'_a$, l'isogonale de AM, étant

$$-x\cos A + y\cos B + z\cos C = 0, \quad yY - zZ = 0,$$

(*) Nous avons à mentionner une bonne solution de la question 1218 (*Mathesis*, 1899, p. 277), par M. Dépaez, professeur de mathématiques supérieures à l'Athénée de Bruxelles. Notre zélé correspondant remarque que le cercle de Monge de la conique variable enveloppe une ellipse.

on trouve les coordonnées du point $M'_a$

$$Y\cos C + Z\cos B, \quad Z\cos A, \quad Y\cos A,$$

et ensuite l'équation de la droite $M_aM'_a$

$$x(Y^2 - Z^2)\cos A + (yZ - zY)(Y\cos C + Z\cos B) = 0. \qquad (1)$$

Pour simplifier l'écriture, nous écrivons A, B, C au lieu de cos A, cos B, cos C, nous divisons aussi l'équation (1) par $Y^2 Z^2$ et remplaçons $\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}$ par $\alpha, \beta, \gamma$, ce qui revient à introduire l'inverse triangulaire M'' de M, situé à l'intersection des droites $AM'_a$, $BM'_b$, $CM'_c$. Il vient

$$A(\gamma^2 - \beta^2)x + (B\beta + C\gamma)(\beta y - \gamma z) = 0. \qquad (2)$$

On en conclut la condition pour que les droites $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ concourent en un même point :

$$\begin{vmatrix} A(\gamma^2 - \beta^2) & \beta(B\beta + C\gamma) & -\gamma(B\beta + C\gamma) \\ -\alpha(C\gamma + A\alpha) & B(\alpha^2 - \gamma^2) & \gamma(C\gamma + A\alpha) \\ \alpha(A\alpha + B\beta) & -\beta(A\alpha + B\beta) & C(\beta^2 - \alpha^2) \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on trouve

$$\begin{aligned} &ABC(\gamma^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \alpha^2) \\ &+ \Sigma C\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)(B\beta + C\gamma)(A\alpha + C\gamma) = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Mais $(\gamma^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \alpha^2) = \Sigma\alpha^2\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)$,

$$(B\beta + C\gamma)(A\alpha + C\gamma) = AB\alpha\beta + C\gamma\Sigma A\alpha,$$

de sorte que le second terme de l'équation (3) prend la forme

$$ABC\Sigma\alpha^2\beta^2(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta\gamma\Sigma C^2(\beta^2 - \alpha^2)\Sigma A\alpha,$$

et l'équation se réduit à

$$\alpha\beta\gamma\Sigma C^2(\beta^2 - \alpha^2)\Sigma A\alpha = 0.$$

Ecartons la solution $\alpha\beta\gamma = 0$; il reste pour le lieu de M'' une droite,

$$\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C = 0, \qquad (4)$$

et une conique,

$$(\cos^2 B - \cos^2 C)\alpha^2 + (\cos^2 C - \cos^2 A)\beta^2 + (\cos^2 A - \cos^2 B)\gamma^2 = 0. \qquad (5)$$

La droite (4) est l'axe orthique du triangle ABC (axe d'homologie de ABC, $H_aH_bH_c$); sa transformée par inversion triangulaire est une conique circonscrite à ABC, coupant la circonférence ABC au point

cosec (B — C), cosec (C — A), cosec (A — B) et ayant pour centre le point de Lemoine de ABC.

La conique (5) est autopolaire à ABC et a pour centre le point cosec (B — C), cosec (C — A), cosec (A — B). Elle a pour transformée une quartique passant par A, B, C, l'orthocentre H, le centre I du cercle inscrit, le barycentre G. Si un point (X, Y, Z) fait partie de cette quartique, ses associés (— X, Y, Z), (X, — Y, Z), (X, Y, — Z) appartiennent également à la courbe. Ces circonstances s'expliquent facilement à priori.

2° Passons au lieu du point M'. Si l'on suppose le point M'' mobile sur l'axe orthique (4), les équations de $M_aM'_a$, $M_bM'_b$ se réduisent à

$$(\gamma^2 - \beta^2)\,x - \alpha\beta y + \alpha\gamma z = 0,$$
$$\alpha\beta x + (\alpha^2 - \gamma^2)\,y - \beta\gamma z = 0.$$

On tire de là, pour les coordonnées de M,

$$\rho x = \alpha(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2),\quad \rho y = \beta(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2),\quad \rho r = \gamma(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2),\quad (6)$$

$\rho$ étant un facteur de proportionnalité; à ces *formules paramétriques*, il faut joindre l'équation de condition

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

La partie du lieu qui correspond au point M'' mobile sur la courbe (5) donne des calculs assez compliqués.

Note. Si l'on ordonne l'équation (1) par rapport à X, Y, Z, on trouve

$$(Cz - Ax)\,Y^2 - (Cy - Bz)\,YZ + (Ax - By)\,Z^2 = 0.$$

Donc si l'on pose

$$A_{11} = By - Cz,\quad A_{22} = Cz - Ax,\quad A_{33} = Ax - By,$$
$$A_{23} = Cy - Bz,\quad A_{31} = Az - Cx,\quad A_{12} = Bx - Ay,$$

les équations des droites $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} A_{22}Y^2 - A_{23}YZ + A_{33}Z^2 &= 0,\\ A_{33}Z^2 - A_{31}ZX + A_{11}X^2 &= 0,\\ A_{11}X^2 - A_{12}XY + A_{22}Y^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Pour avoir le lieu du point M', il faut éliminer X, Y, Z entre les relations (7). Si l'on considère $x, y, z$ comme des quantités connues et X, Y, Z comme les variables, ces équations représentent trois couples de droites $(p, p')$, $(q, q')$, $(r, r')$ passant respectivement par A, B, C.

Trois de ces droites, par exemple $p, q, r$ doivent passer par un même point M, et comme le produit des couples de valeurs des rapports $\frac{Y}{Z}, \frac{Z}{X}, \frac{X}{Y}$ qui correspondent aux trois couples de droites est égal à l'unité, les trois autres droites $p', q', r'$ concourent en un second point $M_1$. Or, les conjuguées harmoniques des droites $p, p'$, $q, q'$, $r, r'$ respectivement par rapport aux angles A, B, C du triangle ABC rencontrent les côtés opposés sur les polaires trilinéaires des points M, $M_1$; mais ces conjuguées sont représentées par les équations (7) où l'on change les signes des termes en YZ, ZX, XY et leurs points de rencontre avec BC, CA, AB sont sur la conique

$$\Sigma A_{11} X^2 + \Sigma A_{23} YZ = 0. \qquad (8)$$

Cette conique étant composée des polaires des points M, $M_1$, le discriminant de (8) est nul; l'équation du lieu de M' est donc

$$\begin{vmatrix} 2A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & 2A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 2A_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$4\,(Ax - By)\,(By - Cz)\,(Cz - Ax)$$
$$+ (Bx - Ay)\,(Cy - Bz)\,(Az - Cx) - \Sigma\,(By - Cz)\,(Cy - Bz)^2 = 0.$$

En développant on trouve

$$\Sigma A\,(C^2 - B^2)\,x^2 + \Sigma\,(C^2 - A^2 - 2B^2)\,(Ax - Cz)\,y^2 = 0. \qquad (9)$$

Ce calcul donne pour le lieu du point M' une cubique.

Le lieu de M'' étant composé d'une droite et d'une conique, on est conduit à conjecturer la même chose pour le lieu M'. Cependant l'équation (8) nous paraît irréductible.

Nous publions donc les développements de M. Emmerich et les nôtres avec l'espoir qu'un lecteur plus heureux parvienne à les compléter et à dissiper certaines obscurités ou contradictions.

On peut généraliser la question en ces termes :

Étant donnés deux triangles ABC, A'B'C', on partage les côtés BC, B'C' aux points $M_a$, $M'_a$ dans un même rapport, les côtés CA, C'A' aux points $M_b$, $M'_b$ dans un même rapport, enfin les côtés AB, A'B' aux points $M_c$, $M'_c$ dans un même rapport. Ces rapports étant choisis de

manière que les triples de droites ($AM_a$, $BM_b$, $CM_c$), ($A'M'_a$, $BM'_b$, $CM'_c$), ($M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$) concourent en des points M, M', $M_1$, on demande les lieux des points M, M', $M_1$.

On peut encore supposer que ($M_a$, $M'_a$), ($M_b$, $M'_b$), ($M_c$, $M'_c$) soient des éléments correspondants des couples de ponctuelles projectives marquées sur BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B'.

Pour terminer, nous remarquerons que les formules (6) étant mises sous la forme

$$x = \sigma\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}, \quad y = \sigma\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}, \quad z = \sigma\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta},$$

on est conduit à regarder $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ comme les côtés d'un triangle et à écrire

$$x = \sigma\cos\lambda, \quad y = \sigma\cos\mu, \quad z = \sigma\cos\nu,$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant les angles de ce triangle, qui d'ailleurs, doit vérifier constamment la relation

$$A\sin\lambda + B\sin\mu + C\sin\nu = 0.$$

Cependant, cette observation, assez curieuse, ne donne pas de résultat simple. (J. N.).

---

## ×Question 1217.

(Voir *Mathesis*, (2) t. IX, p. 104).

*Calculer la surface d'un triangle sphérique* ABC, *connaissant le côté* BC = *a*, *la médiane* AM = $\alpha$ *et la hauteur* AD = *h*. (Klompers).

*Solution par* M. J. Déprez. On a la relation :

$$\operatorname{cotg} E = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\sin a\sin h}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{1}{2}a+2\cos\frac{1}{2}a\cos\alpha}{\sin a\,.\,\sin h} = \frac{\cos\frac{1}{2}a+\cos\alpha}{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin h}.$$

On a donc :

$$\operatorname{cotg} E = \frac{\cos\frac{1}{2}a+\cos\alpha}{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin h}.$$

Note. Ont résolu la même question MM. Emmerich, Soons et Rose.

---

## ×Question 1219.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 128).

*Éliminer* $x, y, z$ *entre les équations*

$$bx^2 + axy + cyz = 0, \quad cy^2 + byz + azx = 0, \quad az^2 + czx + bxy = 0.$$

(Emmerich).

*Solution par* M. A. Goldenberg. En divisant respectivement par $xy$, $yz$, $zx$ les deux membres de chacune des équations données et posant

$$x = \lambda y, \quad y = \mu z, \quad z = \nu x,$$

on obtient facilement

$$2ab \cdot \lambda = -a^2 - b^2 + c^2, \quad 2bc \cdot \mu = a^2 - b^2 - c^2,$$
$$2ca \cdot \nu = -a^2 + b^2 - c^2;$$

observant que $\lambda\mu\nu = 1$, on a

$$8a^2b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 - b^2 + c^2).$$

Autres solutions par MM. Brocard et Déprez.

---

## ×Question 1227.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 216).

*Soient* E, F *les points de concours des côtés opposés* AB *et* CD, BC *et* DA *d'un quadrilatère convexe* ABCD; G *étant le point d'intersection des diagonales* AC *et* BD, *on mène la droite* EG *qui coupe* BC *en* X, DA *en* Z; *on mène aussi la droite* FG *qui rencontre* AB *en* Y, DC *en* U.

*En désignant par* Q, Q' *les aires des quadrilatères* ABCD, XYZU, *et par* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *celles des triangles* BCD, CDA, DAB, ABC, *on a la formule*

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{8\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)(\gamma+\beta)(\gamma+\delta)}.$$

(J. Neuberg.)

*Solution par* M. Emmerich. On a

$$\frac{AY}{BY} = \frac{AE}{BE} = \frac{\text{tr.ACD}}{\text{tr.BCD}} = \frac{\beta}{\alpha}; \quad \text{d'où} \quad \frac{AY}{AB} = \frac{\beta}{\alpha+\beta};$$

$$\frac{AZ}{DZ} = \frac{AF}{DF} = \frac{\text{tr.ABC}}{\text{tr.DBC}} = \frac{\delta}{\alpha}; \quad \text{d'où} \quad \frac{AZ}{AD} = \frac{\delta}{\alpha+\delta}.$$

En multipliant, on trouve,

$$\frac{AY \cdot AZ}{AB \cdot AD} = \frac{\beta\delta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)} = \frac{tr.AYZ}{tr.ABD} = \frac{tr.AYZ}{\gamma};$$

on arrive ainsi et par des procédés analogues au tableau suivant :

$$tr.AYZ = \frac{\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)}, \quad tr.BYX = \frac{\gamma\delta\alpha}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)},$$
$$tr.CXU = \frac{\delta\alpha\beta}{(\gamma+\delta)(\gamma+\beta)}, \quad tr.DUZ = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\delta+\alpha)(\delta+\gamma)}.$$

Pour calculer $Q - Q'$ observons que $\alpha+\gamma = \beta+\delta = Q$ et posons $\alpha\gamma - \beta\delta = \varepsilon$, $\alpha\gamma + \beta\delta = \eta$,

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)(\gamma+\beta)(\gamma+\delta) = N.$$

Il vient

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\delta) = 2\alpha Q - \varepsilon, \quad (\beta+\gamma)(\beta+\alpha) = 2\beta Q + \varepsilon,$$
$$(\gamma+\delta)(\gamma+\beta) = 2\gamma Q - \varepsilon, \quad (\delta+\alpha)(\delta+\gamma) = 2\delta Q + \varepsilon.$$

$$tr.AYZ + tr.CXU = \frac{\beta\gamma\delta}{2\alpha Q - \varepsilon} + \frac{\delta\alpha\beta}{2\gamma Q - \varepsilon} =$$
$$\frac{\beta\delta Q(2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \varepsilon)}{N} = \frac{\beta\delta Q(2Q^2 - \varepsilon - 4\alpha\gamma)}{N};$$

$$tr.BYX + tr.DUZ = \frac{\gamma\delta\alpha}{2\beta Q + \varepsilon} + \frac{\alpha\beta\gamma}{2\delta Q + \varepsilon} =$$
$$\frac{\alpha\gamma Q(2\delta^2 + 2\beta^2 + \varepsilon)}{N} = \frac{\alpha\gamma Q(2Q^2 + \varepsilon - 4\beta\delta)}{N};$$

$$Q - Q' = \frac{2\eta Q^2 + \varepsilon^2 Q - 8\alpha\beta\gamma\delta Q}{N}.$$

$$N = (2\alpha Q - \varepsilon)(2\gamma Q - \varepsilon) = 4\alpha\gamma Q^2 - 2\varepsilon Q^2 + \varepsilon^2$$
$$= 4\alpha\gamma Q^2 - 2(\alpha\gamma - \beta\delta)Q^2 + \varepsilon^2 = 2\eta Q^2 + \varepsilon^2.$$

On aura donc

$$Q - Q' = \frac{(N - 8\alpha\beta\gamma\delta)Q}{N},$$

ce qui équivaut à la proposition.

*Autre solution.* On peut arriver à la formule proposée et même à une formule plus générale par des calculs plus simples.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant toujours les aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC, soient $a, b, c, d$ quatre forces parallèles appliquées en A, B, C, D et prenons pour X, Y, Z, U les points d'application des résultantes des

forces appliquées aux extrémités des côtés CB, BA, AD, DC, de sorte que

$$\frac{BX}{XC}=\frac{c}{b},\quad \frac{BY}{YA}=\frac{a}{b},\quad \frac{AZ}{ZD}=\frac{d}{a},\quad \frac{DU}{UC}=\frac{c}{d}.$$

Cherchons d'abord la surface du triangle XYZ. Si $a_1$, $y$, $b_1$, désignent les perpendiculaires abaissées des points A, Y, B sur XZ, une formule connue donne

$$y=\frac{a_1a+b_1b}{a+b};$$

en y multipliant $y$, $a_1$, $b_1$ par XZ, on trouve

$$XYZ=\frac{AZX\,.\,a+BZX\,.\,b}{a+b}. \qquad (1)$$

Mais

$$\frac{AZX}{ADX}=\frac{d}{a+d},\quad \frac{BZX}{BZC}=\frac{c}{b+c};$$

tirant de là AZX et BZX pour substituer les valeurs dans la formule (1), on obtient

$$(a+b)\,.\,XYZ=ADX\frac{ad}{a+d}+BZC\frac{bc}{b+c}. \qquad (2)$$

Les aires ADX, BZC résultent des égalités

$$ADX=\frac{\beta c+\gamma b}{b+c},\quad BZC=\frac{\delta a+\alpha d}{a+d},$$

analogues à la relation (1). Par suite, l'égalité (2) peut prendre la forme

$$(a+b).XYZ=\frac{adc.\beta+adb.\gamma+abc.\delta+bcd.\alpha}{(a+d)\,(b+c)}. \qquad (3)$$

Par analogie,

$$(c+d).XUZ=\frac{adc.\beta+adb.\gamma+abc.\delta+bcd.\alpha}{(a+d)\,(b+c)}. \qquad (4)$$

On en conclut

$$Q'=\frac{\Sigma abc.\delta\times\Sigma a}{(a+d)\,(b+c)\,(a+b)\,(c+d)}.$$

Dans la question 1237, $a$, $b$, $c$, $d$ sont égaux à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; donc $\Sigma a=2Q$, $\Sigma abc.\delta=4\alpha\beta\gamma\delta$, etc.

La relation

$$(a+b).\mathrm{XYZ} = (c+d).\mathrm{XUZ}$$

se déduit immédiatement de ce que le centre des forces parallèles $a$, $b$, $c$, $d$, étant au point d'intersection G des droites XZ, YU, on a

$$\frac{\mathrm{XYZ}}{\mathrm{XUZ}} = \frac{\mathrm{YG}}{\mathrm{GU}} = \frac{c+d}{a+b}.$$

(J. N.).

---

## Question 1245.

(Voir *Mathesis* (2), t. IX, p. 264).

*Soient* PP', QQ' *deux cordes rectangulaires d'une parabole, passant par son foyer* F, *et qui rencontrent la directrice respectivement en* A *et* B. *Soient* N *le point de rencontre des normales en* P *et* P' *et* N' *le point de rencontre des normales en* Q *et* Q'; $\delta$ *et* $\delta_1$ *les distances de* N *à* PP' *et* QQ', *et* $\delta'$ *et* $\delta'_1$ *les distances de* N' *à* PP' *et* QQ'. *On a les relations*

$$\delta\delta' = 2.\overline{\mathrm{FA}}^2, \quad \delta_1\delta'_1 = 2.\overline{\mathrm{FB}}^2.$$

(E. N. Barisien.)

*Solution par* M. Emmerich. Soient R, $R_1$, R', $R'_1$ les pieds de $\delta$, $\delta_1$, $\delta'$, $\delta'_1$. Les triangles PP'B et P'PN étant égaux, on a $\mathrm{FB} = \delta$ et $\mathrm{RP} = \mathrm{FP}'$; de même, on conclut des triangles égaux QQ'A et Q'QN' que $\delta'_1 = \mathrm{FA}$ et $\mathrm{R}'_1\mathrm{Q} = \mathrm{FQ}'$. Joignons B au milieu Z de PP' et FR. L'angle ABZ étant droit, on voit que $\overline{\mathrm{FB}}^2 = \mathrm{FZ}.\mathrm{FA}$, c'est-à-dire $\delta^2 = \frac{1}{2}\delta_1\delta'_1$.

Y étant le milieu de QQ', on a de même $\overline{\mathrm{FA}}^2 = \mathrm{FY}.\mathrm{FB}$ ou $\delta'^2_1 = \frac{1}{2}\delta'\delta$. On a aussi $\delta\delta'_1 = \frac{1}{2}\delta_1\delta'$ et $\delta^3 : \delta'^3_1 = \delta_1 : \delta'$.

L'énoncé de cette question a été rectifié.

*Solution analytique* par M. Jules Cardoso-Laynes (Livourne). En prenant pour origine des coordonnées rectangulaires le foyer et pour axe des $x$ l'axe de la parabole, on a pour cette courbe

$$y^2 - 2px - p^2 = 0 \tag{1}$$

et pour les droites PP' et QQ'

$$mx - y = 0; \quad x + my = 0. \tag{2}$$

Les coordonnées des points P, P' sont

$$\left[\frac{p}{m^2}(1 \pm \sqrt{1+m^2}); \quad \frac{p}{m}(1 \pm \sqrt{1+m^2})\right]$$

les normales en P, P′ ont donc pour équation

$$y - \frac{p}{m}(1 \pm \sqrt{1+m^2}) \tag{3}$$

$$+\frac{1}{m}(1 \pm \sqrt{1+m^2})\left(x - \frac{p}{m^2}(1+\sqrt{1+m^2})\right) = 0.$$

Résolvons les équations que l'on obtient en additionnant et soustrayant les deux équations (3); nous aurons pour les coordonnées de N

$$x = \frac{p(m^2+2)}{m^2}, \quad y = \frac{p}{m}.$$

De là, on déduit

$$\delta = \frac{p\sqrt{1+m^2}}{m}; \quad \delta_1 = \frac{2p\sqrt{1+m^2}}{m^2};$$

puis, en remplaçant $m$ par $-\frac{1}{m}$,

$$\delta'_1 = p\sqrt{1+m^2}; \quad \delta' = 2pm\sqrt{1+m^2}.$$

Mais

$$FA = p^2(1+m^2), \quad FB = \frac{p^2(1+m^2)}{m^2};$$

par conséquent,

$$\delta\delta' = 2FA^2; \quad \delta_1\delta'_1 = 2\overline{FB}^2.$$

M. Rosz a résolu la même question.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**228.** Construire un trapèze, connaissant l'une des bases, les deux diagonales et leur angle.

**227.** On donne trois points en ligne droite O, A, B. Mener par O une droite OT qui coupe les perpendiculaires élevées en A et B sur OB en des points A′, B′ tels que les lignes AB′ et A′B soient perpendiculaires.

On a : $AA'.BB' = \overline{AB}^2$, $AA' : BB' = OA : OB$; d'où AA′ et BB′.

**228.** On donne trois parallèles AA′, BB′, CC′ et une sécante $s$ qui les coupe en A, B, C. Soient M, N deux points fixes pris sur $s$. On mène par M et N deux droites parallèles à une direction quelconque; elles rencontrent CC′, BB′ en M′, N′. Après avoir construit les parallélogrammes ACM′$m$, CBN′$n$, on trace les droites M$m$, N$n$ qui se coupent en R. Démontrer que le point R décrit une droite.

**929.** Sur la hauteur AH d'un triangle ABC rectangle en A, on porte la longueur AD = AB, et sur l'hypoténuse CB la longueur CE = CA. Démontrer que la droite DE est parallèle à AC.

**930.** On donne un cercle O et une corde AB. Trouver un rayon OC de ce cercle, tel que le cercle décrit sur OC comme diamètre touche la droite AB.

Le milieu de OC se trouve sur la circonférence $(O, \frac{1}{2}R)$ et sur la parallèle menée à AB à la distance $\frac{1}{2}R$.

**931.** Démontrer les identités suivantes relatives à un triangle rectiligne quelconque ABC :

$$\Sigma \cos^2\frac{1}{2}A = \frac{4R+r}{2R},\quad \Sigma \sin^2\frac{1}{2}A = \frac{2R-r}{2R};$$

$$\Sigma a \sin^2\frac{1}{2}A = p - \frac{T}{R},\quad \Sigma a \cos^2\frac{1}{2}A = p + \frac{T}{R};$$

$$\Sigma a^2 b \cos^2\frac{1}{2}C = \Sigma ab^2 \cos^2\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\,p\Sigma a^2;$$

$$\Sigma (b+c)\cos^2\frac{1}{2}A = 3p,\quad \Sigma (b+c)\sin^2\frac{1}{2}A = p;$$

$$\Sigma (b-c)\cos^2\frac{1}{2}A = -\Sigma (b-c)\sin^2\frac{1}{2}A = \frac{p(a-b)(b-c)(c-a)}{abc};$$

$$\Sigma \frac{b+c}{a}\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{p}{abc}\Sigma a^2;\quad \Sigma \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{1}{2}A = 0;$$

$$\Sigma (a-b)\sin A \sin B = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{4R^2};$$

$$\Sigma \frac{a+2b}{bc}\,\text{coséc}^2\frac{1}{2}A = \Sigma \frac{a+2c}{bc}\,\text{coséc}^2\frac{1}{2}A = \frac{2p^3}{T^2};$$

$$\Sigma \frac{a+2b}{a}\cos^2\frac{1}{2}A = \Sigma \frac{a+2c}{a}\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{2p^3}{abc};$$

$$\Sigma a \cos^2\frac{1}{2}B \cos^2\frac{1}{2}C = p + \frac{T}{4R};$$

$$\Sigma \operatorname{tg}\frac{1}{2}A \cot\frac{1}{2}(A-B)\cot\frac{1}{2}(A-C) = \frac{r}{p}.$$

(Extrait du *Supplemento al Periodico di Matematica*, anno III, déc. 1899).

**232.** Construire un triangle ABC connaissant les points M, N, P où la médiane, la bissectrice et la hauteur partant d'un même sommet coupent la circonférence circonscrite.

Les points M, N, P déterminent la circonférence circonscrite. La hauteur AP est parallèle au rayon ON; AM coupe OM au milieu du côté BC, etc.

**233.** Si un triangle ABC satisfait à la condition

$$3b = a + c,$$

on a

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{B}{2}, \quad \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 2,$$

$$3(1 + \cos A \cos C) = 5(\cos A + \cos C),$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}, \quad r_b = 2r, \quad l_b^2 = \frac{8}{9}ac;$$

$r$, $r_a$, $r_b$, $r_c$ désignent les rayons des cercles tritangents, et $l_b$ la bissectrice de l'angle B. (G. DE LONGCHAMPS.)

**234.** Soient $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ les côtés d'un quadrilatère inscriptible, et soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les perpendiculaires abaissées d'un point intérieur sur ces côtés. On a la relation

$$a\gamma + c\alpha = b\delta + d\beta.$$

Soit E le point de rencontre des côtés $b$, $d$ et supposons que CD passe entre AB et E. On a :

$$a\alpha + BE \cdot \beta + EA \cdot \delta = ABE,$$
$$-c\gamma + EC \cdot \beta + ED \cdot \delta = CDE,$$

d'où, par division,

$$\frac{a\alpha + BE \cdot \beta + EA \cdot \delta}{-c\gamma + EC \cdot \beta + ED \cdot \delta} = \frac{AE \cdot BE}{DE \cdot CE};$$

chassant les dénominateurs et calculant BE, AE, DE, CE en fonction de $a$, $b$, $c$, $d$, on trouve la relation proposée.

Lorsqu'on sait que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont liées par une équation de la forme

$$M\alpha + N\gamma = P\beta + Q\delta,$$

on peut déterminer M, N, P, Q en plaçant le point O successivement en A, B, C.

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1257.** Si $l, m, n$ sont les projections des trois côtés d'un triangle sur une même direction, quelle doit être cette direction pour que $l^2 + m^2 + n^2$ soit maximum ou minimum? (E. LEMOINE).

***1258.** Dans un triangle isoscèle ABC de base BC, représentons par $h$ la hauteur issue du sommet A et par H les hauteurs égales issues de B et C. Suivant que l'angle A est supérieur ou inférieur à un droit, $H^2$ est supérieur ou inférieur à $2h^2$. (DROZ-FARNY.)

**1259.** On donne une circonférence $C^2$, dont le centre est C, et un de ses points P. Soit M un point mobile sur $C^2$. Si nous appelons $r$ la parallèle conduite par M au diamètre qui passe par P, $s$ la parallèle conduite par le même point à la tangente en P, $d$ le diamètre passant par M, $t$ la tangente en M à $C^2$ et $t'$ la parallèle conduite par C à $t$; en considérant les intersections des droites $r, s, d, t, t'$ avec la circonférence $\gamma^2$ qui a pour centre M et pour rayon MP, démontrer que :

1° le lieu des intersections de $r$ et $\gamma^2$ est un *trifolium rectum*.

2° le lieu des intersections de $s$ et $\gamma^2$ est un *folium double*.

3° les lieux des intersections de $\gamma^2$ avec $d$, $t$ ou $t'$ sont des *sextiques tricirculaires*. Etudier leurs formes et indiquer leurs points multiples.

CARDOSO-LAYNES.

**1260.** Étant donnée la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on mène l'ordonnée MP d'un point quelconque de la courbe. Du pied P comme centre avec le rayon $a$ on décrit une circonférence. On sait que la tangente en M à la chaînette touche cette circonférence. Quelle est l'enveloppe de la seconde tangente menée de M à la circonférence?

(H. BROCARD.)

Plus généralement, en chaque point M d'une courbe donnée $\Sigma$ on mène la symétrique $t'$ de la tangente $t$ à $\Sigma$ par rapport à l'ordonnée de M; cette droite enveloppe une nouvelle courbe $\Sigma'$. Comment construit-on le point de contact de $t'$ avec $\Sigma'$?

(J. N.).

## REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

par M. E. CESÀRO (*Suite*, v. pp. 5, 37).

**13.** Passons au cas où $d$ est la BINORMALE d'une courbe $(M_1)$, qu'il s'agit de déterminer. Il suffit de remarquer que $ds_1$ est la distance entre $d$ et $d'$, pour avoir immédiatement, en vertu de la formule rappelée au commencement du § 2,

$$\frac{ds_1}{ds} = -\frac{\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\zeta}{\sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}},$$

où le signe a été choisi de manière que, lorsque $(M_1)$ coïncide avec $(M)$, on ait $ds_1 = ds$. En d'autres termes, $ds_1 = -p_1 d\sigma$; puis

$$r_1 = -p_1 = -\frac{\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\zeta}{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}.$$

Pour calculer la flexion, nous rappellerons que les cosinus (18), qui définissent la direction de la tangente à $(M_1)$, ont leurs variations proportionnelles aux variations des cosinus correspondants de la binormale :

$$\frac{\dot a}{\dot\alpha} = \frac{\dot b}{\dot\beta} = \frac{\dot c}{\dot\gamma} = \frac{r_1}{\rho_1}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{ds}{d\sigma}\frac{ds}{ds_1}\Sigma\dot\alpha\ddot\alpha = \frac{ds}{d\sigma}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\Sigma\dot\alpha\dddot x.$$

On parvient ainsi à la formule

$$\frac{r_1^2}{\rho_1} = -\frac{\dddot x\dot\alpha + \dddot y\dot\beta + \dddot z\dot\gamma}{(\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dans laquelle il faut encore remplacer $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ par leurs valeurs (18).

**14.** Appliquons les formules qui précèdent au cas où $d$ est une normale quelconque de $(M)$, faisant l'angle $\psi$ avec la normale principale; et cherchons comment doit varier $\psi$ afin que $d$ soit constamment la binormale d'une courbe $(M_1)$. A cause de $\alpha = 0$, $p = 0$, on voit que, pour

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1857**. Si $l, m, n$ sont les projections des trois côtés d'un triangle sur une même direction, quelle doit être cette direction pour que $l^2 + m^2 + n^2$ soit maximum ou minimum? (E. LEMOINE).

×**1858**. Dans un triangle isoscèle ABC de base BC, représentons par $h$ la hauteur issue du sommet A et par H les hauteurs égales issues de B et C. Suivant que l'angle A est supérieur ou inférieur à un droit, $H^2$ est supérieur ou inférieur à $2h^2$. (DROZ-FARNY.)

**1859**. On donne une circonférence $C^2$, dont le centre est C, et un de ses points P. Soit M un point mobile sur $C^2$. Si nous appelons $r$ la parallèle conduite par M au diamètre qui passe par P, $s$ la parallèle conduite par le même point à la tangente en P, $d$ le diamètre passant par M, $t$ la tangente en M à $C^2$ et $t'$ la parallèle conduite par C à $t$; en considérant les intersections des droites $r, s, d, t, t'$ avec la circonférence $\gamma^2$ qui a pour centre M et pour rayon MP, démontrer que :

1° le lieu des intersections de $r$ et $\gamma^2$ est un *trifolium rectum*.

2° le lieu des intersections de $s$ et $\gamma^2$ est un *folium double*.

3° les lieux des intersections de $\gamma^2$ avec $d$, $t$ ou $t'$ sont des *sextiques tricirculaires*. Etudier leurs formes et indiquer leurs points multiples.

CARDOSO-LAYNES.

**1860**. Étant donnée la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on mène l'ordonnée MP d'un point quelconque de la courbe. Du pied P comme centre avec le rayon $a$ on décrit une circonférence. On sait que la tangente en M à la chaînette touche cette circonférence. Quelle est l'enveloppe de la seconde tangente menée de M à la circonférence?

(H. BROCARD.)

Plus généralement, en chaque point M d'une courbe donnée $\Sigma$ on mène la symétrique $t'$ de la tangente $t$ à $\Sigma$ par rapport à l'ordonnée de M; cette droite enveloppe une nouvelle courbe $\Sigma'$. Comment construit-on le point de contact de $t'$ avec $\Sigma'$?

(J. N.).

# REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

par M. E. CESÀRO (*Suite*, v. pp. 5, 37).

**12.** Passons au cas où $d$ est la BINORMALE d'une courbe $(M_1)$, qu'il s'agit de déterminer. Il suffit de remarquer que $ds_1$ est la distance entre $d$ et $d'$, pour avoir immédiatement, en vertu de la formule rappelée au commencement du § 2,

$$\frac{ds_1}{ds} = -\frac{\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\zeta}{\sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}},$$

où le signe a été choisi de manière que, lorsque $(M_1)$ coïncide avec (M), on ait $ds_1 = ds$. En d'autres termes, $ds_1 = -p_1 d\sigma$; puis

$$r_1 = -p_1 = -\frac{\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\zeta}{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}.$$

Pour calculer la flexion, nous rappellerons que les cosinus (18), qui définissent la direction de la tangente à $(M_1)$, ont leurs variations proportionnelles aux variations des cosinus correspondants de la binormale :

$$\frac{\dot a}{\dot\alpha} = \frac{\dot b}{\dot\beta} = \frac{\dot c}{\dot\gamma} = \frac{r_1}{\rho_1}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{ds}{d\sigma}\frac{ds}{ds_1}\Sigma\,\dot\alpha\ddot\alpha = \frac{ds}{d\sigma}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \Sigma\,\dot\alpha\dddot x.$$

On parvient ainsi à la formule

$$\frac{r_1^2}{\rho_1} = -\frac{\dddot\alpha x + \dddot\beta y + \dddot\gamma z}{(\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dans laquelle il faut encore remplacer $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ par leurs valeurs (18).

**13.** Appliquons les formules qui précèdent au cas où $d$ est une normale quelconque de (M), faisant l'angle $\psi$ avec la normale principale; et cherchons comment doit varier $\psi$ afin que $d$ soit constamment la binormale d'une courbe $(M_1)$. A cause de $\alpha = 0$, $p = 0$, on voit que, pour

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1257.** Si $l, m, n$ sont les projections des trois côtés d'un triangle sur une même direction, quelle doit être cette direction pour que $l^2 + m^2 + n^2$ soit maximum ou minimum? (E. LEMOINE).

×**1258.** Dans un triangle isoscèle ABC de base BC, représentons par $h$ la hauteur issue du sommet A et par H les hauteurs égales issues de B et C. Suivant que l'angle A est supérieur ou inférieur à un droit, $H^2$ est supérieur ou inférieur à $2h^2$. (DROZ-FARNY.)

**1259.** On donne une circonférence $C^2$, dont le centre est C, et un de ses points P. Soit M un point mobile sur $C^2$. Si nous appelons $r$ la parallèle conduite par M au diamètre qui passe par P, $s$ la parallèle conduite par le même point à la tangente en P, $d$ le diamètre passant par M, $t$ la tangente en M à $C^2$ et $t'$ la parallèle conduite par C à $t$; en considérant les intersections des droites $r, s, d, t, t'$ avec la circonférence $\gamma^2$ qui a pour centre M et pour rayon MP, démontrer que :

1° le lieu des intersections de $r$ et $\gamma^2$ est un *trifolium rectum*.

2° le lieu des intersections de $s$ et $\gamma^2$ est un *folium double*.

3° les lieux des intersections de $\gamma^2$ avec $d$, $t$ ou $t'$ sont des *sextiques tricirculaires*. Etudier leurs formes et indiquer leurs points multiples.

CARDOSO-LAYNES.

**1260.** Étant donnée la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on mène l'ordonnée MP d'un point quelconque de la courbe. Du pied P comme centre avec le rayon $a$ on décrit une circonférence. On sait que la tangente en M à la chaînette touche cette circonférence. Quelle est l'enveloppe de la seconde tangente menée de M à la circonférence?

(H. BROCARD.)

Plus généralement, en chaque point M d'une courbe donnée $\Sigma$ on mène la symétrique $t'$ de la tangente $t$ à $\Sigma$ par rapport à l'ordonnée de M; cette droite enveloppe une nouvelle courbe $\Sigma'$. Comment construit-on le point de contact de $t'$ avec $\Sigma'$?

(J. N.).

## REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

par M. E. CESÀRO (*Suite*, v. pp. 5, 37).

**12.** Passons au cas où $d$ est la BINORMALE d'une courbe $(M_1)$, qu'il s'agit de déterminer. Il suffit de remarquer que $ds_1$ est la distance entre $d$ et $d'$, pour avoir immédiatement, en vertu de la formule rappelée au commencement du § 2,

$$\frac{ds_1}{ds} = -\frac{\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\zeta}{\sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}},$$

où le signe a été choisi de manière que, lorsque $(M_1)$ coïncide avec $(M)$, on ait $ds_1 = ds$. En d'autres termes, $ds_1 = -p_1 d\sigma$; puis

$$r_1 = -p_1 = -\frac{\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\zeta}{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2}.$$

Pour calculer la flexion, nous rappellerons que les cosinus (18), qui définissent la direction de la tangente à $(M_1)$, ont leurs variations proportionnelles aux variations des cosinus correspondants de la binormale :

$$\frac{\dot a}{\dot\alpha} = \frac{\dot b}{\dot\beta} = \frac{\dot c}{\dot\gamma} = \frac{r_1}{\rho_1}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{ds}{d\sigma}\frac{ds}{ds_1}\Sigma\,\dot\alpha\ddot a = \frac{ds}{d\sigma}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \Sigma\,\dot\alpha\dddot x.$$

On parvient ainsi à la formule

$$\frac{r_1^2}{\rho_1} = -\frac{\dddot\alpha\ddot x + \dddot\beta\ddot y + \dddot\gamma\ddot z}{(\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dans laquelle il faut encore remplacer $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ par leurs valeurs (18).

**13.** Appliquons les formules qui précèdent au cas où $d$ est une normale quelconque de $(M)$, faisant l'angle $\psi$ avec la normale principale; et cherchons comment doit varier $\psi$ afin que $d$ soit constamment la binormale d'une courbe $(M_1)$. A cause de $\alpha = 0$, $p = 0$, on voit que, pour

**18.** Nous allons faire une dernière application des formules (1) en cherchant les *courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire* (*). Les coordonnées $\alpha$, $\beta$, ..., $\xi$ de l'axe $d$ doivent satisfaire aux relations (1) lorsqu'on y fait $\dot{\alpha}=0$, $\dot{\beta}=0$, ..., $\dot{\zeta}=0$, de sorte qu'on sait exprimer leurs dérivées en fonction des coordonnées elles-mêmes et des courbures de la ligne inconnue (M). La droite $d$ et la tangente à (M) doivent être telles que le produit de leur distance par la tangente trigonométrique de leur angle reste constant. On doit donc avoir $\xi = a\alpha$. Une première dérivation donne $\zeta = a\gamma$, et l'on voit que la normale principale appartient aussi au complexe. On en déduit immédiatement le théorème de M. Appell : *le plan polaire de* M, *dans le complexe, est osculateur à* (M). La dérivation de la dernière égalité donne encore $\eta = (a - r)\beta$. En remplaçant $\xi$, $\eta$, $\zeta$ par les valeurs précédentes dans $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$ on trouve successivement

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{r}}, \quad \gamma = r\frac{d\beta}{ds} = -\frac{d}{ds}\sqrt{ar};$$

puis

$$\frac{\alpha}{\rho} = -\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\beta}{r}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\sqrt{ar} - \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{d\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{d}{ds}\sqrt{r}\right)^2\right]}{d\sqrt{r}}.$$

Enfin la substitution de ces valeurs dans la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ nous donne

$$\pm\frac{d\sqrt{r}}{\rho} = d\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{r} - \left(\frac{d}{ds}\sqrt{r}\right)^2}.$$

On voit qu'on peut se donner arbitrairement la torsion en fonction de l'arc; puis, après avoir calculé la flexion au moyen de la dernière équation, on peut affirmer que la ligne trouvée appartient par ses tangentes à un complexe linéaire, dont on sait déterminer l'axe au moyen des formules qui précèdent(**).

---

(*) PICARD. « *Traité d'Analyse* » t. I, p. 354.

(**) *Rectifications*. P. 39, l. 7 et p. 40, l. 1, lire *où* au lieu de *ou*

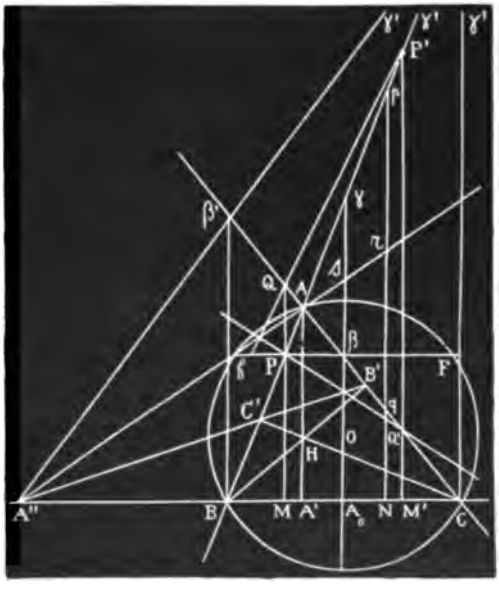
## SUR TROIS PARABOLES ASSOCIÉES A UN TRIANGLE ;

par M. Droz-Farny.

Soient $A_0$, $B_0$, $C_0$ les milieux des côtés d'un triangle ABC, et A', B', C' les pieds des hauteurs, qui se coupent en H.

Prenons sur BC deux points M, M' symétriques par rapport à $A_0$, et élevons en ces points sur BC des perpendiculaires, qui rencontrent AC en Q, Q' et AB en P, P'. Les droites PQ' et P'Q, lorsque la distance $A_0M$ varie, enveloppent une même parabole $\pi_a$ ; en effet, les points P et Q, P' et Q' se correspondent dans deux ponctuelles semblables.

La parabole $\pi_a$ touche les supports AB, AC des deux ponctuelles en des points $q$, $p$, qui sont les homologues de leur intersection A considérée comme élément de l'autre ponctuelle ; on obtient ces points de contact en faisant coïncider MP avec A'A, ce qui amène M'Q' sur la droite N$qp$ symétrique de AA' par rapport à $A_0$. Un diamètre de la parabole $\pi_a$ est donc la droite A''A$r$ menée par le milieu de $pq$. Les droites A$p$, A$q$, A$r$, AA' formant un faisceau harmonique, sont coupées par BC suivant une division harmonique ; donc A'' est le conjugué harmonique de A' par rapport à BC, et, par suite, appartient à la droite B'C'.




On peut supposer les points M, M' en B, C ; par conséquent, si l'on élève B$\beta'$, C$\gamma'$ perpendiculaires à BC et rencontrant AC en $\beta'$, AB en $\gamma'$, les droites BC, $\beta'\gamma'$ sont des positions des droites PQ', P'Q.

Les droites MP, M'P' peuvent se confondre avec la médiatrice $A_0\beta\gamma$ de BC. $\beta\gamma$ est donc une tangente de $\pi_a$ ; son point de contact est évidemment le milieu de $\beta\gamma$.

BC et $A_0\beta\gamma$ étant deux tangentes rectangulaires, la directrice de $\pi_a$ est la droite $HA_0$ qui joint leur point de concours $A_0$ à l'orthocentre H du triangle ABC circonscrit à la parabole. Remarquons en passant que les droites $HA_0$, $HB_0$, $HC_0$ sont perpendiculaires aux droites AA'', BB'', CC''.

Le foyer F doit se trouver sur la circonférence ABC et sur l'isogonale du diamètre AA'' par rapport à l'angle des tangentes AB, AC. Si donc AA'' coupe la circonférence en $f$, il suffit de mener la corde $fF$ parallèle à BC.

Le triangle APQ' et celui qui est formé par BC, $A_0\beta\gamma$ et la droite de l'infini sont circonscrits à une même conique; ils sont également inscrits à une même conique. Autrement dit, il existe une hyperbole équilatère passant par les points A, P, Q', $A_0$ et dont les asymptotes sont parallèles aux droites $A_0\beta\gamma$, BC. Cette courbe est l'hyperbole d'Apollonius du point A par rapport à la conique qui a pour foyers les points B, C, et pour directrices les droites MP, M'Q'.

On peut imaginer deux autres paraboles analogues à $\pi_a$, inscrites au triangle ABC et touchant respectivement les médiatrices des côtés BC, CA.

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**6.** *Sur un cas particulier du théorème de Maclaurin et Braikenridge, par* M. Pirondini (Parme). — 1° On donne deux droites $Ox$, $Oy$ et deux points A, B. Une droite A'B' se meut parallèlement à elle-même; soient A', B' les points où elle coupe $Ox$, $Oy$. Les droites AA', BB' se coupent en un point P qui engendre une conique.

Si l'on prend pour axes les droites $Ox$, $Oy$ et que l'on désigne par $(a, b)$, $(c, d)$ les coordonnées des points A, B, l'équation du lieu de P est

$$(1)\quad bx^2 + (kd - a)xy - kcy^2 - b(c + kd)x + c(a + kb)y = 0,$$

où $k$ représente le rapport OA' : OB'.

2° Examinons quelques positions particulières de la droite A'B'. Lorsque cette droite passe par O, P coïncide avec O. Quand elle se transporte à l'infini, les droites AA', BB' deviennent parallèles à $Ox$, $Oy$ et déterminent un point $O_1$ de la conique. Menons par A et B des parallèles $A_1B_1$, $A_2B_2$ à A'B'; soient $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ les points où

elles coupent $Ox$, $Oy$ : les points $B_1$, $A_2$ appartiennent à la courbe. Enfin, par les points $A_3$, $B_4$ où la droite AB rencontre $Ox$, $Oy$, menons $A_3B_3$, $A_4B_4$ parallèles à A'B' : les positions de P qui correspondent à $A_3B_3$, $A_4B_4$ sont les points donnés B. A, et les tangentes en ces points sont $BB_3$, $AA_4$ ; c'est ce qu'on vérifie facilement en considérant la sécante A'B' dans une position infiniment voisine de $A_3B_3$ ou de $A_4B_4$.

3° Une conique quelconque $\Sigma$ admet le mode de génération considéré ici. On peut même prendre arbitrairement pour O un point quelconque de la courbe, tracer à volonté les droites $Ox$, $Oy$ et se donner la direction A'B' ; car si l'on compare l'équation (1) à l'équation générale

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$$

des coniques passant par l'origine des coordonnées. on trouve que $a$, $b$, $c$. $d$ sont définis par les égalités

$$a = \frac{k\,(ACD + 2kABE - CE)}{AC\,(k^2A - 2kB + C)},$$

$$b = \frac{-k\,(kAE - CD)}{C\,(k^2A - 2kB + C)}, \text{ etc.}$$

Pour construire les points A et B, menons par les points $A_2$, $B_1$ où $\Sigma$ coupe $Ox$, $Oy$, deux parallèles $A_2B_2$, $A_1B_1$ à une même direction A'B' ; soient A, B les points où elles rencontrent $\Sigma$. La conique qui est engendrée d'après le mode expliqué ci-dessus, au moyen des points A, B, des droites $Ox$, $Oy$ et de sécantes parallèles à A'B', a, avec la conique donnée $\Sigma$ cinq points communs, savoir O, $A_2$, $B_1$, A, B ; par suite les deux courbes sont identiques.

4° Soit à tracer une conique par cinq points donnés que nous appelons pour plus de facilité O, $O_1$, A, B, P. Nous menons les droites $Ox$, $Oy$ respectivement parallèles à $O_1A$, $O_1B$ ; elles coupent AP en A', $Oy$ en B'. Il suffit maintenant de mener dans l'angle $xOy$ une parallèle quelconque $ab$ à A'B', et de joindre A à $a$, B à $b$ ; les droites $Aa$, $Bb$ se couperont constamment sur la courbe cherchée. On voit aussi comment on tracerait les tangentes aux points A et B.

7. *Note de Géométrie*, par M. Gob, professeur à Hasselt. I. *Si, par le centre* O *du cercle circonscrit à un quadrilatère* ABCD, *on mène une droite telle que* O *soit le milieu du segment de cette droite limité aux côtés* AB *et* CD, *le point* O *sera aussi le milieu des segments limités sur cette droite par les côtés* AD, BC *et par les diagonales* AC, BD.

Cela revient à dire que si l'on construit les polaires du point O par rapport aux angles formés par les droites AB et CD, AD et BC, AC et BD, ces trois polaires sont parallèles. En transformant la figure par polaires réciproques par rapport au point O, ce théorème revient au suivant : Les milieux des diagonales d'un quadrilatère inscriptible sont en ligne droite avec le centre du cercle circonscrit.

II. *Etant donné un quadrilatère* ABCD, *trouver le lieu d'un point* M *par lequel on puisse mener une droite telle que les trois segments situés sur cette droite et limités aux droites* AB *et* CD, AC *et* BD, AD *et* BC *aient pour milieu commun ce point* M.

On voit comme précédemment que le point M est le centre d'une conique circonscrite au quadrilatère ABCD. Le lieu de M est donc la conique des neuf points de ce quadrilatère.

La théorème I se déduit du théorème de Sturm sur les faisceaux de coniques; le théorème II est équivalent au théorème de Newton sur les coniques tangentes à quatre droites.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**New Plane and Solid Geometry** by W. W. Beman, Professor of Mathematics n the University of Michigan, and D E. Smith, Principal of the State Normal School at Brockport, New York, Boston U. S. A., Ginn and Co, 1899 (Cartonné in 12 de IX-382 p.) Prix : 1,25 dollar.

Cet ouvrage est une édition revue de la Géométrie plane et solide de MM. Beman et Smith publiée en 1895. Sans se départir des principes qui les ont guidés dans la première édition (combinaison de la rigueur euclidienne avec les formes modernes de démonstration), ils ont fait ça et là des suppressions ou des additions, de manière à rendre le livre plus pratique pour les maîtres et les élèves.

Sommaire. — Introduction (définitions; les démonstrations en géométrie; propositions préléminaires). *Géométrie plane.* 1. Triangles; parallèles; problèmes; lieux. 2. Égalité des polygones 3. Cercle (angles au centre; cordes, tangentes; angles formes par les cordes et les tangentes; triangle et quadrilatère inscrit ou circonscrit; deux cercles). Appendice : méthodes. 4. Rapports et proportions (propriétés fondamentales; théorie des limites; faisceaux de droites coupées par des parallèles, ou par des antiparallèles, ou par une circonférence; figures semblables). 5. Mesure des figures planes; division des polygones; polygones réguliers; mesure du cercle. *Appendice.* Propriétés métriques; maxima et minima; lignes concourantes diverses; colinéarité. *Géométrie solide.* 6. Lignes et plans dans l'espace; faisceaux; angles polyèdres. 7. Polyèdres réguliers ou non; prismes, pyramides.

8. Cylindre; cône; sphère; géométrie de la sphère; mesure de la sphère; solides semblables. *Tables :* Table numérique; biographies; étymologies; index.

Les démonstrations sont réduites à leurs points essentiels; le livre contient beaucoup de problèmes et d'exercices. Les figures sont très bien faites et très intuitives.

---

**Geometrische Aufgaben.** Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Schulen, bearbeitet von Prof. Dr. M. Schuster, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Oldenburg. Ausgabe B. Für Progymnasien und Realschulen. Leipzig, Teubner (Cartonné, in 8° de VII-111 p. avec 2 planches lithographiées). Prix : 1 marc 60.

Cinq cents problèmes très bien classés sur toutes les parties de la géométrie plane.

---

1. **Geometria metrica e trigonometria** per S. Pincherle, Prof. nella Università di Bologna. Quinta edizione. Hoepli, Milano, 1900 (Cartonné, IV-158 p. in 18 47 fig. dans le texte). Prix : fr 1.50.

2. **Geometria e Trigonometria della sfera**, per Prof. C. Alasia. Hoepli, Milano, 1900 (Cartonné, VII-207 pp. in 18, 34 fig. dans le texte). Prix : fr. 1,50.

3. **Metodi facili per risolvere i problemi di Geometria elementare** dell' Ing. I. Ghersi. Hoepli, Milano, 1900 (Cartonné, XII-190 pp. in 18, 126 fig. dans le texte). Prix : fr. 1,50.

Ces trois petits volumes appartiennent à l'excellente collection des Manuels Hoepli.

Le premier comprend la mesure des angles plans, des aires planes rectilignes, les relations entre les éléments d'un triangle, la mesure du cercle; la mesure des angles dièdres, du prisme, de la pyramide, du cylindre, du cône, de la sphère (volume et surface); la théorie des fonctions circulaires; la résolution des triangles.

Dans le second, l'auteur a réuni la géométrie de la sphère (le livre VII de Legendre) et la trigonométrie sphérique.

Le troisième contient environ deux cents problèmes de géométrie plane résolus systématiquement d'après diverses méthodes (examen de la figure où l'on suppose le problème résolu; artifices divers; méthodes des lieux géométriques; similitude, etc.).

---

## ESQUISSES BIOGRAPHIQUES

### Tchebychef (1821-1894).

Pafnouty Lvovitch Tchebychef (prononcez Tchebychof), le plus éminent des mathématiciens russes contemporains, né le 14|26 mai 1821, de parents nobles résidant dans le gouvernement de Kalooga, district de Borovsk, est mort à Pétersbourg le 26 novembre (8 décembre) 1894.

Tchebychef, après de solides études à l'université de Moscou, publia de 1843 à 1853, de savants travaux sur le calcul intégral, la théorie des séries, le calcul des probabilités, et la théorie des nombres, qui le firent nommer successivement professeur de mathématiques appliquées, puis professeur ordinaire à l'Université de Pétersbourg, et plus tard, membre de l'Académie de cette ville (1859). Il faut citer particulièrement, dans cette période de sa vie, ses Mémoires sur le nombre des nombres premiers (1845, 1850) et son analyse magistrale de l'œuvre entière d'Euler, en arithmétique supérieure, en tête de l'admirable édition des *Commentationes arithmeticae* de ce géomètre, édition qu'il fit paraître, avec Bouniakofsky, en 1849.

Pendant plus de quarante ans, Tchebychef n'a cessé de publier de nouveaux mémoires, où abandonnant les recherches de mathématiques pures qui avaient occupé sa jeunesse, il applique son rare esprit d'invention à déterminer, dans une foule de domaines, *avec l'approximation la plus grande possible*, la valeur de certaines quantités définies, *dans un intervalle donné*, par l'analyse, la géométrie ou la mécanique. Bien entendu, dans ce genre de calcul approché où il est chef d'école et maître incontesté, il rencontre maintes fois, chemin faisant, des vérités nouvelles et très cachées d'analyse pure, mais elles semblent pour lui un moyen ou un résultat plutôt que le but principal de ses recherches.

Voici la liste rapide de quelques-unes des questions qu'il a ainsi abordées : 1. Détermination des polynomes entiers ou des fractions rationelles qui diffèrent le moins possible dans un intervalle, d'une fonction donnée, de zéro, d'une racine carrée etc, le polynome étant croissant ou décroissant dans l'intervalle, ou variant toujours dans le même sens; application à la théorie des mécanismes et des cartes géographiques. 2. Intégration finie des différentielles irrationnelles, en particulier des différentielles binomes, à propos desquelles il prouve que les deux cas connus d'intégrabilité sont les seuls, des différentielles elliptiques et de celles qui renferment un radical cubique. 3. Application de la théorie des fractions continues à la théorie de l'interpolation par les moindres carrés, où il retrouve comme cas particuliers, les développements les plus célèbres de l'analyse, et où il détermine des limites remarquables pour certaines intégrales définies. 4. Nouveau calcul des variations où il s'agit de trouver une fonction $y$, par la condition que la somme des valeurs de $V$ ($x$, $y$, $y'$, $y''$, etc.) pour $n$ valeurs déterminées de $x$, soit minima ou maxima, puis d'autres questions connexes, dont quelques-uns touchent à la théorie des nombres et à la théorie des fonctions. 5. Valeurs limites des intégrales et des sommes, sujet où, comme dans les précédents, il manie avec la plus grande habileté, la théorie des fractions continues algébriques et où il a été suivi par plusieurs géomètres russes qui ont complété et simplifié ses travaux. 6 Recherches sur la méthode des moindres carrés, où il détermine des limites rigoureuses entre lesquelles sont comprises les sommes ou intégrales considérées.

Tchebychef s'est beaucoup occupé de mécanismes (parallélogramme de Watt, inverseurs et systèmes articulés, etc.) On lui doit plusieurs machines ingénieuses, dont nous ne citerons qu'une seule très curieuse que nous avons vu fonctionner : le mécanisme qui marche à la place du cheval.

Tchebychef fut nommé Correspondant de l'Académie des sciences de Paris, en 1860, associé en 1874 : c'est le premier russe qui ait eu cet honneur depuis Pierre-le-Grand.

L'Académie de Pétersbourg publiera deux éditions complètes des Œuvres de Tchebychef, en russe et en français. Le premier volume de l'une des deux éditions (VI-714 p.), nous ne savons laquelle, vient de paraître par les soins de MM. Markof et Somine (*). (P. M.)

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 784.

(Voir *Mathesis* (2), II, p. 216).

*Trouver*

$$\int \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\cdots\sin(x-a_m)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\cdots\sin(x-b_n)}\,dx \qquad (1)$$

(J. Neuberg.)

Posons

$$A = \cos a_1 \cos a_2 \cdots \cos a_m. \quad B = \cos b_1 \cos b_2 \cdots \cos b_n,$$

$$\operatorname{tg} x = X, \quad \operatorname{tg} a_i = A_i, \quad \operatorname{tg} b_i = B_i.$$

Les termes de la fraction (1) pourront s'écrire ainsi :

$$A\cos^m x\,(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m),$$
$$B\cos^n x\,(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n).$$

Nous ferons abstraction des facteurs constants A et B, et nous distinguerons trois cas.

1° $m = n$. L'intégrale cherchée ayant la forme

$$\int \frac{(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)}\,dx, \qquad (2)$$

introduisons au dénominateur le facteur $\cos^2 x\,(X^2+1)$, qui est égal à l'unité, et décomposons la fraction rationnelle

$$\frac{(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_n)}{(X^2+1)(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)}$$

(*) La présente notice est un résumé de la brochure intitulée : P. L. *Tchébychef et son œuvre scientifique*, par A. Vassilief, professeur à l'Université de Kasan. Turin, Charles Clausen, 1898 (56 p. in 8° avec portrait. Extrait du *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura* di Gino Loria, 1898). On trouve dans cette brochure un beau portrait de Tchebychef et une liste de ses travaux.

en éléments simples :

$$\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{C_1}{X-B_1}+\frac{C_2}{X-B_2}+\cdots+\frac{C_n}{X-B_n}.$$

L'intégrale (2) étant ainsi ramenée à

$$\int(C\operatorname{tg}x+D)\,dx+\int\frac{C_1dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_1)}+\cdots,$$

est égale à

$$-Cl\cos x+Dx+C_1l(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_1)+\cdots=Dx+C_1l\sin(x_1-b_1)+\cdots$$

puisque

$$C+C_1+C_2+\cdots+C_n=0.$$

Nous aurions pu également partir de la forme donnée à la fraction (1) dans la question 1178 (*).

2° $m<n$. On a à chercher

$$\int\frac{(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{\cos^{n-m}x(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)}dx. \qquad (2)$$

Si $n-m$ est un nombre pair $2k$, remplaçons $\cos^{2k}x$ par $\cos^2 x\,(X^2+1)^{-k+1}$, et décomposons en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{(X^2+1)^{k-1}(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)},$$

dont le numérateur est de degré $n-2$ en X. L'intégrale (2) sera ramenée à une somme d'intégrales de la forme

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_1)}=l(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_1).$$

Si $n-m$ est un nombre impair $2k+1$, remplaçons $\cos^{n-m}x$ par $\cos x\,(X^2+1)^{-k}$ et décomposons en fractions simples l'expression

$$\frac{(X^2+1)^k(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)}$$

dont le numérateur est de degré $n-1$ en X; nous aurons alors une somme d'intégrales de la forme

$$\int\frac{C_1dx}{\cos x(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}b_1)}=C_1\cos b_1\int\frac{dx}{\sin(x-b_1)}=C_1\cos b_1.\ l\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-b_1).$$

(*) Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 260. La fin de la solution de cette question 1178 contient un lapsus : dans les quatre dernières lignes, il faut lire $x-b_1$ au lieu de $x-a_1$.

3° $m > n$. On a à chercher

$$\int \cos^{m-n} x \frac{(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)}\,dx. \qquad (4)$$

Si $m-n=2k$, remplaçons $\cos^{2k}x$ par $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(X^2+1)^{k+1}}$, et décomposons en éléments simples la fraction

$$\frac{(X-A_1)(X-A_2)\cdots(X-A_m)}{(X^2+1)^{k+1}(X-B_1)(X-B_2)\cdots(X-B_n)},$$

dont le dénominateur est de degré $m+2$; l'intégrale sera décomposée en termes de la forme (abstraction faite d'un facteur constant)

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(X^2+1)^p} = \int \cos^{2p-2}x\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} b_i)} = l\,(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} b_i).$$

Enfin, lorsque $m-n=2k+1$, l'expression (4) peut s'écrire :

$$\int \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{(X-A_1)(X-A_2)\ldots(X-A_m)}{(X^2+1)^{k+1}(X-B_1)\ldots(X-B_n)}\,dx$$

et en décomposant, on est conduit à des intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\cos x\,(\operatorname{tg}^2 x+1)^p} = \int \cos^{2p-1}x\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos x\,(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} b_i)} = \cos b_i \,.\, l \operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-b_i).$$

(J. Neuberg.)

Solutions partielles par M. M. Listray et Emmerich.

---

## Question 1066.

(Voir *Mathesis*, (2) t. VI, p. 104).

*On considère les coniques ayant un contact du second ordre avec une conique donnée et passant par ses foyers. Trouver le lieu du point de concours des tangentes en ces points.* (E. Duporcq.)

*Solution par* MM. Droz-Farny, Barisien et Déprez. Soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées d'un point P de l'ellipse. En représentant par $m\,(x-a\cos\varphi)+n\,(y-b\sin\varphi)=0$ l'équation d'une corde

quelconque passant par P, l'équation d'une des coniques cherchées sera

$$[bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab][m(x - a\cos\varphi) + n(y - b\sin\varphi)] + b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

La conique devant passer par les foyers, on aura en faisant successivement $y = 0$, $x = +c$; $y = 0$, $x = -c$, pour déterminer $m$ et $n$,

$$m(c - a\cos\varphi) - nb\sin\varphi = \frac{b^2}{c\cos\varphi - a},$$

$$m(c + a\cos\varphi) + nb\sin\varphi = \frac{b^2}{c\cos\varphi + a};$$

de là, $$m = \frac{b^2\cos\varphi}{c^2\cos^2\varphi - a^2}, \quad n = \frac{-ab^2(1 + \cos^2\varphi)}{\sin\varphi(c^2\cos^2\varphi - a^2)}.$$

Mais les coordonnées $x'$, $y'$ du pôle de l'axe des $x$ dans la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

sont fournies par les relations :

$$Ax' + By' + D = 0, \quad Dx' + Ey' + F = 0.$$

On trouve aisément :

$$A = \frac{-a^2b^2\sin^2\varphi}{c^2\cos^2\varphi - a^2}, \quad B = \frac{-ab^2\cos^2\varphi}{\sin\varphi(c^2\cos^2\varphi - a^2)}, \quad D = 0,$$

$$E = \frac{a^2b^2}{\sin\varphi(c^2\cos^2\varphi - a^2)}, \quad F = -\frac{a^2b^2c^2\sin^2\varphi}{c^2\cos^2\varphi - a^2};$$

$$y' = \frac{-F}{E} = -\frac{c^2}{b}\sin^2\varphi, \quad x' = \frac{BF}{AE} = \frac{c^2}{a}\cos^2\varphi.$$

Le point d'intersection des tangentes est donc le centre de courbure correspondant au point P : le lieu est la développée de l'ellipse proposée.

*Solution géométrique* par M. C. Servais. La tangente en M à la conique donnée $\Sigma$ coupe l'axe focal FF' en un point T; la polaire de ce point par rapport à la conique $\Sigma'$ passant par les foyers F et F' et ayant en M un contact du second ordre avec $\Sigma$, est la normale au point M. Le pôle de FF' par rapport à $\Sigma'$ est donc un point $\mu$ de cette normale. Soient M' un point de $\Sigma'$ infiniment voisin de M, S, le pôle de MM' relatif à $\Sigma'$. Les triangles MM'S et FF'$\mu$ sont inscrits dans une conique. A la limite, cette courbe est circonscrite au triangle FF'$\mu$, tangente en M à $\Sigma$ et son rayon de courbure en ce point est la moitié du rayon correspondant de $\Sigma$; par suite, $\mu$ est le centre de courbure de $\Sigma$ au point M (BB, 1889, (3), XIX, p. 232).

## Question 1069.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VI, p. 128).

***Quelle relation doit-il exister entre deux circonférences pour que les deux centres soient les deux foyers de la courbe polaire réciproque de l'une des circonférences par rapport à l'autre?*** (Droz Farny.)

***Solution analytique*** par MM. E. Colart, Déprez, Andrien et Barisien. Soient les deux cercles C et C′ de rayons R et R′. La polaire réciproque de C par rapport à C′ est une conique, ayant C′ pour foyer et pour directrice correspondante la polaire du centre C, et dont l'excentricité est égale à $(R : d)$, $d$ étant la distance des centres.

Si l'on prend le milieu de CC′ pour origine des axes coordonnés, l'équation de cette conique est

$$4R^2y^2 - 4(d^2 - R^2)x^2 + 4d(d^2 - R^2 - 2R'^2)x - (d^2 - 2R'^2)^2 + d^2R^2 = 0.$$

Pour que le centre C soit le second foyer de cette courbe, il faut qu'il soit à l'origine, c'est-à-dire que l'on ait

$$d^2 = R^2 + 2R'^2. \qquad (1)$$

Cette condition entraîne les inégalités $d > R$, $d > R'$; le centre de chaque cercle est donc extérieur à l'autre cercle. D'ailleurs, de (1) on tire

$$R'^2 = \tfrac{1}{2}(d^2 - R^2);$$

donc le rayon R′ est le côté du carré ayant pour diagonale la tangente menée du centre C′ au cercle C.

Ces conditions étant réalisées, la polaire réciproque du cercle C′ par rapport au cercle C est une hyperbole ayant pour équation

$$2R^2y^2 - 4R'^2x^2 = -R^2R'^2;$$

les axes de cette hyperbole sont donc égaux à

$$R \text{ et } R'\sqrt{2} = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

Remarque. Pour que la polaire réciproque de C′ par rapport à C ait ses deux foyers en C′ et C, on doit avoir

$$d^2 = R'^2 + 2R^2. \qquad (2)$$

Si les conditions (1) et (2) existent simultanément, on a

$$R = R' = \frac{D}{\sqrt{3}}. \qquad (3)$$

M. Déprez a également donné une solution géométrique de la question 1066. La solution de M. Retali que nous donnons ci-après se rapporte aux relations (3).

*Solution par* M. V. Retali. Les deux cercles sont égaux et se coupent sous l'angle de 60°; la distance de leurs centres est $r\sqrt{3}$ (*).

Si la polaire réciproque d'un cercle $C^2$ par rapport à $C'^2$ est aussi la polaire réciproque de $C'^2$ par rapport à $C^2$, nous savons que $C^2$ et $C'^2$ se coupent en 4 points qui forment un groupe équianharmonique sur les deux courbes (**). Soient I, J les points cycliques et A, B les deux points propres communs à $C^2$ et $C'^2$ : les faisceaux A(TBIJ), A(T'BIJ) sont équianharmoniques, AT et AT' étant les tangentes en A aux deux cercles. Il s'ensuit que *angle* TAB = T'AB = 30° (***). Les deux cercles $C^2$, $C'^2$ sont donc égaux et se coupent sous l'angle de 60°.

Lorsque deux coniques forment un couple équianharmonique, le covariant et le contrevariant fondamentaux de leur système coïncident avec la polaire réciproque de l'une par rapport à l'autre : cette polaire réciproque est donc une hyperbole touchant les tangentes menées aux deux cercles en A et B, *ayant pour foyers les centres des deux cercles*, et passant par les points de contact des deux cercles avec leurs tangentes communes.

---

### ×Question 1230.

(Voir *Mathesis* (2) t. IX, p. 176).

*Soient a, b, c, d,* Q *les côtés et la surface d'un quadrilatère convexe* ABCD, *inscrit à un cercle*; T *la surface du triangle qui a pour sommets les points de concours* E, F, G *des côtés opposés et des diagonales*; $T_1$ *la surface du triangle dont les côtés sont dirigés suivant les lignes* AC, BD, EF. *Démontrer les formules*

$$\frac{T}{Q} = \frac{2abcd}{(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)}, \qquad \frac{T_1}{Q} = \frac{4a^2b^2c^2d^2}{(a^2b^2 - c^2d^2)(a^2d^2 - b^2c^2)}.$$

(J. Neuberg.)

---

(*) Voir Retali, *Sopra alcuni gruppi di coniche*, Progréso Mat., T. IV, page 103.

(**) Loc. cit., page 22-23.

(***) Voir *Mathesis*, (1). IX; page 128.

*Solution par* M. Emmerich. 1° Faisons

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = m, \quad BD = n,$$

et désignons par E le point de rencontre des côtés $a$, $c$ et par F celui des côtés $b$, $d$; le point D est supposé à l'intérieur du triangle EBF.

On a

$$T = EDF + EDG + FDG.$$

Les triangles EDF, EDG, FDG ont, avec le triangle ABC, un angle supplémentaire respectivement en D et B, D et A, D et C. Il en résulte

$$\frac{EDF}{ABC} = \frac{ED.FD}{ab}, \quad \frac{EDG}{ABC} = \frac{ED.GD}{am}, \quad \frac{FDG}{ABC} = \frac{FD.GD}{bm}. \qquad (1)$$

Les triangles ADB, ACB sont entre eux comme les produits $dn$, $bm$ et aussi comme les hauteurs tombant sur AB ou comme ED : EC; on en conclut

$$\frac{ED}{EC} = \frac{dn}{bm} = \frac{d(ab+cd)}{b(ad+bc)}, \quad \frac{ED}{EC - ED} = \frac{d(ab+cd)}{c(b^2-d^2)},$$

$$ED = \frac{d(ab+cd)}{b^2-d^2}.$$

De même,

$$FD = \frac{c(ab+cd)}{a^2-c^2}, \quad DG = \frac{cdn}{ab+cd}.$$

Les égalités (1) prennent maintenant la forme

$$\frac{EDF}{ABC} = \frac{cd(ab+cd)^2}{ab(a^2-c^2)(b^2-d^2)},$$

$$\frac{EDG}{ABC} = \frac{cd^2}{a(b^2-d^2)} \cdot \frac{n}{m}, \quad \frac{FDG}{ABC} = \frac{c^2d}{b(a^2-c^2)} \cdot \frac{n}{m}.$$

Les deux dernières relations donnent

$$\frac{EDG + FDG}{ABC} = \frac{cd(ad+bc)(ab-cd)}{ab(b^2-d^2)(a^2-c^2)} \cdot \frac{n}{m} = \frac{cd(ab+cd)(ab-cd)}{ab(b^2-d^2)(a^2-c^2)};$$

par conséquent,

$$\frac{T}{ABC} = \frac{2cd(ab+cd)}{(b^2-d^2)(a^2-c^2)}. \qquad (2)$$

Mais on a aussi

$$\frac{ABC}{DAC}=\frac{ab}{cd},\quad \text{d'où}\quad \frac{ABC}{Q}=\frac{ab}{ab+cd};\tag{3}$$

en combinant (2) et (3) on trouve

$$\frac{T}{Q}=\frac{2abcd}{(b^2-d^2)(a^2-c^2)}.$$

2° Appelons H, I les points de rencontre de EF avec AC, BD. On a

$$\frac{T_1}{Q}=\frac{GH.GI}{mn}.\tag{4}$$

Or

$$\frac{DG}{GB}=\frac{ID}{IB}=\frac{cd}{ab},$$

d'où

$$DG=\frac{cdn}{ab+cd},\quad ID=\frac{cdn}{ab-cd},\quad IG=\frac{2abcdn}{a^2b^2-c^2d^2};$$

par analogie,

$$GH=\frac{2abcdm}{a^2d^2-b^2c^2}.$$

Substituons les valeurs de IG et GH dans l'égalité (4), etc.

MM. Dépresz et Plakhovo ont résolu la même question.

Les points E, F, G étant situés sur les trois côtés du triangle ABC, une proposition connue donne immédiatement

$$\frac{EFG}{ABC}=\frac{AE.BF.CG-BE.CF.AG}{AB.BC.CA},$$

où il faut observer la règle des signes.

Supposons le quadrilatère ABCD quelconque, et désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC ; nous aurons

$$\frac{AE}{\beta}=\frac{BE}{\alpha}=\frac{AB}{\alpha-\beta},\quad \frac{CF}{\beta}=\frac{BF}{\gamma}=\frac{BC}{\gamma-\beta},\quad \frac{CG}{\alpha}=\frac{GA}{\gamma}=\frac{CA}{\alpha+\gamma}.$$

Par conséquent

$$\frac{EFG}{ABC}=\frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)},$$

ou

$$T.Q=\frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)},\tag{5}$$

En combinant cette relation avec les égalités

$$\frac{\alpha}{Q}=\frac{bc}{ad+bc},\quad \frac{\beta}{Q}=\frac{cd}{ab+cd},\ldots$$

on retrouve la première des formules proposées.

Voici une démonstration analytique de la formule (5). Soient $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$ les coordonnées rectangulaires des points A, B, C, D. On peut toujours poser

$$x_4 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_4 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

ou plus symétriquement

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 &= 0, \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Ce système homogène en $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ montre qu'on peut prendre pour $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ les valeurs $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent comme ci-dessus les aires BCD, CDA, DAB, ABC.

Des formules (6), on déduit

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_3 + m_4}, \quad \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_3 + m_4}$$

les premiers membres représentent les coordonnées d'un certain point de la droite AB, et les seconds celles d'un point de la droite CA; par suite, on a pour chacune des coordonnées du point E deux expressions. On trouvera de la même manière des expressions pour les coordonnées des points F et G.

Si l'on désigne le produit $(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)(m_1 + m_4)$ par $\mu$, on pourra écrire

$$2\mu T = \begin{vmatrix} m_1 x_1 + m_2 x_2 & m_1 y_1 + m_2 y_2 & m_1 + m_2 \\ m_1 x_1 + m_3 x_3 & m_1 y_1 + m_3 y_3 & m_1 + m_3 \\ m_1 x_1 + m_4 x_4 & m_1 y_1 + m_4 y_4 & m_1 + m_4 \end{vmatrix}.$$

En introduisant à gauche la colonne 1, 1, 1, puis en haut la ligne $-1, 1, 1, 1$, on trouve aisément

$$\frac{2\mu T}{m_1 m_2 m_3 m_4} = \begin{vmatrix} -m_1^{-1} & x_1 & y_1 & 1, \\ m_2^{-1} & x_2 & y_2 & 1 \\ m_3^{-1} & x_3 & y_3 & 1 \\ m_4^{-1} & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Enfin, en remarquant que les mineurs relatifs à la première colonne sont égaux à $2\alpha, -2\beta, 2\gamma, -2\delta$, on obtient (J. N.)

$$T = -\frac{2 m_1 m_2 m_3 m_4}{\mu}.$$

---

## ×Question 1236.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 216).

***Si dans un triangle, la droite d'Euler est parallèle à un des côtés, le triangle orthique a ses côtés en progression arithmétique.*** (Droz Farny.)

***Solution par*** M. J. Déprez. Soient A', B', C', les pieds des hauteurs

du triangle ABC; supposons que la droite d'Euler du triangle soit parallèlle au côté BC. On a $AH = 2R \cos A$, et l'angle $AOH = B - C$, d'où la relation $\cos (B - C) = 2 \cos A$.

On a aussi

$$B'C' = R \sin 2A,\ C'A' = R \sin 2B,\ A'B' = R \sin 2C;$$

dès lors,

$$A'C' + B'A' = 2R \sin A \cos (A - C),$$

et comme

$$\cos (B - C) = 2 \cos A,$$

on a

$$A'C' + B'A' = 2R \sin 2A = 2C'B'.$$

Remarques : I. *L'axe orthique du triangle* ABC *est perpendiculaire au côté* BC.

II. D *étant le point de rencontre de* AA′ *avec* B′C′, *on a* :

$$B'D = \tfrac{1}{2} A'B',\quad DC' = \tfrac{1}{2} A'C'.$$

*Le point* D *est au milieu de* AA′.

III. *On a aussi* : $AA'^2 = 3\, A'C' \times A'B'$.

IV. *Le rayon du cercle inscrit dans le triangle* A′B′C′ *vaut le tiers de la hauteur issue de* A′ *dans le même triangle.*

V. O, H, $O_9$ *étant respectivement le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC, *l'orthocentre et le centre du cercle des neuf points du même triangle, on a :*

$$AOB + AOC = 2\,BOC,\quad AHB + AHC = 2\,BHC,$$
$$AO_9B + AO_9C = 2\,BO_9C.$$

VI. *Si* $H_o$ *est le réciproque de l'orthocentre du triangle* ABC, *on a* :

$$\frac{1}{AH_oB} + \frac{1}{AH_oC} = \frac{2}{BH_oC}$$

VII. *Les angles du triangle* ABC *satisfont aux relations suivantes :*

$$\cos (B - C) = 2 \cos A;\quad 2 \cos B \cos C = \cos A;$$
$$2 \sin B \sin C = 3 \cos A;\quad \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 3;\quad \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2 \operatorname{tg} A;$$
$$\sin 2B + \sin 2C = 2 \sin 2A.$$

M.M. Emmerich, Soons, Lemoine et Delahaye ont résolu la même question.

## *QUESTIONS D'EXAMEN.

**235.** D'un point donné P on mène deux tangentes $p_1$, $p_2$ à une ellipse donnée; soient $q_1$, $q_2$ les tangentes menées d'un second point Q. Le lieu d'un point Q tel que les droites $p_1$, $q_1$, $p_2$, $q_2$ soient les côtés d'un quadrilatère inscriptible à un cercle est une hyperbole équilatère passant par P et par les quatre foyers, réels ou imaginaires, de l'ellipse donnée.

(MALO.)

Si l'on prend l'équation d'une tangente sous la forme $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$, les coefficients angulaires $(m_1, m_2)$ des tangentes issues du point P $(\alpha, \beta)$ sont racines de

$$m^2(\alpha^2 - a^2) - 2m\alpha\beta + \beta^2 - b^2 = 0,$$

et les coefficients $(n_1, n_2)$ des tangentes menées du point Q $(x, y)$ sont racines de

$$n^2(x^2 - a^2) - 2nxy + y^2 - b^2 = 0.$$

La condition du problème donne

$$\frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2} = \frac{n_1 + n_2}{1 - n_1 n_2}, \text{ etc.}$$

**236.** Démontrer que la relation

$$\frac{a^2 - bc}{a} + \frac{b^2 - ca}{b} + \frac{c^2 - ab}{c} = 0$$

entraîne la suivante

$$\frac{a}{a^2 - bc} + \frac{b}{b^2 - ca} + \frac{c}{c^2 - ab} = 0. \qquad \text{(NANSON.)}$$

Cela revient à dire que si l'on chasse les dénominateurs, le premier membre de la seconde équation est divisible par celui de la première équation.

**237.** Les circonférences décrites sur les côtés BC, CB, AB d'un triangle acutangle ABC comme diamètres rencontrent respectivement les hauteurs AA′, BB′, CC′ aux points $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$, $(C_1, C_2)$. Démontrer que les quadrilatères $B_1C_1B_2C_2$, $C_1A_1C_2A_2$, $A_1B_1A_2B_2$ sont inscriptibles, les centres des circonférences circonscrites étant respectivement A, B, C. Les rayons de ces cercles sont égaux à

$$\sqrt{bc\cos A}, \quad \sqrt{ca\cos B}, \quad \sqrt{ab\cos C};$$

H en est le centre radical et sa puissance par rapport aux trois cercles est égale à

$$4R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Les surfaces des quadrilatères $B_1C_1B_2C_2$, $C_1A_1C_2A_2$, $A_1B_1A_2B_2$ ont pour expressions

$$4R^2 \sin^2 A \cos A \sqrt{\sin 2B \sin 2C}, \qquad \text{(A. C.)}$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1261.** Soient $l$, $m$, $n$ les projections d'une longueur donnée MM' sur les trois côtés d'un triangle ABC. Quelle orientation faut-il donner à MM' pour que $mn + nl + lm$ soit maximum ou minimum? (E. Lemoine).

**1262.** On considère un cercle O, un diamètre fixe AB de ce cercle, et un cercle O' tangent intérieurement au cercle O en A. Soit PQ une corde variable du cercle O qui est tangente au cercle O'. Montrer que :

1° Les lieux du centre de gravité et de l'orthocentre des triangles APQ et BPQ sont des limaçons de Pascal.

2° Le lieu du centre du cercle inscrit au triangle APQ est un cercle.

3° Trouver le lieu des centres des cercles exinscrits au triangle APQ.

(E. N. Barisien.)

**1263.** Démontrer la formule :

$$1 + C_{m-1,1} + C_{m-2,2} + C_{m-3,3} + \cdots = u_{m+1}$$

$C_{m,n}$ désigne le nombre des combinaisons de $m$ objets, $n$ à $n$; le dernier terme du premier membre est $C_{\frac{1}{2}(m+1),\frac{1}{2}(m-1)}$ ou $C_{\frac{1}{2}m,\frac{1}{2}m}$, suivant que $m$ est impair ou pair; $u_m$ est le $(m+1)^e$ terme de la suite de Fibonacci, où $u_0 = 0$, $u_1 = 1$. (Boutin.)

**1264.** Les symétriques des côtés AB, BC, CA d'un triangle respectivement par rapport aux côtés BC, CA, AB forment un nouveau triangle A'B'C'. Si R, R' désignent les rayons des cercles circonscrits aux deux triangles ABC, A'B'C', démontrer que

$$\frac{R'}{R} = \frac{\sin A \sin B \sin C + \sin 2A \sin 2B \sin 2C}{\sin A' \sin B' \sin C'}.$$

Les triangles ABC, A'B'C' ne sont homologiques que lorsqu'ils sont équilatéraux. (J. Neuberg).

---

## *SUR LA REPRÉSENTATION PROPORTIONNELLE;

par M. J. Wasteels, professeur à l'Athénée royal de Gand.

1. Soient $a$, $b$, $c$, etc. les chiffres électoraux des différentes listes, c'est-à-dire les nombres de bulletins valables favorables à chacune d'elles; soit $n$ le nombre de siéges à répartir entre ces listes.

Pour faire le partage des siéges d'après la loi belge, on considère les séries de nombres

$$a,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{3},\ \ldots\ldots\ldots \tag{1}$$

$$b,\ \frac{b}{2},\ \frac{b}{3},\ \ldots\ldots\ldots \tag{2}$$

$$c,\ \frac{c}{2},\ \frac{c}{3},\ \ldots\ldots\ldots \tag{3}$$

. . . . . .

et l'on compose une suite de $n$ termes en prenant les $n$ nombres les plus grands parmi ceux des séries (1), (2), (3),... Soient $\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r}, \ldots$ les derniers nombres des séries (1), (2), (3),... qu'il a fallu employer. Alors, $p$ siéges reviennent à la 1re liste, $q$ à la 2e, $r$ à la 3e, etc.

Il peut arriver qu'en rangeant par ordre de valeurs décroissantes les termes des séries (1), (2), (3), etc., après avoir écrit $(n - t)$ termes, il y ait, parmi ceux qui restent, plus de $t$ termes de même valeur, de sorte qu'il y ait du doute au sujet des $t$ derniers termes à prendre. La loi indique la règle d'après laquelle on détermine alors ces $t$ termes.

2. Nous nous proposons d'étudier la signification des nombres $p, q, r, \ldots\ldots$ de siéges qui reviennent à chaque liste.

3. Considérons d'abord le cas où il existe dans les séries (1), (2), (3),... $n$ termes plus grands que tous les autres termes.

Alors, $\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r}, \ldots$ étant les derniers termes de ces séries qu'il faut employer, on a les inégalités :

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{a}{p} > \frac{b}{q+1}, & \frac{a}{p} > \frac{c}{r+1}, & \ldots\ldots \\ \frac{b}{q} > \frac{a}{p+1}, & \frac{b}{q} > \frac{c}{r+1}, & \ldots\ldots \\ \frac{c}{r} > \frac{a}{p+1}, & \frac{c}{r} > \frac{b}{q+1}, & \ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{4}$$

. . . . . .

Prenons le terme général du développement de $(a+b+c+\cdots)^n$. Ce terme est

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma \ldots} . a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots,$$

avec la condition $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n$.

Cherchons les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ pour lesquelles ce terme est maximum; ces valeurs sont les mêmes que celles qui rendent maximum le produit

$$\frac{a^\alpha}{P_\alpha} \times \frac{b^\beta}{P_\beta} \times \frac{c^\gamma}{P_\gamma} \times \cdots$$

ou bien

$$\frac{a}{1}\times\frac{a}{2}\times\cdots\times\frac{a}{\alpha}\times\frac{b}{1}\times\frac{b}{2}\times\cdots\times\frac{b}{\beta}\times\frac{c}{1}\times\frac{c}{2}\times\cdots\times\frac{c}{\gamma}\times\cdots \quad (5)$$

Or, ce dernier produit est le plus grand possible, si $\alpha=p, \beta=q, \gamma=r, \ldots$

En effet, pour passer du produit

$$\frac{a}{1}\times\frac{a}{2}\times\cdots\times\frac{a}{p}\times\frac{b}{1}\times\frac{b}{2}\times\cdots\times\frac{b}{q}\times\frac{c}{1}\times\frac{c}{2}\times\cdots\times\frac{c}{r}\times\cdots \quad (6)$$

à l'un des autres produits représentés par l'expression (5), il faut supprimer certains facteurs et introduire un même nombre d'autres facteurs, par exemple, supprimer $\frac{a}{p}$ ou $\frac{a}{p}$ et $\frac{a}{p-1}$ et introduire $\frac{b}{q+1}$ ou $\frac{b}{q+1}$ et $\frac{c}{r+1}$; mais d'après les inégalités (4), les facteurs supprimés seront plus grands que ceux que l'on introduit, de sorte que le nouveau produit sera plus petit que (6).

Il résulte de ce qui précède que $\frac{P_n}{P_p . P_q . P_r \ldots} a^p b^q c^r \ldots$ est le terme le plus grand du développement de $(a+b+c+\cdots)^n$.

4. Supposons que les listes en présence représentent tous les partis de la circonscription électorale et que les nombres d'adhérents de chaque parti soient proportionnels aux chiffres électoraux $a, b, c, \ldots$

Alors,

$$\frac{a}{a+b+c+\cdots}=A, \quad \frac{b}{a+b+c+\cdots}=B, \quad \frac{c}{a+b+c+\cdots}=C, \text{ etc.},$$

expriment les probabilités qu'en prenant au hasard un habitant de la circonscription électorale, ce sera un partisan de la 1re liste, de la 2e, de la 3e, etc.

Cherchons maintenant la probabilité qu'en prenant au hasard $n$ habitants de la circonscription électorale pour composer la députation, il s'en trouve $\alpha$ partisans de la 1re liste, $\beta$ partisans de la 2e, $\gamma$ partisans de la 3e, etc. Nous trouvons

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma \dots} \cdot A^\alpha . B^\beta . C^\gamma \dots = \frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma \dots} \times \frac{a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \dots}{(a+b+c+\dots)^n}.$$

Cette probabilité est donc la plus grande possible, si $\alpha = p$, $\beta = q$, $\gamma = r \dots$.

Donc, en prenant de toutes les manières une députation de $n$ habitants et en cherchant chaque fois de combien d'adhérents de chaque parti elle est composée, on voit que la députation que l'on rencontrera le plus souvent sera celle dans laquelle il y a $p$ partisans de la 1re liste, $q$ de la 2e liste, $r$ de la 3e, etc.

5. Considérons maintenant le cas où il est impossible de trouver dans les séries (1), (2), (3), ... $n$ termes plus grands que tous les autres.

Supposons, par exemple, que $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ et qu'il y a dans les séries (1), (2), (3) ... $n-2$ termes plus grands que $\frac{a}{p}$.

Soient $\frac{a}{p}$ et $\frac{b}{q}$ les termes qu'il faut y ajouter pour avoir les $n$ termes voulus, de sorte que les termes des séries (1), (2), (3) ... qu'il faut employer sont

$$a, \quad \frac{a}{2}, \quad \dots \quad \frac{a}{p}$$

$$b, \quad \frac{b}{2}, \quad \dots \quad \frac{b}{q}$$

$$c, \quad \frac{c}{2}, \quad \dots \quad \frac{c}{r-1}.$$

Dans ce cas, on trouverait, en raisonnant comme précédemment, que

dans le développement de $(a+b+c+\cdots)^n$, il y a 3 termes égaux :

$$\frac{P_n}{P_p \cdot P_q \cdot P_{r-1} \cdots} a^p \cdot b^q \cdot c^{r-1} \cdots, \quad \frac{P_n}{P_{p-1} \cdot P_q \cdot P_r \cdots} a^{p-1} \cdot b^q \cdot c^r \cdots,$$

$$\frac{P_n}{P_p \cdot P_{q-1} \cdot P_r \cdots} a^p \cdot b^{q-1} \cdot c^r \cdots,$$

plus grands que tous les autres termes.

Considérons maintenant la probabilité qu'en prenant au hasard $n$ habitants de la circonscription électorale, il se trouve $\alpha$ partisans de la 1e liste, $\beta$ partisans de la 2e, $\gamma$ partisans de la 3e, etc. On voit qu'elle est la même pour chacun des 3 systèmes :

$$\begin{array}{llll} \alpha = p, & \beta = q, & \gamma = r-1, & \cdots \\ \alpha = p-1, & \beta = q, & \gamma = r, & \cdots \\ \alpha = p, & \beta = q-1, & \gamma = r, & \cdots, \end{array}$$

mais qu'elle est plus petite pour tous les autres systèmes de valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Donc, la députation formée de $p$ adhérents de la 1e liste, $q$ de la 2e, $r-1$ de la 3e, etc. est encore telle qu'il n'en existe pas que l'on rencontre *plus souvent*, en prenant au hasard $n$ habitants de la circonscription; mais il en existe 2 autres que l'on rencontre *aussi souvent*.

En général, s'il y a T fractions égales à $\frac{a}{p}$ et s'il ne faut en prendre que $t$, il y a $C_{T,t} = \frac{T(T-1)(T-2)\ldots(T-t+1)}{1.2.3\ldots t}$ députations pour lesquelles la probabilité est la même et plus grande que pour les autres députations.

---

## SUR LES TRIANGLES QUI SONT INSCRITS DANS UNE ELLIPSE ET CIRCONSCRITS A UN CERCLE CONCENTRIQUE ;

par M. E. Barbier.

(Suite, voir *Mathesis*, (2), IX, p. 269).

**46.** Lieu de l'orthocentre du triangle ABC. L'aire de ce lieu est l'expression U de (42), dans laquelle

$$A = bc^2 + ab^2 - R(a^2+b^2), \quad B = -bc^2,$$
$$A' = ac^2 + a^2b - R(a^2+b^2), \quad B' = ac^2.$$

**47.** Aire du lieu du centre de gravité du triangle $\alpha BC$,

$$U = \frac{\pi ab}{3} + \frac{4}{9}\frac{\pi a^2 b^2}{(a+b)^2}.$$

**48.** Aire du lieu du centre du cercle circonscrit au triangle $\alpha BC$ : $U = \frac{1}{4}\pi(a-b)^2$.

On pourrait de même trouver l'aire du lieu de l'orthocentre du triangle $\alpha BC$ et celle du lieu des centres des cercles des neuf points des triangles $\alpha BC$ et ABC.

**49.** Aire du lieu du point milieu de la droite joignant les centres $\omega$ et $\omega'$ des cercles circonscrits à chacun des triangles ABC et $\alpha BC$ : $U = \frac{\pi c^4}{8ab}$.

L'aire est le tiers de l'aire de la développée de E.

**50.** On prend le symétrique $\omega_1$ du point $\omega$ par rapport à O. Le lieu du milieu de la droite $\omega_1\omega'$ est la courbe :

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = \frac{c^4R^2}{4}(x^2+y^2); \quad U = \frac{\pi(a^2+b^2)(a-b)^2}{8ab}.$$

**51.** Aire du lieu du centre de gravité du triangle A'B'C' :

$$U = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

**52.** Aire du lieu de l'orthocentre du triangle A'B'C' :

$$U = 3\pi R^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

**53.** Aire du lieu du centre du cercle des neuf points du triangle A'B'C' :

$$U = \frac{3\pi R^2}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

**54.** Lieu du centre du cercle exinscrit au triangle ABC :

$$(x^2+y^2)^2 = 4(b^2x^2 + a^2y^2), \quad U = 2\pi(a^2+b^2).$$

**55.** Lieu du milieu des droites AA''', BB''', CC''' : $b^6x^2 + a^6y^2 = \frac{1}{4}a^4b^4$.

**56.** La droite qui joint le point A au symétrique de A''', par rapport à O, est normale à l'ellipse,

$$\frac{x^2}{b^6} + \frac{y^2}{a^6} = \frac{a^2b^2c^4}{(a^6-b^6)^2}.$$

**57.** Les droites AA''', BB''', CC''' sont normales à une même ellipse.

**58.** Les pieds et les milieux des hauteurs du triangle A'''B'''C'''; les points d'intersection des couples de droites (AA''', BC), (AA''', B'C'), (AA', B'C'), (AA'', B'C'), (AA'', BC); le point de rencontre de B'C' avec la hauteur du triangle ABC issue de A ont des coordonnées de la forme

$$x = \frac{A\cos\varphi + B\cos^3\varphi}{A_1^2\cos^2\varphi + B_1^2\sin^2\varphi}, \quad y = \frac{A'\sin\varphi + B'\sin^3\varphi}{A_1^2\cos^2\varphi + B_1^2\sin^2\varphi}.$$

Ces points décrivent des courbes unicursales fermées dont l'aire a pour expression

$$\frac{\pi}{2}\left[AA'\frac{(A_1^2+B_1^2)}{A_1^3B_1^3} + \frac{3(AB'+BA'+BB')}{A_1B_1(A_1+B_1)^2} + \frac{BA'(2A_1+B_1)}{A_1^3(A_1+B_1)^2} + \frac{AB'(2B_1+A_1)}{B_1^3(A_1+B_1)^2}\right]$$

**59.** Les hauteurs du triangle A'''B'''C''' sont normales à l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = (a^2+ab+b^2)^2.$$

**60.** Le lieu du point de rencontre de OA avec la hauteur du triangle A'''B'''C''' partant de A''', est l'ellipse précédente.

**61.** Lieu du point de rencontre de OA et BC :

$$(bx^2+ay^2)^2 = R^2(b^2x^2+a^2y^2); \quad U = \frac{\pi R\sqrt{ab}}{2}.$$

**62.** Lieu du point de rencontre de OA' avec la hauteur du triangle A'''B'''C''' partant de A''' :

$$x^2+y^2 = (a^2+b^2+ab)^2\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}.$$

**63.** Lieu du point de rencontre de OA' et BC' :

$$(ax^2+by^2)^2 = R^4(x^2+y^2), \quad U = \frac{\pi R^5}{2\sqrt{ab}}.$$

**64.** Aire de l'enveloppe de la parallèle à B'''C''' menée par A''' :

$$U = \pi(a+b)^2 - \frac{\pi c^4}{8ab}.$$

---

## *NOTES MATHÉMATIQUES.

***8.** *Sur les problèmes de maximum et de minimum.* De l'identité

$$xy = (x+y)^2 - (x-y)^2,$$

on conclut ordinairement que *le produit de deux facteurs variables dont la somme est constante, est maximum lorsque ces facteurs sont égaux.*

Cependant, si l'égalité des facteurs est impossible, le maximum du produit a lieu lorsque la différence des facteurs est minimum.

Voici un exemple de cette remarque; nous l'empruntons au n° du 1er janvier 1900 du *Journal de Vuibert*. *Étant donnée une corde* AB *d'une circonférence* O, *mener un diamètre* CD *qui soit divisé par la corde* AB *en deux parties* CE, ED *dont le produit soit maximum*. Si le diamètre CD passe à l'intérieur de l'angle AOB, la somme CE + ED = 2R et le maximum du produit CE . ED a lieu lorsque CD est perpendiculaire à AB; car alors la différence CE — ED devient minimum. Si le diamètre CD ne passe pas à l'intérieur de l'angle AOB, la différence des segments CE, ED est constante et le produit CE . ED devient infini lorsque le diamètre est parallèle à AB.

Comment varie le produit CE. ED lorsque AB est remplacé par une droite qui ne coupe pas la circonférence?

×9. *Sur la question d'examen*, 934 (*Mathesis*, février 1900, p. 55). « *On a la relation* $a\gamma + c\alpha = b\delta + d\beta$ *entre les côtés* $a =$ AB, $b =$ BC, $c =$ CD, $d =$ DA *d'un quadrilatère inscriptible et les perpendiculaires* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *abaissées d'un point intérieur sur ces côtés.* » Soient E le point de rencontre des côtés $b$, $d$ et F celui des côtés $a$, $c$; on suppose que CD passe entre AB et E, et BC entre AD et F. Construisons le parallélogramme BCDP, et appelons G, H les points de rencontre de DP avec AB et de BP avec AD; enfin menons les droites HG, AP.

Je dis d'abord que les droites HG et EF sont parallèles. En effet, les couples de parallèles DG et EB, HB et DF donnent

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AB}{AF}, \quad \frac{AG}{AB} = \frac{AD}{AE};$$

d'où AD. AB = AH. AF = AG. AE.

Cela posé, prenons respectivement sur EB, EA, FB, FC les longueurs EX = $d$, EY = $b$, FZ = $c$, FU = $a$. Les triangles EYX et DPA, FZU et BPA seront égaux; par suite, YX = AP = UZ, angle EYX = DPA, angle FZU = BPA. Mais le quadrilatère ABCD étant inscriptible, il en est de même du quadrilatère AGPH; donc

*angle* EYX = DPA = DHG, *angle* FZU = BPA = BGH;

et par conséquent YX et UZ sont parallèles à HG et à EF.

Donc si M est un point quelconque du plan ABCD, les quadrilatères MXEY, MZFU sont équivalents, comme composés de triangles ayant des

bases égales YX = UZ et même somme des hauteurs correspondantes. En décomposant ces quadrilatères en triangles au moyen des diagonales ME, MF, on trouve la relation proposée : $a\gamma + c\alpha = b\delta + d\beta$. (A.C).

Pour une autre démonstration, voir *Journal de Vuibert*, décembre 1899.

×10. *Sur l'hexagone de* PASCAL. Soient A, B', C, A', B, C' les sommets consécutifs d'un hexagone quelconque inscrit à une circonférence, et appelons $A_1$, $B_1$, $C_1$ les points de concours des couples de côtés opposés B'C et BC', CA' et C'A, A'B et AB'. Alors les circonférences circonscrites aux triangles $A_1BC$, $B_1CA$, $C_1AB$ concourent en un même point D, et ce point est situé à la fois sur les droites $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ ; donc les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ sont en ligne droite.

Cette démonstration ne s'appuie que sur les deux premiers livres de Legendre.

Semblablement, les circonférences $A_1B'C'$, $B_1C'A'$, $C_1A'B'$ concourent en un même point D'. Les points D, D' sont équidistants du centre de la circonférence ABC. (L. GÉRARD, *Bull. de Math. él.*, 2e année. p. 264).

Cette figure jouit probablement d'autres propriétés assez curieuses, se rapportant aux centres des six circonférences $A_1BC_1$, ..., aux secondes intersections des circonférences $A_1BC$ et $A_1B'C'$... Il y a là un *sujet d'étude* très intéressant. (J. N.).

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften**, herausgegeben von H. BURKHARDT und W. F. MEYER. Band I, Heft III (pp. 225-352), Heft IV (353-512). Band II, Heft I (pp. 1-160). Leipzig, Teubner, 1899. Prix : 3 marcs 80, 4 mars 80, 4 marcs 80.

Voici l'indication des sujets traités dans ces trois livraisons de l'Encyclopédie, publiées respectivement en septembre, octobre et août 1899.

I. *Fonctions rationnelles d'une variable; leurs zéros*, par E. NETTO, professeur à l'Université de Giessen. Cette section contient les formules d'interpolation, le calcul des différences, le théorème : *toute équation algébrique a une racine* et ses conséquences immédiates, la théorie du plus grand commun diviseur; propriétés des résultants et discriminants.

*Fonctions rationnelles de plusieurs variables* par E. NETTO. Théorie de l'élimination; éliminants, résultants, jacobiens, hessiens.

*Théorie arithmétique des grandeurs algébriques; figures algébriques*, par G. LANDSBERG, privat-docent à l'Université de Heidelberg. Résumé des difficiles recherches de Kronecker, Weber, Dedekind, Hilbert, Weierstrass, etc.

*Invariantologie*, par W. Fr. MEYER, professeur à l'Université de Königsberg. L'auteur, à qui l'on doit une histoire de l'invariantologie, est parvenu à condenser une matière immense en 84 pages, sous les titres suivants : Préliminaires; équivalence des formes; formes apparentées; procédés invariantifs; extension, groupes spéciaux, formes spéciales.

*Séparation et approximation des racines des équations*, par C. RUNGE, professeur à l'Ecole technique de Hanovre.

*Fonctions rationnelles des racines; fonctions symétriques, etc.*, par K. TH. VAHLEN.

*Théorie de Galois et applications*, par C. HÖLDER, professeur à l'Université de Leipzig. Théorie des groupes; résolubilité des équations (la fin paraîtra dans la livraison suivante).

II. *Principes de la théorie générale des fonctions*, par A. PRINGSHEIM, professeur à l'Université de Munich. Résumé des recherches les plus minutieuses des géomètres sur les limites, la continuité, la discontinuité, les singularités des fonctions.

*Calcul différentiel et calcul intégral*, par M. A. VOSS, professeur à l'Université de Würzbourg. Calcul différentiel avec les applications analytiques ordinaires : théorème de Taylor, maxima et minima, les cas difficiles étant examinés avec grand soin. Calcul intégral; premiers principes; étude des relations des limites de sommes simples ou multiples avec les intégrales définies (inverses de dérivées); méthode de Gauss et autres méthodes analogues ou élémentaires pour l'approximation des intégrales définies; planimètres et intégraphes.

*Intégrales définies*, par M. G. BRUNEL, professeur à l'Université de Bordeaux. Préliminaires. Condition pour qu'une intégrale définie soit bien déterminée. Intégration des séries. Intégrales multiples. Détermination des intégrales définies. Premiers principes de la théorie de la fonction gamma (la seconde moitié de cette section sera publiée dans la livraison suivante).

Dans ces trois livraisons comme dans les précédentes, la bibliographie la plus riche, en tête de chaque section et surtout dans les notes au bas des pages donne au lecteur tous les renseignements historiques nécessaires ou utiles, pour étudier à fond, s'il le désire, les théories résumées dans le texte. (P. M.)

---

**Premiers principes de Géométrie moderne** à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l'agrégation par E. DUPORCQ, ancien élève de l'Ecole polytechnique. Paris, Gauthier-Villars, 1899. Un vol. de VII-160 pages in-8°. Prix : 3 fr.

Cet ouvrage, sans avoir la prétention d'être un traité complet, est très propre à familiariser les élèves de nos Ecoles spéciales et de la candidature en sciences physiques et mathématiques avec les méthodes rapides de la Géométrie moderne. Il complète souvent les cours de géométrie élémentaire et de géométrie analyti-

que en faisant connaître aux lecteurs des démonstrations simples de ces propositions intéressantes, *plus souvent citées que démontrées*, et il a le grand avantage de leur ouvrir des horizons nouveaux.

Voici un sommaire des matières traitées dans les six chapitres qui composent le livre : I. Emploi des imaginaires. Caractère analytique de la Géométrie moderne par suite de cet emploi. Premières notions sur les transformations. II. Divisions et faisceaux homographiques. Involution. Génération des courbes et des surfaces du second degré. Cubiques gauches. III. Transformations homographiques et corrélatives. Homologie. IV. Principales propriétés des coniques. Théorèmes de Desargues, Sturm, Pascal, Brianchon. Pôles et polaires. Cercle orthoptique. Quadrilatères inscrits à une conique et circonscrits à une autre. Théorème de Joachimsthal. Coniques harmoniquement circonscrites ou inscrites à une conique. V. Principales propriétés des quadriques. Pôles et plans polaires. Intersection de deux quadriques. Faisceaux et réseaux de quadriques. Foyers et focales. Cubique des normales. Quadriques harmoniquement circonscrites et inscrites. Théorème de Hesse. Construction linéaire d'une quadrique. Théorèmes de Faure, de Picquet. VI. Etude de quelques transformations. Applications des transformations homographiques et corrélatives. Représentation plane des quadriques. Inversion. Transformations quadratiques planes. Transformation de Lie. (J. N.).

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 795.

(Voir *Mathesis* (2), X, p. 44).

NOTES. I. Le résultat de l'élimination directe de $x$, $y$, $z$ entre les équations (7) est, en appelant $\Delta$ le déterminant qu'indique M. Neuberg, $A_{11}^2 A_{22}^2 A_{33}^2 (\Delta)^2 = 0$.

Les hauteurs représentées par les équations $A_{11}=0$, $A_{22}=0$, $A_{33}=0$ ne peuvent faire partie du lieu ; il reste donc deux fois la cubique $\Delta$.

Il se présente ici une curieuse correspondance point par point de trois courbes, l'ellipse $Ayz + Bzx + Cxy = 0$, la cubique $\Delta = 0$ et la quartique : $(B^2 - C^2)y^2z^2 + (C^2 - A^2)z^2x^2 + (A^2 - B^2)x^2y^2 = 0$. Cette dernière a trois points doubles en A, B, C, sommets du triangle donné ; elle est donc unicursale (ou de genre zéro), comme la conique et la cubique $\Delta$. On voit facilement que cette dernière est unicursale ; car en prenant par exemple le rapport $(\beta : \gamma) = \lambda$ comme paramètre, tenant compte de $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, on exprime $x$, $y$, $z$ à un facteur de proportionnalité près, par des polynômes du 3e degré en $\lambda$.

Quand le point M décrit la conique, les droites AM, BM, CM, déterminent des points $M_a$, $M_b$, $M_c$; et il en résulte des points $M'_a$, $M'_b$, $M'_c$ d'une seule manière possible, et aussi un point M′ unique correspondant à M de la conique. Mais par M′ on peut mener encore trois tangentes aux paraboles déterminées par les groupes de quatre tangentes (BC, $H_bH_c$, $BH_b$, $CH_c$), ... Il en résulte sur B C, CA, AB trois nouveaux points $\mu_a$, $\mu_b$, $\mu_c$ qui joints respectivement à A, B, C déterminent un point $\mu$ de la quartique. (Espanet).

II. La note de M. Espanet est fort intéressante ; elle explique que le lieu du point M′ peut être irréductible et que celui de M se compose de deux courbes. Cependant la correspondance entre les points homologues des trois courbes mériterait un examen plus approfondi. La circonstance remarquable que présente la question 785, a-t-elle déjà été rencontrée dans l'étude des *liaisons* ou des *connexes?*

Les sommets et les hauteurs du triangle ABC jouent un rôle assez curieux qu'il convient de signaler : Le sommet A par exemple peut être considéré comme une position de M, et le point M′ est alors un point quelconque de la hauteur $AH_a$. En effet, si M est en A, $M_b$ et $M_c$ se confondent avec A et $M_a$ est un point quelconque de BC; les droites $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ coïncident avec la hauteur $AH_a$, de sorte qu'elles concourent avec la ligne $M_aM'_a$ dans toutes les positions de $M_a$.

Nous consacrerons un article spécial aux paraboles enveloppes des droites $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$; ces courbes ont reçu le nom de *paraboles de Brocard* (*Mathesis*, 1886, Suppl. et 1890, p. 166) (J. N.)

---

## Question 1075.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 142).

*Le point de concours des diagonales d'un quadrilatère inscriptible est sur la directrice de la parabole inscrite à ce quadrilatère.* (E. Duporcq.)

*Solution par* MM. Emmerich, Déprez et Soons. D'après un théorème connu, l'orthocentre d'un triangle dont les côtés touchent une parabole est situé sur la directrice. Quatre tangentes forment quatre triangles dont les orthocentres jouissent de la propriété rappelée. D'autre part, les orthocentres des quatre triangles formés par un quadrilatère complet se trouvent sur l'axe radical des cercles dont les diamètres sont les trois

diagonales. Supposons maintenant le quadrilatère ABCD inscriptible et soit E le point de concours des diagonales. De EA. EC = EB.ED on conclut que le point E appartient à l'axe radical des cercles décrits sur AC et BD comme diamètres, c'est-à-dire que le point E est situé sur la directrice de la parabole.

*Solution par* M. H. MANDART. Soient O le point de concours des diagonales AC, BD du quadrilatère inscrit ABCD, MN la troisième diagonale de ce quadrilatère, M étant l'intersection de AB et CD.

On sait que les diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique forment un triangle conjugué par rapport à la conique; O est donc le pôle de MN et si F est le second point de rencontre des cercles MBC, CDN, c'est-à-dire le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère, on a :

$$\text{angle MFC} = \text{ABC} = \text{CDN} = 180^\circ - \text{CFN},$$

$$\text{MFC} + \text{CFN} = 180^\circ,$$

F est donc un point de MN et conséquemment, la polaire de F ou la directrice de la parabole passe par O.

Autre solution par M. Droz Farny, qui démontre que les différents quadrilatères qu'on peut inscrire à la même circonférence et circonscrire à la parabole donnée ont même point d'intersection des diagonales.

M. Déprez donne également une solution analytique.

M. Soons rappelle les propriétés suivantes de la même figure (notations de M. Mandart) : 1° NF : MF = NC. NB : MC. MD ; 2° Les angles CFA, BFD ont la même bissectrice MN ; 3° La perpendiculaire élevée en F sur MN passe par O et par le centre du cercle ABCD ; 4° Si le quadrilatère est en même temps circonscriptible à un cercle, le centre I de ce cercle est situé sur la droite FO, et l'on a $\overline{FI}^2 = FA.FC = FB.FD = FM.FN$.

---

## Question 1150.

(Voir *Mathesis* (2) t. VII, p. 279).

*On considère tous les triangles* ABC *ayant même base* BC *et dans lesquels les angles* B *et* C *ont un rapport donné* K; *soient* A', B', C' *les pieds des hauteurs et* H *leur point de concours.*

1° B'C' *enveloppe une hypocycloïde.*

2° A'C' *et* A'B' *enveloppent des épicycloïdes.*

3° *Le centre* $O_9$ *du cercle des neuf points de* ABC *décrit la polaire réciproque d'une hypocycloïde par rapport à un certain cercle.*

4° *Le cercle* Q *enveloppe une podaire de polaire réciproque d'une hypocycloïde (polaire prise par rapport à un certain cercle).*

5° *Trouver les lieux du sommet* A, *de l'orthocentre* H *et du centre de gravité* G *de* ABC.

*Cas particulier de* $K = 2$. (DÉPREZ).

*Solution par* M. A. DROZ-FARNY. LEMME I. A partir d'un point A pris sur une circonférence O de rayon R, deux points B et C se meuvent uniformément et dans le même sens sur cette courbe avec des vitesses dont le rapport est K ($K > 1$).

La droite BC enveloppe une épicycloïde décrite par le point A du cercle mobile de rayon $r = \frac{R}{K+1}$ roulant sur un cercle fixe concentrique avec O et de rayon $\rho = \frac{K-1}{R+1}R$. Si les points se meuvent en sens contraire, BC enveloppe une hypocycloïde décrite par le point A du cercle mobile de rayon $r = \frac{R}{K-1}$ roulant à l'intérieur du cercle fixe concentrique au cercle donné et de rayon $\rho = \frac{K+1}{K-1}R$.

Voir pour la démonstration élémentaire : *Note sur une enveloppe par* S. F. W. BARHR, N. A. M., 1881.

LEMME II. Chercher l'enveloppe d'une circonférence variable passant constamment par un point fixe A et dont le centre O se meut sur une courbe donnée C.

Soient deux positions voisines O′ et O″ du centre O. Les circonférences correspondantes se coupent en un second point P′ tel que AP′ est perpendiculaire sur O′O″ et divisée par cette droite en B′ en parties égales. A la limite, P′ devient le point de contact de la circonférence O avec son enveloppe; AP est perpendiculaire sur la position limite de la sécante O′O″, c'est-à-dire sur la tangente en O à C, d'où le théorème :

L'enveloppe cherchée est la podaire par rapport au pôle A d'une courbe homothétique de C pour le rapport de similitude de 1 : 2.

*Solution.* 1° Décrivons la circonférence de centre O sur BC comme diamètre. Elle passe par les points B′ et C′ et l'on aura :

$$\text{arc BB}' : \text{arc CC}' = K.$$

Soit X sur cette circonférence le point pour lequel

$$\text{arc BX} : \text{arc CX} = K;$$

on aura aussi :

$$\text{arc XB}' : \text{arc XC}' = K.$$

D'après le lemme I, A'C' enveloppe une hypocycloïde; dans le cas particulier $K = 2$, B'C' enveloppe une *hypocycloïde de Steiner*.

2° Dans le quadrilatère inscriptible BA'HC', on a

$$\textit{angle}\ \text{A'C'B} = \text{BHA}' = C.$$

Si donc C'A' coupe la circonférence O en C'', on aura

$$\text{arc CC}' : \text{arc BC}'' = K.$$

Soit sur cette circonférence $y$ un point tel que

$$\text{arc CC}'y : \text{arc BC}''y = K;$$

on aura aussi

$$\text{arc } yC' : \text{arc } yC'' = K;$$

donc le sens des vitesses étant ici le même, A'C' et de même A'B' enveloppent des épicycloïdes; pour $K = 2$, elles enveloppent *deux cardioïdes*.

3° Soient M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et $\omega$ le milieu de AH. On sait que $O\omega$, diamètre du cercle des neuf points de ABC, est divisé en parties égales au point $O_9$ par HM. B'C', axe radical des circonférences O et (A'B'C') est perpendiculaire sur $O\omega$ et l'angle $\omega B'O$ est droit. On a donc :

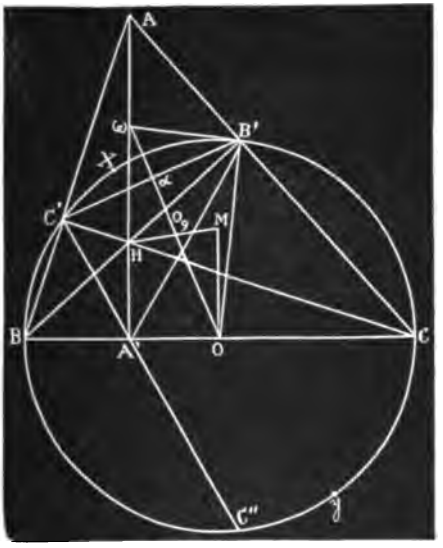
$$\overline{OB'}^2 = O\alpha . O\omega = 2 . OO_9 . O\alpha \quad \text{d'où :} \quad OO_9 . O\alpha = \frac{a^2}{8}.$$

Il en résulte que B'C' est la polaire de $O_9$ pour le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{4} a \sqrt{2}$.

Le centre $O_9$ décrit donc la polaire réciproque d'une hypocycloïde par rapport au cercle précité.

4° Le cercle des neuf points passe constamment par O et son centre décrit une courbe déterminée. D'après le lemme II, il enveloppera une podaire de la polaire réciproque d'une hypocycloïde.

5° Les lieux du sommet A et de l'orthocentre H se laissent aisément déterminer dans chaque cas particulier; on a, en effet, sin B = sin (KC).




Or, sin KC peut s'exprimer en fonction de sin C et de cos C. En choisissant BC comme axe des $x$ et O comme origine, on a :

$$\sin B = \frac{y}{\sqrt{y^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}}, \qquad \sin C = \frac{y}{\sqrt{y^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2}};$$

$$\cos C = \frac{\frac{a}{2}+x}{\sqrt{y^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2}},$$

d'où l'équation du lieu (A).

On obtient l'équation du lieu de l'orthocentre en remplaçant, dans l'équation du lieu de A, $y$ par $\frac{\frac{1}{4}a^2-x^2}{y}$.

Enfin le lieu du centre de gravité G est une courbe homothétique de celle décrite par A par rapport au centre O et réduite au 1/3.

Note. M. Barisien nous a adressé une solution analytique de la même question; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche

de l'insérer. Notre zélé correspondant examine les hypothèses $K = -2$, $K = -3$, et déduit de ses formules générales les conclusions suivantes :

1° $K = -2$. L'angle extérieur en B est égal à 2C, donc AB = BC. Le triangle variable ABC est constitué par un rayon fixe BC d'un cercle et un rayon variable BA du même cercle. La droite B'C' enveloppe une cardioïde, les droites A'B' et A'C' enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements, l'orthocentre décrit une strophoïde droite (Voir la question 1111, (2) VII, p. 102, posée par M. Droz-Farny).

2° $K = -3$. L'angle extérieur en B = 3C; B'C' enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements, les droites A'B' et A'C' enveloppent une hypocycloïde à quatre rebroussements, A décrit une trisectrice de Maclaurin, enfin l'orthocentre décrit une quartique.

---

## Question 1235.

(Voir *Mathesis* (2), t. IX, page 215).

*Les extrémités d'une droite* AB *de longueur variable décrivent deux droites données* Cx, Cy; *l'aire du triangle* CAB *restant constante, démontrer que :* 1° *le cercle circonscrit au triangle* ABC *enveloppe une podaire d'hyperbole;* 2° *l'axe orthique de* ABC *enveloppe une hyperbole;* 3° *le cercle des neuf points de* ABC *enveloppe une quartique. Si l'angle xCy est droit, le cercle circonscrit et le cercle des neuf points enveloppent des lemniscates de Bernoulli.* (Deprez)

*Solution analytique* par M. G. Cardoso-Laynes, à Livourne (Italie).

Prenant pour axes les bissectrices des angles des droites données, on aura pour les équations de ces droites :

$$y = mx; \qquad y = -mx$$

et pour les points A et B satisfaisant aux conditions de l'énoncé

$$A = (\lambda, \lambda m); \quad B = \left(\frac{k^2}{\lambda}, \frac{-k^2 m}{\lambda}\right),$$

où $\lambda$ est un paramètre et $k^2$ une constante.

Le cercle circonscrit au triangle donné sera représenté par

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ \lambda^2(1+m^2) & \lambda & \lambda m \\ \frac{k^4}{\lambda^2}(1+m^2) & \frac{k^2}{\lambda} & \frac{-k^2 m}{\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire par

$$(1) \qquad f(x, y, \lambda) \equiv 2m\lambda (x^2 + y^2) - mx (1 + m^2) (k^2 + \lambda^2) + y (1 + m^2) (k^2 - \lambda^2) = 0.$$

On obtiendra l'équation de l'enveloppe de ce cercle en éliminant $\lambda$ entre l'équation (1) et l'équation $\frac{df}{d\lambda} = 0$, qui donne

$$\lambda = \frac{m (x^2 + y^2)}{(1 + m^2) (mx + y)};$$

on aura donc

$$m^2 (x^2 + y^2)^2 = k^2 (1 + m^2)^2 (m^2 x^2 - y^2),$$

équation de la *podaire du centre d'une hyperbole.*

Si les droites données sont rectangulaires, on a $m = 1$, et l'équation précédente devient

$$(x^2 + y^2)^2 = 4k^2 (x^2 - y^2);$$

elle représente une *lemniscate de Bernoulli.*

Les coordonnées des milieux de CA, CB, AB sont

$$\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda m}{2}\right); \quad \left(\frac{k^2}{2\lambda}, \frac{-k^2 m}{2\lambda}\right); \quad \left(\frac{\lambda^2 + k^2}{2\lambda}, \frac{m (\lambda^2 - k^2)}{2\lambda}\right);$$

par conséquent le cercle des neuf points a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ \frac{1}{4}\lambda^2 (1 + m^2) & \frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{2}\lambda m & 1 \\ \frac{1}{4\lambda^2} k^4 (1 + m^2) & \frac{1}{2\lambda} k^2 & -\frac{1}{2\lambda} m k^2 & 1 \\ \frac{1}{4\lambda^2} [(\lambda^2 + k^2)^2 + m^2 (\lambda^2 - k^2)^2] & \frac{1}{2\lambda}(\lambda^2 + k^2) & \frac{1}{2\lambda} m (\lambda^2 - k^2) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad \varphi(x, y, \lambda) \equiv 4m\lambda (x^2 + y^2) + mx (k^2 + \lambda^2)(m^2 - 3) + y (k^2 - \lambda^2)(3m^2 - 1) + 2\lambda m k^2 (m^2 - 1) = 0.$$

Mais de l'équation

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0,$$

on tire

$$\lambda = \frac{m[2(x^2+y^2)+k^2(m^2-1)]}{y(3m^2-1)-mx(m^2-3)},$$

l'équation de l'enveloppe du cercle (2) sera donc

$$m^2[2(x^2+y^2)+k^2(m^2-1)]^2+k^2[y^2(3m^2-1)^2-m^2x^2(m^2-3)^2]=0;$$

elle représente une *quartique*.

Si les droites données sont rectangulaires, l'équation précédente devient

$$(x^2+y^2)^2 = k^2(x^2-y^2);$$

elle représente une *lemniscate de Bernoulli*.

L'axe orthique étant l'axe radical des deux cercles (1), (2), a pour équation

$$(3)\quad \psi(x,y,\lambda) = mx(k^2+\lambda^2)(1-3m^2)+y(k^2-\lambda^2)(3-m^2) - 2\lambda mk^2(m^2-1)=0;$$

puisque de l'équation

$$\frac{d\psi}{d\lambda}=0,$$

on tire

$$\lambda = \frac{mk^2(m^2-1)}{mx(1-3m^2)-y(3-m^2)},$$

on aura, pour l'enveloppe de l'axe orthique (3),

$$(4)\qquad m^2x^2(1-3m^2)^2-y^2(3-m^2)^2 = m^2k^2(m^2-1)^2,$$

ce qui représente une *hyperbole*.

Si les droites données sont perpendiculaires entre elles, on trouve

$$x^2-y^2=0.$$

Remarquons que la courbe (4) se décompose aussi pour $m=\pm\sqrt{3}$ ou $m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire, en considérant les angles plus petits que $\frac{1}{2}\pi$, si les droites données font un angle de 60° ou de 30°.

*Solution géométrique* par M. A. Gob. Le cercle ABC passant par un point fixe C, son enveloppe est la podaire du point C par rapport à la courbe décrite par l'extrémité M du diamètre de ce cercle qui passe par C. Or MA et MB sont perpendiculaires sur Cx et Cy et l'on a $CA.CB = k^2$, $k$ désignant une constante. Les droites MA et MB décrivent donc deux faisceaux homographiques et leur point d'intersection

M décrit une conique. Cette conique est une hyperbole ($h$) ayant pour asymptotes les perpendiculaires menées par C aux droites $Cx$ et $Cy$; l'enveloppe du cercle ABC est la podaire de cette hyperbole par rapport au point C.

On pourrait aussi remarquer que le cercle ABC est le symétrique, par rapport à la bissectrice de l'angle C, de la courbe inverse de la droite AB par rapport à un cercle Δ de centre C et de rayon $k$. L'enveloppe du cercle ABC est donc l'inverse de l'hyperbole enveloppée par la droite AB; c'est donc aussi la podaire de la polaire réciproque de cette hyperbole par rapport au cercle Δ. Cette polaire réciproque n'est autre chose que l'hyperbole ($h$) trouvée plus haut.

Lorsque l'angle $xCy$ est droit, l'hyperbole ($h$) est équilatère. Or la podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est une lemniscate. L'enveloppe du cercle ABC est donc, dans ce cas, une lemniscate. Le cercle des neuf points est alors la ligne homothétique du cercle ABC par rapport au point C, le rapport d'homothétie étant 1 : 2; il enveloppe donc aussi une lemniscate.

Supposons que l'angle $xCy$ soit quelconque. Les hauteurs BH et AH et les médiatrices OA′ et OB′ déterminent par leurs intersections un parallélogramme $H\alpha O\beta$. Le centre ω du cercle des neuf points, milieu de OH, est donc aussi le milieu de $\alpha\beta$. Mais les angles $\alpha CA$, $\beta CB$ sont égaux tous deux au complément de C; donc les points $\alpha$ et $\beta$ glissent sur deux droites fixes; d'ailleurs le produit $C\alpha . C\beta$ est constant, car on a $C\alpha = \frac{1}{2} CA \operatorname{cosec} C$, $C\beta = \frac{1}{2} CB \operatorname{cosec} C$. Le point ω décrit donc une hyperbole, à laquelle $\alpha\beta$ est tangente. Le centre du cercle des neuf points décrit une conique et ce cercle est de puissance constante par rapport au point C; il enveloppe donc une anallagmatique du 4e ordre.

Soient P et Q les points de rencontre de l'axe orthique avec CA et BC. Les points P et Q sont les conjugués harmoniques des pieds B″ et A″ des hauteurs BB″ et AA″ par rapport aux segments CA et CB. On déduit de là les relations

$$\frac{1}{CP} = \frac{2}{CA} - \frac{1}{CB \cos C}, \quad \frac{1}{CQ} = \frac{2}{CB} - \frac{1}{CA \cos C}.$$

En éliminant CA et CB entre ces relations et l'égalité $CA . CB = k^2$, on trouve qu'il existe, entre les inverses des longueurs CP et CQ, une relation du 2e degré. La droite PQ enveloppe donc une conique. En

cherchant les positions limites de cette droite, on trouve que cette courbe est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites joignant le point C aux points qui divisent les hauteurs BB″ et AA″ dans le rapport 2 : 1.

On démontrerait de la même façon que les côtés du triangle orthique enveloppent des hyperboles.

M. Barisien a résolu la même question par des calculs très élégants; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de publier sa solution.

---

## ×Question 1941.

(Voir *Mathesis*) (2), IX, p. 240).

*Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$$

(J. Neuberg).

*Solution par* M^lle^ C. Wendt (Vienne, Autriche) et M. A. Listray. Aux éléments de la première colonne ajoutons les éléments correspondants de toutes les autres, puis soustrayons des éléments de chaque ligne les éléments correspondants de la ligne suivante; notre déterminant se réduit à

$$(-1)^{n-1}\,\tfrac{1}{2}\,n\,(n+1)\,\Delta',$$

où $\Delta'$ est le déterminant suivant d'ordre $n-1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \end{vmatrix}.$$

Laissant la première ligne invariable, soustrayons des éléments de toutes

les autres les éléments correspondants de la première. $\Delta'$ se réduit à un déterminant d'ordre $n-2$ qui a tous ses éléments nuls à l'exception de ceux de la diagonale principale qui sont tous égaux à $-n$.

Ceci donnera donc pour la valeur du déterminant proposé :

$$(-1)^{n-1} \cdot \tfrac{1}{2} n^{n-1} (n+1).$$

*Autre solution* par M. LISTRAY. Faisant usage d'une propriété connue des circulants, si D est le déterminant proposé, nous pourrons écrire :

$$D = (1+2+3 \cdots +n) \prod_{i=1}^{i=n-1} (1+2\omega_i+3\omega_i^2 \cdots +n\omega_i^{n-1})$$

où $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega^{n-1}$ désignant les racines $n^{es}$ de l'unité, abstraction faite de la racine 1 ; c'est-à-dire les racines de l'équation

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=0, \qquad (1)$$

Or $$1+2\omega_i+3\omega_i^2 \cdots +n\omega_i^{n-1} = \frac{n\omega_i^n}{\omega_i-1} = \frac{n}{\omega_i-1},$$

donc

$$D = \frac{n^n (n+1)}{2 \prod_{i=1}^{i=n-1} (\omega_i - 1)},$$

En développant le produit

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (\omega_i - 1)$$

et tenant compte des propriétés des racines appliquées à l'équation (1), on trouve

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (\omega_i - 1) = (-1)^{n-1} n$$

d'où enfin :

$$D = (-1)^{n-1} \tfrac{1}{2} n^{n-1} (n+1).$$

Solution analogue à la première par M. EMMERICH.

---

## ×Question 1242.

(Voir *Mathésis*, (2), IX, p. 240).

*Etant donné un trapèze* ABCD *rectangle en* A *et en* D, *on joint les sommets* C, B *au milieu* M *de* AD, *et l'on abaisse de* D *une perpendiculaire à* CM, *de* A *une perpendiculaire à* BM ; *soit* N *le point de concours de ces perpendiculaires. Démontrer que la droite* MN *est perpendiculaire à* BC.

(J. NEUBERG.)

*Solution par* M. Emmerich. Soient E, F les points où les droites AN, DN rencontrent respectivement BM, CM. De

$$MA = MD, \quad \overline{MA}^2 = ME.MB, \quad \overline{MD}^2 = MF.MC$$

on conclut que les triangles MEF, MCB sont inversement semblables. MN étant le diamètre du cercle circonscrit au triangle MEF, on voit que cette droite dans le triangle MBC joue le rôle de la conjuguée isogonale du diamètre, c'est-à-dire de la hauteur.

*Solution par* MM. Rose (Gand), Cox (athénée de Gand) et Vignory (collège communal de Bouillon).... Les triangles MEF, MCB étant semblables, l'angle MEF = MCB; mais à cause du quadrilatère inscriptible MENF, on a *angle* MEF = MNF = 90° — FMN. Les angles BCM, FMN étant complémentaires, MN est bien perpendiculaire à BC.

*Solution par* M. A. Droz-Farny. Représentons par X et Y les points à l'infini sur les droites AD et BC, par P le milieu de BC. Les deux faisceaux N (DMAX), M (CYBP) sont harmoniques. Or, les couples de rayons correspondants ND et MC, NA et MB, NX et MP sont orthogonaux; il en sera donc de même des rayons NM et MY ou NM et BC.

*Solution* par M. Plakhowo. Prenons pour axe de $y$ la droite AD, pour axe des $x$ la perpendiculaire en M. Des coordonnées des points A $(0, -a)$, D $(0, a)$, B $(d, -a)$, C $(c, a)$, on déduit facilement les équations :

$$MD \cdots y = -\frac{a}{d}x, \quad MC \cdots y = +\frac{a}{c}x,$$

$$AN \cdots y + a = \frac{d}{a}x, \quad DN \cdots y - a = -\frac{c}{a}x.$$

En ajoutant les deux dernières, on obtient pour l'équation de MN

$$y = \frac{d-c}{2a}x;$$

or le coefficient angulaire de CB est $\frac{2a}{c-d}$, etc.

Ont résolu la même question MM. Barisien, Orlando et Delahaye (Roye).

---

## *QUESTIONS D'EXAMEN.

**988.** Calculer les côtés d'un quadrilatère convexe circonscriptible à une circonférence, connaissant le périmètre et la somme des carrés des côtés. On sait que les diagonales sont rectangulaires.

Équations du problème

$$x+y+z+u=2p,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=4a^2,$$
$$x+z=y+u,\quad x^2+z^2=y^2+u^2,$$

Ce système peut être remplacé par

$$x+z=y+u=p,\quad x^2+z^2=y^2+u^2=2a^2$$

ou encore par

$$x+z=p,\quad xz=\frac{p^2-2a^2}{2},\quad y+u=p,\quad yu=\frac{p^2-2a^2}{2}.$$

On en conclut par exemple,

$$x=y=\tfrac{1}{2}(p+\sqrt{4a^2-2p^2}),\ u=z=\tfrac{1}{2}(p-\sqrt{4a^2-2p^2}).$$

**939.** Résoudre un triangle, connaissant $r_a$, $r_b$, $r_c$ (*).

On a les relations

$$S=(p-a)\,r_a=(p-b)\,r_b=(p-c)\,r_c=pr,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c},\quad S=\sqrt{rr_ar_br_c}.$$

On connaît donc S, $r$ et $p$. Les côtés $a$, $b$, $c$ résultent alors de

$$a=p-\frac{S}{r_a},\quad b=p-\frac{S}{r_b},\quad c=p-\frac{S}{r_c}.$$

Les angles résultent de

$$r_a=p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2},\quad r_b=p\,\mathrm{tg}\frac{B}{2},\quad r_c=p\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}.$$

**940.** Résoudre un triangle, connaissant $r$, $r_a$, $r_b$.

**941.** Résoudre un triangle connaissant R, $r$, $r_a$.

Soient D, E, F, $D_a$, $E_a$, $F_a$, ... les points de contact des côtés avec les cercles I, $I_a$, $I_b$, $I_c$. Comme $EE_a=a$, on trouve facilement en menant par I une parallèle à AC jusqu'à la rencontre avec $I_aE_a$

$$r_a-=\iota\quad \mathrm{tg}\frac{A}{2}=4R\sin^2\frac{A}{2},$$

d'où l'angle A, et le côté $a=2R\sin A$. B et C peuvent se déduire de

$$B+C=\pi-A,\quad a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=\frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

---

(*) Les questions 939-943 nous ont été communiquées par M. Rose. Quoiqu'elles soient connues, nous les insérons volontiers à titre d'exercices utiles.

En menant par $I_a$ à une parallèle à BC jusqu'à la rencontre avec ID, on trouve facilement

$$r + r_a = (b - c)\cot\frac{1}{2}(B - C) = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{1}{2}(B - C)$$

formule qui détermine directement B — C en fonction des données.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1265.** Si A et B sont deux points et M leur milieu, le lieu des points P tels que l'on ait PM = PA — PB est une quartique bicirculaire unicursale. Les tangentes au point double réel font un angle de 60°.

(CARDOSO-LAYNES.)

**1266.** Soient M et M′ les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse de centre O, N et T les points de rencontre de la normale et de la tangente en M avec le grand axe, P′ et Q′ les projections de M′ sur le grand axe et sur le petit axe, R et R′ les rayons des cercles circonscrits aux triangles MOT et MON. Démontrer les relations

$$R = \frac{OM + OM'}{2M'P'}, \quad R' = \frac{OM + OM'}{2M'Q'}.$$

(E. N. BARISIEN.)

**1267.** Sur une circonférence on donne deux points fixes A et C. On considère tous les quadrilatères inscrits ABCD ayant A et C comme sommets opposés et qui soient en même temps circonscrits à une seconde circonférence dont on demande le lieu géométrique du centre.

(DROZ FARNY.)

×**1268.** Un triangle scalène ABC tourne successivemen t autour de la bissectrice extérieure de chacun de ses angles. Comparer les trois volumes engendrés, ainsi que leurs trois surfaces.

Même question en prenant pour axe de révolution la tangente menée par l'un des sommets au cercle circonscrit. (J. NEUBERG.)

---

**Rectifications.** P. 62, l. 3, lire ζ au lieu de ξ. — P. 78, dernière ligne, nous avons oublié de mentionner une bonne solution de la question 1296.

---

# SUR LE POINT DE FAGNANO;

par M. ANDRIEN, professeur à Charleroi (*).

Soient A, B, A′, B′, O, F, F′ les sommets, le centre et les foyers de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Nous appelons *points associés* deux points M $(x, y)$, M′ $(x', y')$ appartenant au même quadrant de l'ellipse, par exemple au premier AB, et tels que les normales issues de ces points soient équidistantes du centre O. Ces points, d'après un théorème de Fagnano, divisent l'arc AB en trois parties dont les extrêmes ont une différence égale à la distance de O à la normale menée en M ou en M′. Ils peuvent coïncider en un seul point $m$, qui prend le nom de *point de Fagnano;* la différence des arcs Am, Bm est égale à la distance de O à la normale issue de $m$.

Nous allons étudier quelques propriétés élémentaires des points associés et du point de Fagnano; les élèves y trouveront des exercices intéressants.

Le lecteur est prié de faire la figure avec les notations suivantes :

Les axes OA, OB sont rencontrés par la tangente menée en M aux points T, S et par la normale aux points N, P; le centre O se projette sur TS en D, sur NP en E; Q est une extrémité de diamètre parallèle à TS (ou conjugué avec OM); enfin I, J sont les points de la normale NP tels que MI = MJ = OQ. Les mêmes lettres accentuées seront employées au point M′ et les lettres minuscules au point $m$.

1. En partant des équations de la tangente et de la normale

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1, \quad \frac{a^2X}{x}-\frac{b^2Y}{y}=c^2,$$

(*) Dans les *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen* éditées par les Dr O. Böklen et E. Wölffling (octobre 1899), M. Böklen a publié un premier article *Sur le théorème de Fagnano* et un second *Sur les cercles de Chasles*. Ce dernier commente quelques propositions de MM. Barisien et Droz Farny (*Mathesis*, 1895, 1896 et 1898) et en donne une extension à l'ellipsoïde. Nous avons profité de ces articles pour retoucher légèrement le travail de M. Andrien, qui nous a été remis avant réception de la livraison d'octobre de la revue allemande. (J.N.)

on trouve aisément

$$\frac{1}{\overline{OD}^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}, \quad \frac{c^4}{\overline{OE}^2} = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}.$$

L'égalité OE = OE′ ou MD = M′D′ donne

$$\frac{a^4(x^2 - x'^2)}{x^2x'^2} + \frac{b^4(y^2 - y'^2)}{y^2y'^2} = 0. \tag{3}$$

Si, dans la différence $y^2 - y'^2$, on introduit les valeurs

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2), \tag{4}$$

on obtient la relation remarquable

$$\frac{xx'}{a^2} = \frac{yy'}{b^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x}\cdot\frac{y'}{x'} = \frac{b^2}{a^2}. \tag{5}$$

Donc *le produit des coefficients angulaires des diamètres aboutissant à deux points associés est constant;* autrement dit, *les diamètres* OM, OM′ *se correspondent dans une involution dont* Om *est un rayon double.*

Si l'on désigne par $\alpha$, $\alpha'$ les angles aigus que font les tangentes MT, M′T′ avec l'axe OA, on a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2x}{a^2y}, \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{b^2x'}{a^2y'};$$

d'où, en tenant compte de l'égalité (5),

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = \frac{b}{a}. \tag{5'}$$

Appelons $y_1$, $y'_1$ les ordonnées du cercle principal qui correspondent aux abscisses $x$, $x'$; on pourra écrire

$$\frac{y_1y_1}{xx'} = \frac{b}{a}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\beta' = \frac{b}{a}, \tag{5''}$$

si $\beta$, $\beta'$ désignent les angles de OA avec les rayons des points correspondants des cercles. La relation (5″) se prête facilement à une détermination des points M, M′.

De l'équation (5) on déduit, pour le point de Fagnano,

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2 + a^2b^2} = \frac{1}{a+b},$$

de sorte que les coordonnées de $m$ sont

$$x = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad y = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

3. Portons les valeurs (4) dans la relation (5); il vient

$$a^2(a^2 - x^2)(a^2 - x'^2) = b^2x^2x'^2,$$

ou

$$c^2x^2x'^2 - a^4(x^2 + x'^2) + a^6 = 0. \tag{6}$$

et, par analogie,

$$c^2y^2y'^2 + b^4(y^2 + y'^2) - b^6 = 0. \tag{7}$$

L'égalité (6) peut prendre la forme

$$\left(a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}\right)\left(a^2 - \frac{c^2x'^2}{a^2}\right) = a^2b^2; \tag{8}$$

celle-ci exprime que *le produit des rayons vecteurs de deux points associés quelconques est constant.*

Si l'on fait $x' = x$, $y' = y$, les équations (6) et (7) donnent pour le point $m$

$$x = a\sqrt{\frac{a}{a \pm b}}, \quad y = b\sqrt{\frac{b}{b \pm a}};$$

mais il faut rejeter les dénominateurs $a - b$, $b - a$, qui donnent pour $x$ une valeur plus grande que $a$, et pour $y$ une valeur imaginaire.

3. On a

$$a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2};$$

par suite, la formule (8) peut s'écrire

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right) = \frac{1}{a^2b^2}. \tag{9}$$

Il en résulte

$$OD.\,OD' = ab.$$

D'après un théorème d'Apollonius,

$$OQ.\,OD = OQ'.\,OD' = ab;$$

donc, on a aussi

$$OQ.\,OQ' = ab.$$

Enfin, les rayons de courbure $\rho, \rho'$ aux points M, M′ ont pour expression

$$\rho = \frac{\overline{OQ}^3}{OD}, \quad \rho' = \frac{\overline{OQ'}^3}{OD'};$$

ces égalités combinées avec les précédentes donnent $\rho\rho' = ab$.

Voici d'autres relations du même genre empruntées à M. Böklen :

$$MN \cdot M'N' = \frac{b^3}{a}, \quad MP \cdot M'P' = \frac{a^3}{b};$$

$$MT \cdot M'T' = b^2, \quad MS \cdot M'S' = a^2,$$
$$DT \cdot D'T' = a^2, \quad DS \cdot D'S' = b^2.$$

4. Dans les relations précédentes, faisons coïncider deux points associés M, M′ avec le point de Fagnano; nous aurons les égalités suivantes

$$Oq = Od = \rho = \sqrt{ab} = \sqrt{mF \cdot mF'},$$

$$mn = \sqrt{\frac{b^3}{a}}, \quad mp = \sqrt{\frac{a^3}{b}}, \quad mt = ds = b, \quad ms = dt = a.$$

On voit que le cercle osculateur au point de Fagnano est équivalent à l'ellipse et a pour centre la projection de O sur la normale.

5. Lorsqu'un point parcourt le quadrant d'ellipse AB, la distance de la normale en ce point au centre part de la valeur 0 pour revenir à la valeur 0, et elle passe par la même valeur en deux points associés; par suite elle passe par un maximum au point de Fagnano. Un calcul très simple conduit à la même conclusion. Car en multipliant membre à membre les égalités

$$\frac{c^4}{\overline{OE}^2} = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}, \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

on trouve

$$\frac{c^4}{\overline{OE}^2} = a^2 + b^2 + \frac{a^4y^2}{b^4x^2} + \frac{b^4x^2}{a^2y^2},$$

et comme les deux derniers termes ont un produit constant $a^2b^2$, le minimum de leur somme et, par suite, le maximum de OE ont lieu quand ces termes sont égaux à $ab$. On retrouve ainsi l'égalité (5); ensuite

$$\frac{c^4}{\overline{Oe}^2} = a^2 + b^2 + 2ab, \quad Oe = md = a - b.$$

6. Des valeurs $OT = \frac{a^2}{x}$, $OS = \frac{b^2}{y}$, on conclut

$$\overline{TS}^2 = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = \frac{c^4}{OE^2}.$$

Par conséquent, en deux points associés on a $TS = T'S'$, et un minimum de TS, égal à $a + b$, se produit au point de Fagnano.

Comme on a $mt = b$, $ms = a$, on voit que si la droite $st$ glisse entre les axes OA, OB, le point $m$, supposé fixe sur cette droite engendre l'ellipse ABA'B', et que le point de Fagnano correspond à la position où la droite devient tangente à l'ellipse.

On sait que la normale à la courbe passe par le quatrième sommet $j$ du rectangle construit sur les côtés $Os$, $Ot$; donc, au point de Fagnano, $mj$ est perpendiculaire à $st$.

L'enveloppe de la droite mobile $st$ est une hypocycloïde dont le point de contact est la projection de $j$ sur $st$; ce point est donc le point de Fagnano de l'ellipse qu'il engendrerait s'il restait fixe sur $st$.

Enfin, si l'on demande de mener par un point donné $m$ une droite dont le segment $st$ intercepté entre deux axes rectangulaires OA, OB soit un minimum, la droite cherchée est la tangente au point $m$ de l'ellipse dont les axes sont parallèles à OA, OB et dont $m$ est le point de Fagnano. Pour le démontrer géométriquement, nous reproduisons un raisonnement bien connu. Si $st$, $s't'$ désignent deux droites de même longueur menées par $m$, les perpendiculaires élevées aux milieux des droites $ss'$, $tt'$ se rencontrent en un point K tel que les deux triangles $Kst$, $Ks't'$ sont égaux, et $Km$ est sur la bissectrice de l'angle $smt'$. Les deux droites $st$, $s't'$ peuvent se rapprocher indéfiniment l'une de l'autre et ont pour limite commune la droite minimum menée par $m$; on en conclut que les perpendiculaires élevées en $s$ sur OA, en $t$ sur OB et en $m$ sur $st$ doivent concourir en un même point.

De ce qui précède, on déduit les théorèmes suivants :

*Si l'on considère toutes les ellipses pour lesquelles $a - b$ est constant, le lieu du centre de courbure au point de Fagnano est le cercle de Chasles de rayon $a - b$.*

*Si l'on considère toutes les ellipses de même surface, la tangente au point de Fagnano enveloppe une circonférence de centre* O *et de rayon* $\sqrt{ab}$.

# SUR LA DÉVELOPPANTE DE CERCLE ET LA SPIRALE LOGARITHMIQUE;

par M. Lucien Orlando, à Turin.

## I.

I. Considérons une développante de cercle ABB', engendrée par l'extrémité A d'un fil primitivement enroulé sur la circonférence AKI et qu'on déroule ensuite. A un certain moment, le fil se détache suivant la tangente CB égale à l'arc CA. On sait que CB est le rayon de courbure de la développante; la tangente BH est donc perpendiculaire à CB.

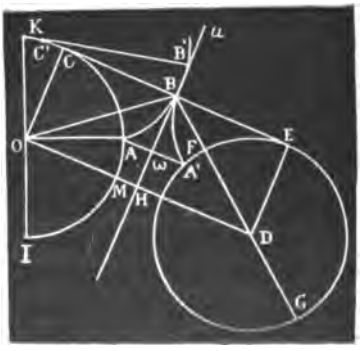



Fig. 1.

Nous prenons le rayon OA pour unité et nous désignons l'arc AC par $\theta$; alors $CB = \theta$ (Fig. 1).

*La podaire de* O *par rapport à la développante* ABB' *est une spirale d'Archimède* (*). En effet, si l'on projette O en H sur la tangente Bu et qu'on mène le diamètre KI perpendiculaire à OA, on a OH = arc AC = arc IM, de sorte que l'équation du lieu (H) par rapport à l'axe polaire OI est $r = \theta$.

II. Faisons rouler sur la développante de cercle AB une autre développante A'B égale à la première, les points de rebroussement étant en coïncidence à l'origine du mouvement. Si les deux courbes se touchent actuellement en B, la position correspondante du cercle directeur de la courbe mobile est le cercle D symétrique du cercle O par rapport à la tangente commune Bu.

Il résulte de ce qui précède que *le centre* D *engendre une spirale d'Archimède*, ayant pour équation $r = 2\theta$, si l'axe polaire est OI.

La normale à la courbe (D) est DB. Le cercle D enveloppe une courbe parallèle à la spirale d'Archimède; ses points de contact avec l'enveloppe sont les extrémités F, G du diamètre DB.

---

(*) Ce théorème, d'après le *Répertoire* de M. Brocard, t II, p. 167, est attribué à Clairaut (Mém. de l'Ac. des Sciences, 1740).

III. Cherchons l'arc AB $= s$ de la développante. Si l'on donne à $\theta$ l'accroissement infiniment petit $d\theta = CC'$, $s$ éprouve l'accroissement $ds = BB' = CB d\theta = \theta d\theta$; donc $s = \frac{1}{2}\theta^2$.

Cela posé, faisons rouler la courbe AB sur une droite $\omega x$. Soit $\omega$ la position du point de rebroussement A quand il se trouve sur la base $\omega x$; nous aurons $\omega B = AB = \frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{2}\overline{BC}^2$. Par conséquent, *quand une développante roule sur une droite, le centre de courbure au point de contact des deux lignes décrit une parabole*(*); car $\omega B$, BC sont les coordonnées rectangulaires de B.

Le centre O décrit également une parabole; celle-ci a pour équation $y^2 = 2x - 1$.

## II.

I. Considérons une spirale logarithmique AB, de pôle O (fig. 2). Menons la tangente BH au point B et la perpendiculaire OC au rayon

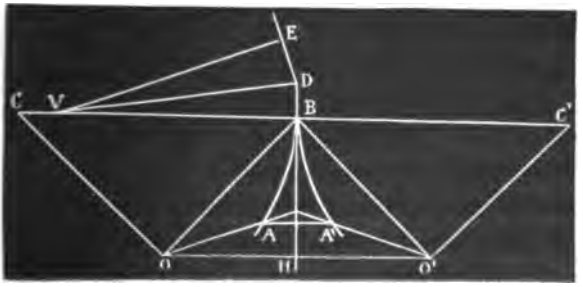



Fig. 2.

vecteur, qui rencontre la normale au centre de courbure C. Soit H la projection de O sur la tangente.

*La podaire du pôle d'une spirale logarithmique est une seconde spirale logarithmique.* En effet, l'angle OBH étant constant, le triangle OHB est toujours semblable à lui-même. Donc si U désigne OBH, on passe de la spirale AB à la podaire (H) en faisant tourner la spirale de l'angle U et en modifiant ses rayons vecteurs dans le rapport sin U : 1.

---

(*) Cette propriété est la traduction géométrique de l'équation intrinsèque de la développante $\rho^2 = 2s$, $\rho$ étant le rayon de courbure à l'extrémité de l'arc $s$ (Voir E. Cesàro, *Lezioni di Geometrica intrinseca*). Elle a déjà été signalée.

II. Faisons rouler sur la spirale AB une spirale égale A'B de manière que des points correspondants viennent toujours en coïncidence. Si B est le point de contact actuel des deux courbes, le pôle O' de la spirale mobile est le symétrique de O par rapport à la tangente commune HB ; ce point décrit une spirale logarithmique, car le milieu H de OO' décrit une telle courbe.

Le centre de courbure C' de la ligne roulante s'obtient en prolongeant le rayon de courbure CB de la ligne fixe d'une quantité égale. Le triangle OBC' restant toujours semblable à lui-même (l'angle OBC' et le rapport BO : OC' sont invariables), le point C' décrit une spirale logarithmique.

III. Faisons rouler un angle constant BDE sur la spirale logarithmique. L'angle BOC restant constant, le rapport OE : OD est invariable ; par suite le quadrilatère OBDE est toujours semblable à lui-même, et il en est de même du triangle BOD. Il résulte de là *que le sommet d'un angle constant circonscrit à une spirale logarithmique décrit également une spirale logarithmique.*

IV. Soit V le point de rencontre des normales en B et E; c'est le centre instantané de rotation de l'angle mobile BDE. VD est donc la normale à la spirale (D'). Les angles OED, OBH étant égaux, le quadrilatère OEDB est inscriptible; VD étant un diamètre de la circonférence circonscrite, celle-ci touche la spirale (D). Ainsi, *la circonférence qui passe par le pôle* O *d'une spirale et par les extrémités de deux rayons vecteurs variables*, OB *et* OE, *qui font un angle constant, est tangente à la spirale logarithmique. La corde* BE *enveloppe une spirale logarithmique* ; c'est ce qu'on voit en transformant par inversion la circonférence OBDE.

---

## ESQUISSE BIOGRAPHIQUE

### F. Brioschi (1824-1897).

François Brioschi, né à Milan, le 22 décembre 1824, mort dans cette ville, le 13 décembre 1897, était le plus éminent des géomètres de l'Italie. Pendant plus de quarante ans, ses travaux se sont succédé sans interruption, embrassant les diverses branches des mathématiques pures et appliquées.

A ses débuts, il publie dans les *Annales* de Tortolini, des recherches sur le problème des trois corps la variation des constantes arbitraires en Mécanique, l'hydrodynamique, etc. Il devient ensuite directeur des *Annali di matematica* qui continuent le journal de Tortolini et publie là ou ailleurs une foule de travaux sur

les sujets les plus variés : théorie des lignes de courbure, surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques, lignes géodésiques, tangentes doubles des courbes du quatrième ordre ayant un point double; équations aux dérivées partielles du 1er et du 2d ordre; déterminants gauches, déterminants de la transformation des fonctions abéliennes, interpolation, fonctions de Sturm; théorie générale des formes algébriques, où il se montre le digne collaborateur de Sylvester et de Cayley.

Mais il faut citer surtout cette partie importante des recherches de Brioschi « où l'Algèbre se joint à la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, et qui conduisent à la résolution des équations du cinquième et du sixième degré. Son talent s'y montre avec éclat, il jette une complète lumière sur les propriétés cachées de l'équation de Jacobi qui determine le multiplicateur au moyen du module dans la transformation du cinquième ordre; il donne le secret de la résolution de l'équation du cinquième degré qu'en a tirée Kronecker, et que l'illustre géomètre avait communiquée à notre Académie, sans démontrer son beau résultat.

« Pour l'équation du sixième degré, la voie suivie est tout autre. On sort du domaine des fonctions elliptiques et il est fait appel aux transcendantes plus élevées qui naissent de l'inversion des intégrales hyperelliptiques de première classe. On emploie les fonctions de deux variables analogues à la transcendante *théta* de Jacobi, et parmi elles les dix expressions qui, étant des fonctions paires, ne s'évanouissent pas pour les valeurs nulles des arguments. Ce sont les quantités au moyen desquelles sont représentées les racines et qui donnent la résolution de l'équation du sixième degré, grande et belle découverte qui a été le couronnement de la carrière mathématique de Brioschi. »

Brioschi appartenait à la plupart des Académies et Sociétés savantes de l'Europe et de l'Amérique; il a été comblé d'honneurs et de dignités dans son pays; les plus hautes distinctions, les grandes situations qu'il a occupées l'ont toujours laissé simple et modeste (D'après Hermite, *Notice sur F. Brioschi*, C. R., CXXV, pp. 1139-1141; 27 décembre 1897).

---

## SUR LES TRIANGLES QUI SONT INSCRITS DANS UNE ELLIPSE ET CIRCONSCRITS A UN CERCLE CONCENTRIQUE;

par M. E. Barisien.

(*Suite*; voir *Mathesis*, (2), X, p. 84).

**65.** Lieu de la projection de O sur la parallèle à B'''C''' menée par A''' :

$$R^2(x'+y^2)^2\,(a^2x^2+b^2y^2)=(a^2x^2+b^2y^2)^2;$$

$$U=\frac{\pi}{2a^2b^2}(a^2+b^2)\,(a^2+b^2+ab)^2-2\pi\,(a^2+b^2)-\pi ab.$$

**66.** Les bissectrices extérieures du triangle ABC enveloppent l'antipodaire du centre de l'ellipse (courbe de Talbot), dont l'aire est

$$U = \pi ab - \frac{\pi c^4}{8ab}.$$

**67.** La perpendiculaire au milieu de BC et la perpendiculaire au milieu de B'''C''' se coupent sur la courbe

$$\begin{aligned}\{\, & a^2x^2\,[(a+b)(a^2+b^2)+a^2b]^2+b^2y^2\,[(a+b)(a^2+b^2)+ab^2]^2\,\}^2 \\ & =[(a+b)(a^2+b^2)+ab^2]^2\,[(a+b)(a^2+b^2)+a^2b]^2 \\ \{\, & [(a+b)(a^2+b^2)+ab^2]^2y^2+[(a+b)(a^2+b^2)+a^2b]^2x^2\,\}\end{aligned}$$

**68.** Lieu de la projection de O sur la perpendiculaire au milieu de BC :

$$(x^2+y^2)^2\,(b^2x^2+a^2y^2)^2 = c^4R^2x^2y^2\,;\quad U = \pi ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

**69.** Lieu de la projection de O sur la perpendiculaire au milieu de B'''C''' :

$$(x^2+y^2)^2\,(b^4x^2+a^4y^2)^2 = (a^4-b^4)^2\,x^2y^2\,(b^2x^2+a^2y^2).$$

**70.** Lieu du point de rencontre de la perpendiculaire au milieu de BC, avec la droite OA :

$$(x^2+y^2)^2 = a^2y^2+b^2x^2.$$

**71.** La perpendiculaire à B'''C''' au milieu de B'''C''' coupe la droite OA' sur la quartique

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2=(a^2+b^2)^2\,(a+b)^2\,(x^2+y^2)\,;\quad U=\frac{\pi\,(a^2+b^2)^2\,(a+b)^2}{2a^2b^2}.$$

**72.** Lieu du point de rencontre de la perpendiculaire au milieu de B'''C''' avec la droite OA :

$$(x^2+y^2)^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}\,(b^2x^2+a^2y^2)\,;\quad U=\pi\,\frac{(a^2+b^2)^2}{2a^2b^2}.$$

Cette courbe est la podaire du centre de l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=(a^2+b^2)^2.$$

**73.** Lieu de la projection de O sur la droite qui unit les milieux de BC et B'''C''' :

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)^2[a^4(2b+a)^2x^2+b^4\,(2a+b)^2\,y^2]^2 \\ &=a^2b^2\,(a-b)^2\,x^2y^2\,[a^6\,(2b+a)^2\,x^2+b^6\,(2a+b)^2\,y^2]\,.\end{aligned}$$

**74.** Lieu du point de rencontre de OA avec la droite qui unit le milieu de BC au milieu de B'''C''' :

$$(x^2+y^2)^2=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2+3ab)^2}(b^2x^2+a^2y^2),$$

podaire du centre d'une ellipse.

**75.** Lieu du point de recontre de OA' avec la droite qui unit les milieux de BC et B'''C''' :

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2=R^6(x^2+y^2);\quad U=\frac{\pi a^3b^3(a^2+b^2)}{2(a+b)^6}.$$

**76.** Le lieu du point de recontre des droites AA''', BB''', CC''' est une courbe unicursale du genre des courbes (58).

$$U=\frac{3\pi ab(a-b)^2}{(2a+b)(2b+a)}.$$

**77.** Lieu des milieux des côtés du triangle A'''B'''C''' :

$$(b^4x^2+a^4y^2)^2=a^2b^2(b^6x^2+a^6y^2);\quad U=\frac{\pi}{2}(a^2+b^2).$$

**78.** Lieu des milieux des côtés du triangle A'''B'''C''' :

$$U=\pi ab-\frac{3\pi(a^2+b^2)}{8}.$$

**79.** Lieu du centre de gravité de A'''B'''C''' : $U=\frac{\pi}{3}(a-b)^2$.

**80.** L'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle des neuf points, les pieds et les milieux des hauteurs du triangle A'''B'''C''' décrivent des courbes du genre des courbes (58).

**81.** La perpendiculaire abaissée de A' sur la tangente en A à E est normale à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2b^2}{(a+b)^4}.$$

**82.** La projection de A' sur la tangente en A ou en $\alpha$ à E décrit une courbe du genre de la courbe (58).

**83.** Les droites A'A''', A''A''', $\alpha$A''' enveloppent chacune une développée d'ellipse.

**84.** Lieu du point de rencontre de AA''' et OA' :

$$x^2+y^2=\frac{a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+b^2+3ab)^2}.$$

**85.** Les points des concours des droites

$$(A'A''', B'B''', C'C'''), (A''A''', B''B''', C''C'''), (\alpha A', \beta B', \gamma C'),$$
$$(\alpha A'', \beta B'', \gamma C''), (\alpha A''', \beta B''', \gamma C''')$$

décrivent des courbes analogues à la courbe (58).

**86.** Le lieu du point de rencontre de OA′ avec la normale en A à E est le cercle $x^2 + y^2 = (a+b)^2$. On retrouve ainsi une propriété de l'un des cercles de Chasles, étudiée dans *Mathesis* (2), V, p. 129.

**87.** Le lieu du point de rencontre des normales à E, aux points A, B, C est l'ellipse

$$a^4x^2 + b^4y^2 = a^2b^2(a-b)^2.$$

**88.** L'enveloppe des droites AD′, BD′, CD′ est la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4} = \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2(a-b)^2}.$$

**89.** Lieu de la projection de O sur les droites AD′, BD′, CD′ :

$$(x^2+y^2)^2(a^4x^2 + b^4y^2) = a^2b^2(a+b)^2x^2y^2;\ U = \frac{\pi a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

**90.** Lieu des milieux des cordes AD′, BD′, CD′ :

$$(x^2+y^2)(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = a^2b^2(a+b)^2x^2y^2,\quad U = \tfrac{1}{2}\pi ab.$$

**91.** Lieu du pôle de AD′ par rapport à $E_4$.

$$\text{Kreuzcurve :}\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2b^2}.$$

**92.** Lieu du pôle de AD′ par rapport à Σ.

$$\text{Kreuzcurve :}\ \frac{b^4}{x^2} + \frac{a^4}{y^2} = \frac{(a+b)^6}{a^2b^2}.$$

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 387 (*2e partie*).

(Voir *Mathesis*, (1), t. IV, p. 231 et (2), t. I, p. 29).

*Si $v_p$ est le coefficient de $x^{2n}$ dans le développement de*

$$u_p = \frac{\sin 2nx \,.\, \sin(2n-1)x \,\ldots\, \sin(2n-p+1)x}{\sin x \,.\, \sin 2x \,.\, \sin 3x \,\ldots\, \sin px},$$

*on a*

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots = -1.9.25\ldots(2n-1)^2.$$

(E. Cesàro.)

*Solution par* M. Emmerich. Dans son article « Source d'identités » (*Mathesis*, VI, p. 126), M. Cesàro propose la formule

$$1-u_1+u_2-u_3+\cdots=2^n(1-\cos x)(1-\cos 3x)\ldots(1-\cos(2n-1)x), \quad (1)$$

qui conduit immédiatement au théorème en question. Pour démontrer la relation (1), posons

$$\sin px=\frac{1}{2i}e^{pxi}(1-e^{-2pxi})=\frac{1}{2i}q^{-\frac{1}{2}p}(1-q^p).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $u_p$, nous avons

$$u_p=q^{-\frac{1}{2}p(2n-p)}\cdot\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})\ldots(1-q^{2n-p+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^p)}=q^{-\frac{1}{2}p(2n-p)}.\lambda_{2n,p}.$$

Or, d'après un théorème de l'article cité (p. 127), on a l'identité

$$1-\lambda_{2n,1}qz+\lambda_{2n,2}q^3z^2-\cdots+\lambda_{2n,2n}q^{n(2n+1)}z^{2n}=(1-qz)(1-q^2z)\ldots(1-q^{2n}z).$$

Si nous posons $z=q^{-n-\frac{1}{2}}$, le terme général du premier membre deviendra

$$(-1)^p\lambda_{2n,p}q^{\frac{1}{2}p(p+1)}z^p=(-1)^p.u_p.q^{np-\frac{1}{2}p^2}.q^{-np-\frac{1}{2}p}.q^{\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p}=(-1)^p.u_p.$$

Le produit du second membre pourra s'écrire

$$\prod_1^n(1-q^{n-p+1}z)(1-q^{n+p}z)=\prod_1^n(1-q^{-p+\frac{1}{2}})(1-q^{p-\frac{1}{2}})$$

$$=\prod(2-e^{xi(2p-1)}-e^{-xi(2p-1)})=\prod_1^n 2[1-\cos(2p-1)x].$$

La relation (1), ainsi démontrée, prouve que $-v_1+v_2-v_3+\cdots+v_{2n}$ équivaut au coefficient de $x^{2n}$ dans le développement de

$$P=2^n(1-\cos x)(1-\cos 3x)\cdots[1-\cos(2n-1)x].$$

Or, $\cos px=1-\frac{1}{2}p^2x^2+w_px^5$, où $w_p$ désigne une série convergente de la forme $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots$ Ainsi on trouve

$$P=2^n(\tfrac{1}{2}x^2-w_1x^5)[\tfrac{1}{2}\cdot 9x^2-w_3x^5)\cdots(\tfrac{1}{2}\cdot(2n-1)^2x^2-w_{2n-1}x^5],$$

et l'on voit que le coefficient de $x^{2n}$ dans le produit développé sera

$$1\,.\,9\,.\,25\ldots(2n-1)^2.$$

## Question 1098.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, page 280).

*Soient* A, B, C, D *les pieds des normales menées d'un point* P *à une ellipse. Si les cordes* AB, CD *sont parallèles,* 1° *le lieu du point* P *se compose de deux droites*; 2° *ces centres des circonférences* PAB, PCD *décrivent une hyperbole*; 3° *ces circonférences passent par un point fixe.* (Déprez.)

*Solution par* M. Barisien. Soient (X,Y) les coordonnées de P, $(\alpha, \beta)$, et $(m\alpha, m\beta)$ celles des pôles Q, Q' des cordes parallèles AB, CD. L'hyperbole d'Apollonius relative au point P peut se représenter par l'une et l'autre des équations

$$c^2xy + b^2x\mathrm{Y} - a^2y\,\mathrm{X} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\mathrm{K}\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)\left(\frac{m\alpha x}{a^2}+\frac{m\beta y}{b^2}-1\right)=0.$$

En identifiant, on obtient les relations

$$m\alpha^2 = -a^2, \quad m\beta^2 = -b^2, \quad \mathrm{K} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{2m\alpha\beta}{c^2} = \frac{\alpha(1+m)}{-\mathrm{Y}} = \frac{\beta(1+m)}{\mathrm{X}}. \tag{2}$$

1° Les deux premières donnent $\frac{\beta}{\alpha} = \pm\frac{b}{a}$; donc les points Q, Q' ont pour lieu géométrique les diagonales $d$, $d'$ du rectangle des axes, et les cordes AB, CD sont parallèles à $d'$ ou à $d$.

On voit aussi que $\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = -\frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{b}{a}$; il en résulte que le lieu de P se compose des diamètres perpendiculaires à $d'$ et à $d$.

2° A cause des angles droits PAQ, PBQ, le centre de la circonférence PAB est au milieu de la droite PQ; il a donc pour coordonnées

$$x = \frac{\alpha+\mathrm{X}}{2}, \quad y = \frac{\beta+\mathrm{Y}}{2}.$$

Les équations (2) donnent

$$\mathrm{Y} = -\frac{c^2(1+m)}{2m\beta}, \quad \mathrm{X} = \frac{c^2(1+m)}{2m\alpha};$$

par suite,

$$2x = \alpha + \frac{c^2(1+m)}{2m\alpha}, \quad 2y = \beta - \frac{c^2(1+m)}{2m\beta}.$$

En vertu des équations (1), on peut remplacer $\alpha$, $\beta$ par $a\mu$, $\pm b\mu$, $\mu^2$ étant écrit au lieu de $-\frac{1}{m}$ ; alors

$$2x = a\mu - \frac{c^2(\mu^2-1)}{2a\mu}, \quad \pm 2y = b\mu + \frac{c^2(\mu^2-1)}{2b\mu}.$$

Il reste à éliminer $\mu$ entre ces deux équations. Or, on peut écrire

$$4a\mu x = (a^2+b^2)\mu^2 + c^2, \quad \pm 4b\mu y = (a^2+b^2)\mu^2 - c^2;$$

et en combinant par addition et par soustraction,

$$2(ax \pm by) = (a^2+b^2)\mu, \quad 2(ax \mp by)\mu = c^2;$$

d'où enfin par multiplication,

$$4(a^2x^2 - b^2y^2) = a^4 - b^4.$$

3° La circonférence QAB a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+K\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}-p\right)=0.$$

En exprimant que cette équation est vérifiée par $x=\alpha$, $y=\beta$, on trouve $1+Kp=0$, ce qui est aussi la condition pour que la circonférence passe par le centre de l'ellipse.

Remarques. 1. Le cercle PAB enveloppe la quartique

$$a^2b^2(x^2+y^2)^2 = (a^4-b^4)(b^2x^2 - a^2y^2),$$

podaire du centre de l'hyperbole

$$a^2x^2 - b^2y^2 = a^4 - b^4.$$

2. Le centre de gravité du triangle PAB se meut sur deux hyperboles, l'orthocentre sur les diagonales des rectangles des axes, le centre du cercle des neuf points sur deux hyperboles.

3. Le lieu de l'orthocentre du triangle QAB est une hyperbole, celui du centre du cercle des neuf points se compose de deux hyperboles.

4. Les quatre droites AC, BD, AD, BC enveloppent une hyperbole équilatère.

M. Sintzof (Kazan) a résolu la même question.

**Question 1214 ou 1234.**

(Voir *Mathesis* (2), IX, p. 80 et 215).

*Une sphère et un cylindre de révolution dont le cercle de base a pour diamètre un rayon de la sphère se rencontrent suivant une courbe gauche (fenêtre de Viviani). Trouver le lieu de la trace de la tangente à cette courbe sur le plan de base du cylindre.* (ANDRIEN.)

*Solutions* par M. V. RETALI. Les équations de la sphère et du cylindre étant $x^2+y^2+z^2=r^2$ et $x^2+y^2-rx=0$, nous pouvons prendre pour équations paramétriques de la courbe gauche d'intersection

$$x=r\cos^2\theta,\quad y=r\sin\theta\cos\theta,\quad z=r\sin\theta.$$

Les équations de la tangente au point $\theta$ sont alors

$$-\frac{X-x}{\sin 2\theta}=\frac{Y-y}{\cos 2\theta}=\frac{Z-z}{\cos\theta}$$

et les coordonnées de la trace de cette tangente sur le plan $z=0$

$$X=r(1+\sin^2\theta),\quad Y=r\tan\theta\sin^2\theta.$$

Eliminant $\theta$, nous avons pour équation du lieu cherché,

$$(X-r)^3+Y^2(X-r)=rY^2;$$

c'est donc une cissoïde de Dioclès.

*Solutions géométriques.* Soient O le centre de la sphère, V le point de contact des traces horizontales de la sphère et du cylindre, P la projection horizontale d'un point (P) de la courbe gauche, $t$ la tangente en V : les traces horizontales des plans tangents en (P) au cylindre et à la sphère sont évidemment la tangente en P au cercle OPV et la perpendiculaire à | OP | au point où | OP | coupe $t$; le lieu du point P′ commun à ces deux traces est donc la podaire par rapport au pôle V de la parabole ayant O pour foyer et son sommet en V, c'est-à-dire la cissoïde de Dioclès dont V est le rebroussement et la directrice de la parabole l'asymptote (d'inflexion).

*Autrement.* Puisque l'angle PVP′ est droit, le lieu de P′ est la tangentielle (d'Halphen) du cercle OPV par rapport à son point V, donc une cissoïde de Dioclès, etc.

*Autrement.* Si | VP′ | coupe le cercle OPV une seconde fois en Q et la tangente en O au point A, les triangles égaux PVP′, AOQ donnent AQ = VP′ et l'on tombe sur la construction classique de la cissoïde de Dioclès.

Remarque. Le lieu de la trace de la tangente sur le plan $yz$ est

$$(r^2 + 2y^2)^2 = z^2 (r^2 + 4y^2),$$

et le lieu de la trace sur le plan $xz$ est la cubique cuspidale $(x - r)^3 = (2x - r)\, z^2$.

Note. Solution analytique et géométrique par M. Déprez; solution géométrique par M. M. Droz-Farny, Gob, Jeřabek et Orlando.

La trace de la tangente à la fenêtre de Viviani sur le plan tangent au point V décrit une Kohlenspitzencurve (Déprez).

Nous regrettons de ne pouvoir reproduire, faute d'espace la solution de M. Jerabek, qui est accompagnée de plusieurs figures bien exécutées. Nous en extrayons les remarques suivantes :

1° La projection de la fenêtre de Viviani sur le plan $xz$ est un arc de parabole.

2° La projection cylindrique de cette courbe sur le plan $xy$, les projetantes faisant l'angle du 45° avec $Oz$, est généralement un *trifolium oblique*; si les projetantes sont parallèles au plan $xz$, on obtient un *trifolium droit*; si ces projetantes sont parallèles au plan $yz$, la projection est un *trifolium double*.

---

## ×Question 1321.

(Voir *Mathesis*, (2) IX, page 128).

*Ramener l'une à l'autre les équations suivantes entre trois arcs $x, y, z$ :*

(1) $$\Sigma \sin(y + z) \sin(x - y) \sin(x - z) = 0,$$

(2) $$\Sigma \sin 2x \sin^2(y - z) = 0,$$

(3) $$\Sigma \sin 2x - \Sigma \sin(2y + 2z - 2x) = 0,$$

(4) $$\sin(y + z) \sin(z + x) \sin(x + y) = \sin 2x \sin 2y \sin 2z,$$

(5) $$\Sigma \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} x} = 6.$$

(J. Neuberg).

*Solutions par* MM. Déprez, Emmerich, Rose et Delahaye. Désignons par A, B, C les premiers membres des équations (1), (2), (3). On trouve en opérant sur A

$$2\sin(x-y)\sin(x-z)=\cos(z-y)-\cos(2x-y-z),$$
$$2\sin(y+z)\cos(z-y)=\sin 2z+\sin 2y,$$
$$2\sin(y+z)\cos(2x-y-z)=\sin 2x-\sin(2x-2y-2z);$$

par suite,

$$4A=\Sigma(\sin 2z+\sin 2y)-\Sigma[\sin 2x+\sin(2y-2z-2x)]=C.$$

On peut écrire

$$C=\Sigma[\sin 2x-\sin(2x+2y-2z]$$
$$=\Sigma\sin 2x\,[1-\cos(2y-2z)]-\Sigma\cos 2x\sin(2y-2z).$$

La dernière somme étant identiquement nulle, il vient

$$C=\Sigma\sin 2x\cdot 2\sin^2(y-z)=2B.$$

D'après une identité connue,

$$\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2};$$

par conséquent,

$$\Sigma\sin 2x-\sin 2(x+y+z)=4\sin(x+y)\sin(y+z)\sin(z+x),$$
$$\Sigma\sin(2y+2z+2x)-\sin 2(x+y+z)=4\sin 2x\sin 2y\sin 2z;$$

on en conclut

$$C=4\sin(x+y)\sin(y+z)\sin(z+x)-4\sin 2x\sin 2y\sin 2z.$$

Enfin, l'égalité (4), si l'on développe $\sin(y+z)$, $\sin(z+x)$, $\sin(x+y)$, qu'on remplace $\sin 2x,\ldots$ par $2\sin x\cos x,\ldots$ et qu'on divise les deux membres par $\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z$, donne, successivement,

$$(\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}x)(\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}x)(\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}y)=8\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z,$$
$$\Sigma\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)=6\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z,$$
$$\Sigma\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}z}=6.$$

Note. Voici *l'origine* de la question 1221. Cherchons la direction sur laquelle il faut projeter les côtés d'un triangle $A_1A_2A_3$ pour que la somme des carrés des projections soit maximum ou minimum (voir *Mathesis*, (2), X, Q. 1257, p. 56). Si les perpendiculaires abaissées de l'origine des

coordonnées sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et sur la direction cherchée ant avec l'axe des $x$ les angles $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\varphi$, la somme considérée a pour xpression

$$\lambda = 4R^2 \Sigma \sin^2 A_1 \cos^2(\alpha_1 - \varphi);$$

le maximum et le minimum de $\lambda$ sont déterminés par l'équation

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0, \text{ ou } \Sigma \sin^2 A_1 \sin 2(\alpha_1 - \varphi) = 0.$$

Supposons la direction cherchée parallèle à l'axe des $x$; alors

$$\Sigma \sin^2 A_1 \sin 2\alpha_1 = 0. \qquad (6)$$

D'autre part, les équations des côtés du triangle $A_1A_2A_3$ étant

$$X_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, \text{ etc.}$$

l'ellipse circonscrite qui a son centre au centre de gravité de $A_1A_2A_3$ a pour équation

$$\Sigma (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2)(x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3) \sin A_2 \sin A_3 = 0.$$

La condition nécessaire pour que ses axes principaux soient parallèles aux axes coordonnés est que le coefficient de $xy$ s'annule; on trouve

$$\Sigma \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \sin A_2 \sin A_3 = 0. \qquad (7)$$

Une autre méthode m'avait indiqué que les directions qui correspondent aux valeurs extrêmes de $\lambda$, étaient parallèles aux axes de l'ellipse de Steiner; j'en concluais l'identité des équations (6) et (7). Celles-ci se transforment en les équations (1) et (3) de la question 1221, si l'on remplace $A_1$, $A_2$, $A_3$ par $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_3 - \alpha_1$, $\alpha_1 - \alpha_2$.

On obtient l'équation (6) en considérant l'ellipse (imaginaire) qui a pour centre G et qui est autopolaire à $A_1A_2A_3$. En effet, elle a pour équation $\Sigma X_1^2 \sin^2 A_1 = 0$, et ses axes principaux sont ceux de l'ellipse de Steiner. (J. Neuberg.)

---

## *Question 1243.

(Voir *Mathesis* (2), IX, p. 264).

*Soient* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *les centres des trois carrés inscrits au triangle* ABC. 1° *Les droites* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ *concourent en un même point.* 2° *Les couples* $(AB_1, AC_1)$, $(BA_1, BC_1)$, $(CA_1, CB_1)$ *sont isogonaux par rapport aux angles* A, B, C. 3° *Trouver le rapport des aires des triangles* $A_1B_1C_1$. ABC. 4° *Connaissant les points* B, C, $A_1$ *ou* B, A, $A_1$, *trouver le troisième sommet du triangle* ABC.

*Solution par* M. G. Gérard. Nous généralisons la question, en remplaçant les carrés par trois rectangles semblables quelconques inscrits au triangle ABC; ces rectangles sont définis par l'angle $\theta$ que font leurs diagonales avec le côté correspondant du triangle ABC; les lieux de leurs centres sont trois droites passant respectivement par le milieu de chaque côté et le milieu de la hauteur correspondante. Soit MNPQ l'un de ces rectangles, s'appuyant par son côté MN sur BC, par ses sommets P et Q sur AB et AC, et soit $A_1$ son centre. Menons par les sommets B et C du triangle ABC des parallèles $BA_2$, $CA_2$ aux diagonales MP, NQ de ce rectangle.

*En considérant les triangles homothétiques* $PA_1Q$, $BA_2C$ *on voit que, le centre* A, *d'un rectangle d'angle* $\theta$ *construit sur le côté* BC, *se trouve sur la droite menée de* A *au sommet du triangle isoscèle d'angle* $\theta$ *construit sur* BC. Il convient d'attribuer un signe à l'angle $\theta$, ce signe étant + ou — selon que le triangle $BA_2C$ est dirigé vers l'intérieur ou vers l'extérieur du triangle fondamental. Observons aussi que $A_1$ étant le milieu des diagonales, les faisceaux $B(ACA_1A_2)$, $C(ABA_1A_2)$ sont harmoniques. Cela posé, soient $A_1$, $B_1$, $C_1$ les centres de trois rectangles d'angle $\theta$ inscrits au triangle ABC, $A_2$, $B_2$, $C_2$ les sommets des triangles isoscèles d'angle $\theta$ construits sur les côtés correspondants.

1° *Les droites* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ *concourent en un même point* : en effet, ces trois droites passent respectivement par $A_2$, $B_2$, $C_2$; mais, les triangles isoscèles $BA_2C$,... sont semblables; donc, les droites $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ ou $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ se coupent en un même point de l'hyperbole de Kiepert de ABC.

2° *Les couples tels que* $AB_1$, $AC_1$ *sont isogonaux* : en effet, les droites $AB_1$, $AC_1$ sont, par rapport à l'angle A, les conjuguées harmoniques de deux droites isogonales $AB_2$, $AC_2$.

3° Désignons par $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les coordonnées normales absolues des points $A_1$, $B_1$, $C_1$; par S, $S_1$ les aires ABC, $A_1B_1C_1$; par $a_1$, $b_1$, $c_1$ les diagonales des trois rectangles de centres $A_1$, $B_1$, $C_1$.

D'après une formule connue,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{\dot{A}\dot{A}'\dot{A}''} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on construit les coordonnées des points $A_1$, $B_1$, $C_1$, on trouve facilement

$$\alpha = \tfrac{1}{2} a_1 \sin\theta, \quad \beta = \tfrac{1}{2} a_1 \sin(C+\theta), \quad \gamma = \tfrac{1}{2} a_1 \sin(B+\theta), \text{ etc;}$$

donc

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a_1 b_1 c_1}{8 h h' h''} \begin{vmatrix} \sin\theta & \sin(C+\theta) & \sin(B+\theta) \\ \sin(C+\theta) & \sin\theta & \sin(A+\theta) \\ \sin(B+\theta) & \sin(A+\theta) & \sin\theta \end{vmatrix}.$$

Les côtés $p$, $q$ du rectangle de centre $A_1$ sont égaux à $a_1 \sin\theta$, $a_1 \cos\theta$, et les triangles semblables APQ, ABC donnent

$$\frac{q}{a} = \frac{h-p}{h}, \quad \text{d'où} \quad a_1 \left( \frac{\cos\theta}{a} + \frac{\sin\theta}{h} \right) = 1.$$

On trouve de même $b_1$ et $c_1$. Quant au déterminant, il ne paraît pas susceptible de simplification.

4° Si l'on donne les points B, C, $A_1$, menons par $A_1$ les deux droites qui font avec la droite BC l'angle $\theta$; nous aurons les demi-diagonales du rectangle de centre $A_1$, et il sera facile d'achever la figure.

Si l'on donne les points A, B, $A_1$, le sommet M du rectangle (opposé à P) est déterminé par l'intersection de la symétrique de la droite AB par rapport à $A_1$, avec l'arc du segment capable de l'angle $\theta$ décrit sur $A_1B$.

Note. MM. Emmerich et Déprez ont résolu la même question dans l'hypothèse où $\theta = 45°$. Dans le calcul de l'aire $A_1B_1C_1$, ils rencontrent le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin B + \cos B \\ \sin C + \cos C & \sin A + \cos A \\ \sin B + \cos B & 1 \end{vmatrix},$$

qui se réduit à $4 \cos A \cos B \cos C$.

Le déterminant considéré par M. Gérard se ramène à

$$2 \sin A \sin B \sin C \sin^3\theta \, (\cot^3\theta - \cot\theta + 2 \cot A \cot B \cot C).$$

L'aire $A_1B_1C_1$ s'annule et les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ sont en ligne droite lorsque

$$\cot^3\theta - \cot\theta + 2 \cot A \cot B \cot C = 0.$$

Cette équation, de la forme $x^3 + px + q = 0$, rentre dans le cas

irréductible; elle a donc trois racines réelles distinctes, excepté dans le cas du triangle équilatéral qui admet une racine double $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($A_1, B_1, C_1$ sont alors confondus avec le centre du triangle) et une racine simple $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, laquelle rendrait les diagonales d'un rectangle parallèles à un côté sur lequel se trouverait une de leurs extrémités.

On sait que les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ glissent sur les droites $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ qui joignent les milieux $A'$, $B'$, $C'$ des côtés de ABC aux milieux $A''$, $B''$, $C''$ des hauteurs correspondantes et concourent au point de Lemoine K. Comme les droites $CA_1$, $CB_1$ sont isogonales, les points $A_1$, $B_1$ décrivent deux ponctuelles homographiques; par suite, la droite $A_1B_1$ enveloppe une conique $U_c$ tangente aux droites $A'A''$, $B'B''$ aux points qui sont les homologues de K; ces points sont sur la médiane $CC'$. Les droites $CA_1$, $CB_1$ peuvent coïncider avec les bissectrices de l'angle C, ces bissectrices sont donc des tangentes de $U_c$. Il est facile de construire les tangentes parallèles à $A'A''$, $B'B''$, et d'en déduire le centre de $U_c$, etc. Les droites $B_1C_1$, $C_1A_1$ enveloppent également des coniques $U_a$, $U_b$. Les trois courbes $U_a$, $U_b$, $U_c$ ont trois tangentes communes, qui sont définies par l'équation

$$\cot^2\theta - \cot\theta + 2\cot A \cot B \cot C = 0.$$

(J. N.)

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**942.** Résoudre un triangle, connaissant R, $r_b$, $r_c$.

On peut partir de la relation

$$r_b + r_c = 4R\cos^2\frac{A}{2},$$

qui fait connaître A; $p - b$ et $p - c$ peuvent se déduire de

$$p - b = r_c \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad p - c = r_b \operatorname{tg}\frac{A}{2};$$

$a$ est donné par $a = 2R \sin A$; donc $a$, $b$, $c$ sont connus.

**943.** Les symétriques des côtés d'un triangle ABC par rapport aux sommets opposés forment un nouveau triangle $A'B'C'$, dont les côtés valent cinq fois ceux de ABC. Les deux triangles ABC, $A'B'C'$ ont même centre de gravité (Comparez 949).

**244.** Résoudre un triangle, connaissant $r_a$, A, $a$.

On a

$$a = BD_a + CD_a = r_a\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = \frac{r_a \cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

cette relation jointe à $B + C = \pi - A$ détermine B et C.

**245.** Soient $a$, $b$, $c$, $d$, les côtés AB, CD, CD, DA d'un quadrilatère sphérique convexe, circonscrit à un petit cercle. On a

$$\sin a \sin b \sin^2\frac{B}{2} = \sin c \sin d \sin^2\frac{A}{2},$$

$$\sin b \sin c \sin^2\frac{D}{2} = \sin a \sin d \sin^2\frac{A}{2}.$$

A déduire des relations

$$\cos AC = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos B = \cos c \cos d + \sin c \sin d \sin D,$$
$$a - b = d - c \text{ ou } \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos c \cos d + \sin c \sin d.$$

**246.** Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, les segments marqués sur les côtés d'un quadrilatère sphérique circonscrit à un petit cercle par les points de contact de ce cercle; le rayon $r$ du cercle est donné par

$$\sin^2 r = \frac{\Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{\Sigma \operatorname{tg}\alpha}.$$

A déduire de $\operatorname{tg}\alpha = \sin r \operatorname{tg}\alpha', \ldots, \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = \pi$, où $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ désignent les angles des arcs OA, OB, OC, OD avec les rayons aboutissant aux points de contact voisins.

**247.** Si le nombre entier $a$ est premier avec 30, $(a^2 - 1)(a^4 - 16)[a^2 - (2n + 1)^2]$ est divisible par 23040.

**248.** Dans un triangle ABC, inscrire un triangle A'B'C' semblable à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$ et tel que ABC et A'B'C' soient orthologiques.

(E. Lemoine.)

Deux triangles ABC, A'B'C' sont dits orthologiques lorsque les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les côtés du second concourent en un même point N, alors les perpendiculaires abaissées des sommets du second sur les côtés du premier sont également concourantes.

Le point N se détermine immédiatement au moyen de deux segments capables décrits sur AB et BC. Si une perpendiculaire à AN, coupe AB en $C_1$ et AC en $B_1$, des perpendiculaires abaissées de $C_1$ sur BN et de $B_1$ sur CN se coupent en un point P, tel que AP rencontre BC au sommet cherché C'.

**949.** Les plans symétriques des faces d'un tétraèdre par rapport aux sommets opposés forment un nouveau tétraèdre. Les deux tétraèdres ont même centre de gravité, et les arêtes correspondantes sont dans le rapport 1 : 7 (Comp. 943). (J. N.).

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1269.** Le sommet A et le pied D de la bissectrice de l'angle BAC d'un triangle ABC étant fixes, trouver les lieux décrits par les sommets B et C lorsqu'on donne 1° le rapport AB : AC; 2° le produit AB . AC; 3° la somme AB + AC; 4° la somme $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; 5° l'aire ABC.

(J. Neuberg.)

**1270.** Chercher le lieu des points symétriques de ceux d'une chaînette par rapport aux pieds des normales à la courbe. (H. Brocard.)

**1271.** Soit

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^m = 1 + A_{m,1}\,x + A_{m,2}\,x^2 + A_{m,3}\,x^3 + \text{etc.};$$

démontrer la formule :

$$1 + A_{m,1} + A_{m-1,2} + A_{m-2,3} + \cdots + A_{2,m-1} + A_{1,m} = u_{m+k+1}$$

quelques uns des derniers termes du premier membre peuvent être nuls, car $A_{i,j} = 0$ si $j > ik$; $u_{m+k+1}$ désigne le terme de rang $m + k + 2$, dans la suite de Fibonacci généralisée, où chaque terme est la somme des $k + 1$ précédents, les valeurs initiales étant :

$$u_0 = u_1 = u_2 = \cdots u_{k-1} = 0, \quad u_k = 1.$$ (A. Boutin.)

×**1272.** Un triangle indéterminé ABC a son sommet A sur une circonférence donnée $\alpha$, son sommet B sur une autre circonférence donnée $\beta$, et son sommet C sur une troisième circonférence donnée $\gamma$. Trouver la courbe ou les courbes qui limitent les régions du plan où se trouve le barycentre d'un de ces triangles.

Question analogue pour le barycentre d'un tétraèdre indéterminé dont les sommets appartiennent à quatre sphères données. (E. Lemoine.)

**Rectifications.** (2) IX, p. 255, q. 1084, 1° lire D au lieu 2 D. (2) X, p. 28 et p. 78, mentionner une solution de 1198 par M. Déprez, de 1136, par M. Barisien. (2), X, p. 104, q. 1266, lire OM.OM' au lieu de OM + OM'.

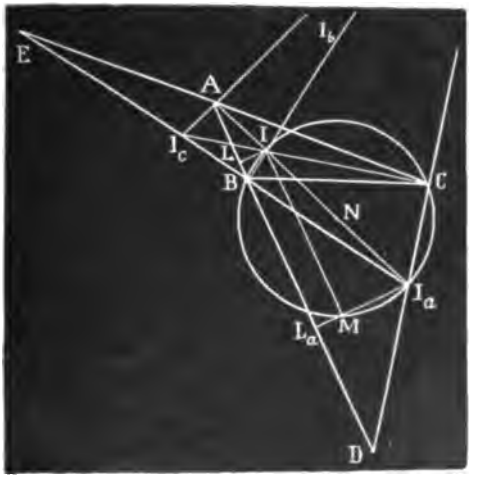
## SUR LE TRIANGLE PSEUDO-ISOSCÈLE(*);

par M. A. Emmerich.

1. J'appelle *triangle pseudo-isoscèle* un triangle ABC dont les bissectrices extérieures BE, CD sont égales sans que l'on ait AB = AC.

Ce triangle fait l'objet de la question 129 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, posée par M. Alauda et reprise par *Mathesis* sous le n° 950. Je vais d'abord résumer les développements donnés par MM. Soens et Neuberg (voir *Mathesis*, (2) V, p. 261).

On sait que




$$\overline{CD}^2 = \frac{ab(p-a)(p-b)}{(b-a)^2}, \quad \overline{BE}^2 = \frac{ac(p-a)(p-c)}{(c-a)^2}; \qquad (1)$$

l'égalité de CD et BE s'exprime donc par l'équation

$$b(p-b)(c-a)^2 = c(p-c)(b-a)^2,$$

laquelle, développée et débarrassée du facteur $b-c$ que nous supposons différent de zéro, se ramène à

$$f(a) = a^3 - a^2(b+c) + 3abc - bc(b+c) = 0. \qquad (2)$$

(*) L'expression de triangle pseudo-isoscèle m'a été proposée par M. Neuberg. J'ai publié dès 1894 des questions ou remarques sur le triangle dans la *Zeitschrift de Hoffmann*.

Considérons les côtés $b$ et $c$ comme donnés, et soit $b > c$. De $f(b) > 0$, $f(c) < 0$, $f(b-c) < 0$, on conclut que l'équation (2) a toujours une racine réelle (*) satisfaisant aux inégalités $b > a > c$, $a > (b-c)$; ces conditions sont suffisantes pour que $a, b, c$ soient les côtés d'un triangle.

Le point D est sur le prolongement de AB au-delà de B, E est sur le prolongement de CA au-delà de A ; c'est ce que l'on déduit facilement de $B > A > C$.

2. En remplaçant $3abc$ par $2abc + abc$, on trouve facilement

$$f(a) \equiv -a^2(b+c-a) + 2abc - bc(b+c-a);$$

donc l'équation (2) peut prendre la forme

$$(a^2 + bc)(p-a) = abc. \tag{3}$$

On en conclut la relation de M. Alauda :

$$a^2 + bc = 4Rr_a. \tag{4}$$

Écrivons l'équation (3) ainsi :

$$a^2(p-a) = bc(2a-p);$$

en la multipliant par $p$ et observant que $2ap - p^2 = a^2 - (p-a)^2$, nous aurons

$$bc(p-a)^2 = a^2[bc - p(p-a)] = a^2(p-b)(p-c),$$

ou bien

$$\left(\frac{p-a}{a}\right)^2 = \frac{p-b}{b}\cdot\frac{p-c}{c}. \tag{5}$$

Cette équation conduit à des conséquences remarquables. Elle sert à vérifier immédiatement que

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C. \tag{6}$$

Pour démontrer la relation (6) par la trigonométrie, remarquons que

$$\frac{BE}{a} = \frac{\sin C}{\sin\frac{1}{2}(A-C)}, \quad \frac{CD}{a} = \frac{\sin B}{\sin\frac{1}{2}(B-A)};$$

---

(*) Si l'on remplace $a$ par $\frac{bc}{x}$, on obtient une équation $\varphi(x) = 0$, dont la dérivée a des racines imaginaires; $\varphi(x)$ est donc une fonction qui varie toujours dans le même sens. On en conclut que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une seule racine réelle. La racine réelle de (1) est comprise entre $b$ et $\frac{1}{2}(b+c)$; car $f\left(\frac{b+c}{2}\right)$ est inférieure à 0. Si $b = c$, l'équation (2) donne $a = b = c$. (J. N.)

par suite, si BE = CD, on a, successivement,

$$\sin C \sin \tfrac{1}{2}(B - A) = \sin B \sin \tfrac{1}{2}(A - C),$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(B - A) = \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2}(A + C) \sin \tfrac{1}{2}(A - C),$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C (\sin^2 \tfrac{1}{2} B - \sin^2 \tfrac{1}{2} A) = \sin \tfrac{1}{2} B (\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} C),$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A (\sin \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} C) = \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C (\sin \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} C).$$

**8.** Soient I, $I_a$, $I_b$, $I_c$ les centres des cercles inscrits et ex-inscrits. On a

$$r = AI \sin \frac{A}{2} = BI \sin \frac{B}{2} = CI \sin \frac{C}{2};$$

la relation (6) peut donc se transformer en celle-ci :

$$\overline{AI}^2 = BI \cdot CI. \tag{7}$$

I étant l'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$, on sait que

$$IA \cdot II_a = IB \cdot II_b = IC \cdot II_c;$$

par conséquent, la relation (7) est équivalente à

$$\overline{II_a}^2 = II_b \cdot II_c, \tag{8}$$

et les angles du triangle $I_aI_bI_c$, que nous désignons par A', B', C', sont liés par l'égalité

$$\cos^2 A' = \cos B' \cos C'. \tag{9}$$

Les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$ sur les côtés de ce triangle sont, d'après l'équation (8), telles que l'une est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

En appliquant la proportion des sinus aux triangles $ABI_a$ et $ACI_a$, $BI_aC$ et $BI_bC$, etc., on déduit, de l'égalité (6), les égalités suivantes :

$$BI_a \cdot CI_a = bc, \quad BI_c \cdot CI_b = a^2, \quad (r_a - r)^2 = 4Rr^2.$$

$$(r_a - r)^2 = (r_b - r)(r_c - r) = bc - 4Rr.$$

**9.** Abaissons IL, $I_aL_a$ perpendiculaires à AB, IM perpendiculaire à $I_aL_a$. Des triangles semblables AIL et $II_aM$, BIL et $I_aIC$, on conclut

$$\frac{AI}{r} = \frac{II_a}{r_a - r}, \quad \frac{BI}{r} = \frac{II_a}{CI};$$

or $BI \cdot CI = \overline{AI}^2$; par suite,

$$AI = r_a - r, \quad II_a = \frac{(r_a - r)^2}{r}, \quad AI_a = \frac{r_a (r_a - r)}{r}.$$

**5.** Ce résultat donne un moyen de construire un triangle pseudo-

isoscèle dont on connaît la base $BC = a$ et l'angle opposé A. On construira le triangle rectangle $IMI_a$ dont on connaît un côté $IM = a$ et l'angle $I = \frac{1}{2}A$; on prolongera $I_aI$ de $IA = MI_a$. Les sommets B et C seront déterminés par l'intersection de la circonférence de diamètre $II_a$ avec les droites menées par A et faisant avec AI l'angle $\frac{1}{2}A$; il faut prendre parmi les quatre points de rencontre deux qui ne sont pas symétriques par rapport à AI.

Pour que le problème soit possible, il faut que la droite AD menée parallèlement à IM rencontre la circonférence ou que sa distance $\delta$ au centre N de la circonférence soit moindre que le rayon NI. Si l'on fait $NI = \rho$, on trouve

$AI = MI_a = 2\rho \sin\frac{1}{2}A$, $\delta = AN \sin\frac{1}{2}A = (2\rho \sin\frac{1}{2}A + \rho)\sin\frac{1}{2}A$;

par suite, la condition $\delta < \rho$ donne

$$2\sin^2\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} - 1 < 0,$$

et comme le trinôme du premier membre a pour racines $\frac{1}{2}$ et $-1$, on voit que $\sin\frac{A}{2} < 1$ ou $A < 60°$. On peut confirmer ce résultat : Si l'on mène MPM' perpendiculaire à $II_a$, on a $PI_a = IL$; donc si $IM > MM'$, la droite AD rencontre la circonférence.

**6.** Un triangle rectangle en B peut-il être pseudo-isoscèle? La relation (6) devient

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{A+90}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right),$$

ou bien

$$4\sin^4\frac{A}{2} + 4\sin^3\frac{A}{2} + 2\sin^2\frac{A}{2} - 1 = 0,$$

ou encore

$$\cos^4 A - 4\cos^3 A + 5\cos^2 A - 1 = 0.$$

On en conclut $A = 54° 57'19'',6$.

M. Stegemann (Prenzlau) a déduit, de l'équation (6), que dans un tel triangle

$$b(b-a) = (b-c)^2, \quad c(b-c) = b(a-c).$$

Ces relations sont équivalentes à

$$c^2 - 2bc + ab = 0. \qquad (10)$$

Nous les concluons de l'équation (2). On a

$$f(a) \equiv 2abc - (a^2 + bc)(b + c - a), \quad b^2 = c^2 + a^2;$$

d'où

$$(b + a - c) f(a) \equiv 2ac(c^2 - 2bc + ab).$$

On peut aussi remarquer les égalités

$$AI = r_a - r = b - c, \quad \frac{BI}{CI} = \frac{b - c}{b}.$$

Si $A_1$ est le symétrique de A par rapport à CI, les triangles rectangles $AA_1I$, $AA_1B$ donnent

$$\overline{AA_1}^2 = 2(b - c)^2, \quad \overline{AA_1}^2 = c^2 + (b - a)^2,$$

d'où résulte également la relation (10).

Des triangles semblables $A_1BI$, AIC on déduit

$$\frac{b - a}{b - c} = \frac{b - c}{b} = \frac{BI}{CI}.$$

Enfin, si l'on construit le symétrique $C_1$ de C par rapport à AI, on tire, des triangles semblables $C_1BI$, CIA,

$$\frac{b - c}{BI} = \frac{CI}{AI},$$

ce qui démontre de nouveau l'égalité $AI = b - c$.

7. Nous sommes parvenu à démontrer géométriquement que tout triangle satisfaisant à la relation $\overline{AI}^2 = BI.CI$ est pseudo-isoscèle; la démonstration est assez compliquée.

Il y a sans doute encore d'autres relations, assez curieuses, entre les éléments du triangle pseudo-isoscèle ou entre ceux du triangle correspondant $I_aI_bI_c$. On peut aussi étudier les lieux du sommet opposé et des centres des cercles tritangents lorsqu'un côté BC ou AB est donné.

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**11.** *Sur la question* 1222 (*Mathesis*, (2) IX, p. 238 et (2), X p. 122.). Un *lapsus memoriae* m'ayant fait attribuer à la question 1222, 3°, la réponse qui convient à la question 1257 (*Mathesis*, (2) X, p. 122), je vais rectifier l'erreur.

Soient $l$, $m$, $n$ les projections d'une longueur MM′ sur les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle. On demande pour quelle orientation de MM′ la somme $l^2 + m^2 + n^2$ est maximum ou minimum.

Soient $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\varphi$ les angles de l'axe des $x$ avec les perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur BC, CA, AB et sur la direction MM′. Il s'agit de trouver le maximum ou le minimum de

$$\lambda \equiv \cos^2(\alpha_1 - \varphi) + \cos^2(\alpha_2 - \varphi) + \cos^2(\alpha_3 - \varphi),$$

Posons donc

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin 2(\alpha_1 - \varphi) + \sin 2(\alpha_2 - \varphi) + \sin 2(\alpha_3 - \varphi) = 0. \quad (1)$$

Cette équation donne

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_3}{\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2 + \cos 2\alpha_3}. \quad (2)$$

Elle conduit à une construction élégante de la direction cherchée. Soient OA′, OB′, OC′ les perpendiculaires abaissées de l'origine sur BC, CA, AB; prenons sur OX une longueur ON = 1 et appelons $N_1$, $N_2$, $N_3$ les symétriques de N par rapport à OA′, OB′, OC′. Les coordonnées des points $N_1$, $N_2$, $N_3$ étant $(\sin 2\alpha_1, \cos 2\alpha_1)$, $(\sin 2\alpha_2, \cos 2\alpha_2)$, $(\sin 2\alpha_3, \cos 2\alpha_3)$, si P est le centre de gravité des points $N_1$, $N_2$, $N_3$, l'équation (2) revient à

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} \mathrm{XOP};$$

d'où l'on conclut que les bissectrices des angles formés par les droites OX, OP, résolvent la question; l'une correspond à un maximum de $\lambda$, l'autre à un minimum. Pour simplifier la construction on peut faire coïncider OX avec OA′ ou remplacer OA′, OB′, OC′ par des parallèles à BC, CA, AB.

Voici une autre solution. Le lieu d'un point dont la somme des carrés des distances aux côtés du triangle ABC est constante, a pour équation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \lambda^2,$$

où

$$X_1 \equiv x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0, \text{ etc.}$$

sont les équations cartésiennes des droites BC, CA, AB. Lorsque $\lambda^2$ varie, on a une suite d'ellipses semblables (*ellipses de Cesàro*; voir *Mathesis*

(1) I, p. 129), ayant pour centre le point de Lemoine K. Les axes de symétrie de ces coniques donnent les directions cherchées. En effet, si ces droites sont prises pour axes des coordonnées, le coefficient de $xy$, dans le développement de $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ doit être nul; ce qui revient à

$$\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_3 = 0.$$

Mais telle est aussi l'équation (1), si les directions cherchées sont parallèles aux axes coordonnés.

L'ellipse (imaginaire)

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$$

étant conjuguée au triangle ABC, on voit que BC, CA, AB sont parallèles aux diamètres conjugués avec les diamètres KA, KB, KC. Cette remarque conduit à une nouvelle solution de la question 1222.

(J. Neuberg.)

*12. *Propriétés d'un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique.* Si l'on appelle $a$, $b$, $c$, les côtés d'un triangle, A, B, C les angles, S la surface, R, $r$, $r_1$, $r_2$, $r_3$ les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits, $\alpha$ la bissectrice de A, $m$ la médiane de $a$, M l'angle de $m$ avec $a$, et si l'on suppose que les côtés du triangle sont en progression arithmétique de raison $d$, de sorte que les côtés sont

$$a - d, \qquad a, \qquad a + d,$$

on a d'abord $b - a = a - c$. On a, de plus, les relations :

$$\cos\tfrac{1}{2}(B - C) = 2\sin\tfrac{1}{2}A, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{3};$$

$$d = \tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{1 - 4\sin^2\frac{1}{2}A}{\cos^2\frac{1}{2}A}};$$

$$r = \frac{h}{3} = \tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 4d^2}{3}};$$

$$r_1 = 3r = h = \tfrac{3}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 4d^2}{3}};$$

$$S = \tfrac{3}{4}a^2\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \tfrac{3}{4}a\sqrt{\frac{a^2 - 4d^2}{3}};$$

$$m = \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}A}\sqrt{3\cos A + \cos^2\tfrac{1}{2}A};$$

$$\cos M = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{1 - 4\sin^2 \tfrac{1}{3} A}{\sin^2 \tfrac{1}{3} A}};$$

$$a = \tfrac{3}{4}\frac{a}{\cos \tfrac{1}{3} A}.$$

Il est facile de multiplier le nombre de ces relations particulières. Nous n'avons cité que celles qui peuvent avoir le plus d'importance dans la résolution des triangles, dans les cas où le triangle a ses côtés en progression arithmétique. (C. COUTURIER).

*13. PROBLÈME. *Construire un angle dont la tangente trigonométrique est le cube de la tangente trigonométrique d'un angle donné.*

Soit XOY l'angle donné. Ayant pris un point A quelconque sur OX, on décrit le cercle de diamètre OA; la tangente en A rencontre OY en B; OB rencontre le cercle en C. On prend le point M symétrique de C par rapport au milieu de OB. L'angle MAO est tel que

$$\operatorname{tg} MAO = \operatorname{tg}^3 MOA.$$

Le point M décrit d'ailleurs la cissoïde droite dont le point de rebroussement est en O et dont l'asymptote est la droite AB. (E. N. BARISIEN.)

---

## SUR LES TRIANGLES QUI SONT INSCRITS DANS UNE ELLIPSE ET CIRCONSCRITS A UN CERCLE CONCENTRIQUE;

par M. E. BARISIEN.

(*Suite et fin*; voir *Mathesis* (2) X, p. 113).

**23.** Lieu du point d'intersection de OA′ avec AD :

$$(x^2 - y^2)^2 (x^2 + y^2) = (ax^2 - by^2)^2.$$

**24.** Lieu du point d'intersection de OA′ avec AD′ :

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 b^2 (a + b)^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

**25.** Lieu du point d'intersection de AD′ avec la droite symétrique de OA′ par rapport aux axes de E:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 b^2}{(a - b)^2}.$$

**96.** Lieu du point d'intersection de $OA''$ avec $AD'$ :

$$b^4x^2 + a^4y^2 = a^2b^2(a+b)^2.$$

**97.** Lieu du point d'intersection de $OA'''$ avec $AD$ :

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2(b^4x^2 + a^4y^2) = a^2b^2(b^2x^2 - a^2y^2)^2.$$

**98.** Lieu du point d'intersection de $OA'''$ avec $BC$ :

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = R^2(b^4x^2 + a^4y^2),\quad U = \frac{\pi ab(a^2+b^2)}{2(a+b)^2}.$$

**99.** Lieu du point d'intersection de $OA'''$ avec $B'C'$ :

$$(bx^2 + ay^2)^2 = \frac{a^2b^2}{(a+b)^4}(b^2x^2 + a^2y^2);\quad U = \frac{\pi ab\sqrt{ab}(a^2+b^2-ab)}{2(a+b)^3}.$$

**100.** Lieu du point d'intersection de $OA'''$ avec la perpendiculaire abaissée de A sur BC :

$$b^4x^6 + a^4y^6 = \frac{a^4b^4}{(a+b)^2}.$$

**101.** Lieu du point d'intersection de $OA'''$ avec la normale à E en A :

$$b^4x^2 + a^4y^2 = \frac{a^4b^4(a+b)^2}{(a^2+b^2+ab)^2}.$$

**102.** Lieu du point d'intersection de $OA'''$ avec la tangente à E en A :

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = a^2b^2(b^4x^2 + a^4y^2);\quad U = \frac{\pi}{2}(a+b)\sqrt{ab}.$$

L'aire de cette courbe est la même que celle de la courbe (3).

**103.** Lieu du point d'intersection de $OA'''$ avec la droite $AA'$ :

$$b^4x^2 + a^4y^2 = \frac{a^4b^4}{4(a+b)^2}.$$

**104.** Le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle des neuf points des triangles DBC et D'BC, décrivent des courbes du genre des courbes du n° 58.

**105.** Aire du lieu du centre de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrilatère ABCD :

$$U = \frac{3\pi(a^2+b^2)^2}{4(a+b)^2}.$$

On voit, d'après (45), que *le rapport de l'aire du lieu du centre du cercle*

*circonscrit à* ABCD *à l'aire du lieu du centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à* ABCD, *est* $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2$.

**106.** Le lieu du milieu de la distance des centres du cercle et de l'hyperbole équilatère circonscrits au quadrilatère ABCD est une courbe analogue aux courbes du n° 58.

**107.** Aire du lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD :

$$U = \frac{3}{4}\pi R^2.$$

**108.** Aire du lieu du centre de l'hyperbole d'Apollonius passant par A, B, C, D' : $U = 3\pi R^2$.

**109.** Lieu du quatrième point de rencontre des deux hyperboles équilatères circonscrites aux quadrilatères ABCD et ABCD' : Ce lieu est la courbe du n° 48.

**110.** Le point de rencontre des axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD décrit une courbe du genre de la courbe du n° 58.

**111.** Lieu du point de rencontre de la tangente en A'' à Σ avec la perpendiculaire abaissée de A sur le grand axe de E :

$$y^2 = \frac{(x^2 - aR)^2}{a^2 - x^2}.$$

**112.** Lieu du point de rencontre de la tangente en A'' à Σ avec la perpendiculaire abaissée de A sur le petit axe de E :

$$x^2 = \frac{(y^2 - bR)^2}{b^2 - y^2}.$$

**113.** Aire du lieu du centre des cercles circonscrits aux triangles D'BC, D'AB, D'AC :

$$U = \frac{\pi}{4}(a-b)^2.$$

**114.** Aire du lieu du centre de gravité du triangle AB'C' :

$$U = \frac{\pi}{9}\left[ab + 4R^2 + \frac{2R^4(a^2+b^2)}{a^2b^2}\right].$$

**115.** Aire du lieu du centre de gravité du triangle A''BC :

$$U = \frac{\pi R^2}{9ab}[2(a^2+b^2) - 3ab].$$

**116.** Aire de l'enveloppe de la parallèle menée par A à BC :

$$U = \pi ab - \frac{\pi(a-b)^2}{8}.$$

**117.** Lieu de la projection de O sur la parallèle menée par A à BC :

$$(x^2+y^2)^3 = (ax^2+by^2)^2\,; \quad U = \pi ab + \frac{3\pi(a-b)^2}{8}.$$

**118.** Voir la propriété 110 d'un article sur les Cercles de Chasles (*Mathesis*, (2). V, p. 249).

REMARQUE. Le cercle de rayon $\left(\frac{ab}{a+b}\right)$ offre une analogie curieuse avec le cercle de Chasles de rayon $(a+b)$; on pourrait aussi étudier le cercle de rayon $\left(\frac{ab}{a-b}\right)$ qui a de l'analogie avec le cercle de Chasles de rayon $(a-b)$.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

I. **Vorlesungen über Geschichte der Mathematik**, von MORITZ CANTOR. Zweiter Band. Zweiter Halbband. Von 1550-1668. Mit 97 in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1900 (XII et 481 à 943 pp. gr. in 8). Prix : 12 marcs.

II. **Cantor's Festschrift.** Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik Neuntes Heft, mit einem Porträt in Heliogravure, zwei Tafeln und 55 Figures im Text. Herrn Hofrat und Professor Dr. Moritz Cantor bei der 70. Wiederkehr des Tages seiner Geburt am 23. August 1899 dargebracht von seinen Freunden und Verehrern Im Auftrage herausgegeben von M. Curtze in Thorn und S. Günther in München. Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1899 (VIII-657 pp. in 8°). Prix : 20 marcs.

I. La seconde partie du tome deuxième de la nouvelle édition du grand ouvrage de Cantor, en contient les chapitres 64-81, dont les trois premiers sont consacrés aux mathématiciens italiens de 1500 à 1550 et, en particulier, à Tartaglia, à Cardan et à la découverte de la résolution de l'équation cubique. Nous avons indiqué autrefois, à propos de la première édition (*Mathesis*, 1893, (2), III, 16), les principales subdivisions de l'ouvrage pour les périodes de 1550 à 1600 et de 1600 à 1668. Elles ont été conservées dans la nouvelle édition, mais l'auteur a introduit une foule d'améliorations de détail dans chaque chapitre. On trouve des additions surtout dans les pages consacrées à Cardan, Tartaglia, Bombelli, Forcadel, Clavius, Praetorius, Neper, Bürgi, Kepler, Huygens.

Dans la préface, l'auteur indique en outre un certain nombre de corrections ou d'additions qui lui ont été suggérées par diverses publications pendant l'impression de son livre.

Le livre de Cantor constitue le *Standard-Book* sur l'histoire des Mathématiques,

à cause de son étendue et de sa valeur intrinsèque. Nous ne pouvons que le recommander une fois de plus à l'attention des professeurs (*).

II. Le beau volume offert, par ses admirateurs et ses amis, à l'éminent historien des mathématiques, à l'occasion du 70e anniversaire de sa naissance, contient trois mémoires en français par Bobynine, Mansion et P. Tannery; deux en anglais par Heath et Cajori; deux en italien, par Favaro et G. Loria; vingt cinq en allemand, dont deux par les historiens de la physique, Rosenberger et Heller; cinq sur les mathématiques grecques, par A. Sturm, A. Nagl, Suter, Hultsch, Heiberg; huit sur le moyen-âge et la renaissance, par Cürtze, Günther, F. Müller, E. Wappler, H. Staigmüller, Steinschneider, Huntath et v. Braunmühl; cinq sur le 17e et le 18e siècle, par Wohlwill, Wertheim, J. H. Graf, Enestrœm, E. Gelcich; cinq sur les mathématiques modernes par Dickstein, Stäckel, F. Meyer, Unger. Une liste des livres, mémoires, notes de Cantor, par Cürtze (26 pages en petits caractères) et un index terminent le volume. (P. M.)

---

**Principales formules de la théorie des fonctions elliptiques.** Tableau résumé publié par les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1900 (10 p. in-8°). Prix : 75 centimes.

Tous ceux qui se sont occupés de la théorie des fonctions elliptiques savent combien il est difficile d'en retenir les formules d'une manière permanente. C'est pourquoi, en France, on permet aux candidats à l'agrégation de mathématiques de se servir du tableau résumé qui a été publié par les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le choix des formules qui entrent dans le tableau nous semblent très judicieux. En voici la liste sommaire : *Fonctions de Weierstrass* : Développement en produits infinis et en séries $\sin u$, $\cot u$, $\text{cosec}^2 u$ $\sigma u$, $\zeta u$, $pu$, $p'u$. Développement en séries entières de $\sigma u$, $\zeta u$, $pu$, $g_2$, $g_3$ Relations entre $pu$ et ses dérivées, homogénéité, dégénérescence, périodicité et formules d'addition. Racines $e_1$, $e_2$, $e_3$; fonctions $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$; valeurs réelles de $pu$ quand $\omega$, $\omega'i$ sont réelles. *Fonctions de Jacobi*. Séries et produits infinis; addition d'une demi-période ou d'une période; relations avec les fonctions $\sigma$. *Fonctions* $\text{sn}u$, $\text{cn}u$, $\text{dn}u$. Relations avec les fonctions theta; addition d'une demi-période ou d'une période; argument purement imaginaire; relation entre $pu$ et $\text{sn}u$; valeurs réelles quand K et K' sont réelles [ces valeurs sont les mêmes dans tous les cas]; formules d'addition; dérivées; séries entières; dernières notations de Jacobi pour les fonctions *théta*. (P. M.)

---

(*) Dans la *Bibliotheca mathematica* d'Enestrœm, 1900, (3), I, 265-274, on trouve des remarques de détail dues à divers auteurs sur les deux premiers volumes de l'ouvrage de Cantor; dans le *Bollettino* de G. Loria, 1900, pp 41-46 des indications complémentaires sur divers sujets traités dans le second volume. Ainsi, grâce à la collaboration de tous ceux qui s'occupent d'histoire des mathématiques, on espère donner à la *Geschichte der Mathematik* du savant professeur de Heidelberg, dans ses éditions successives, une perfection de plus en plus grande.

**Pages choisies des savants modernes**, extraites de leurs œuvres par A. Rebière. Orné de portraits. Paris, Nony et Cie (VIII-618 pages in-8°).

Pour faire connaître à nos lecteurs le but du présent ouvrage qui complète si heureusement *la vie et les travaux des savants modernes*, du même auteur, nous empruntons à l'avant-propos les lignes suivantes :

« On a publié de nombreux *Morceaux choisis* des écrivains, des poètes, des historiens et des philosophes. Mais ce qui a été fait — avec une certaine outrance — pour les Lettres, restait encore à faire pour les Sciences. On peut en être surpris, étant donnée l'importance toujours croissante de ces dernières, pendant le siècle qui va finir.

Nos savants classiques ne se bornaient pas à instruire leurs disciples directs, ils parlaient aussi aux autres hommes dans les préfaces, les têtes de chapitre, les résumés et les notes de leurs ouvrages. Il suffisait de réunir ce qui était ainsi dispersé.

.... On trouvera dans ce recueil, non seulement des aperçus purement scientifiques, mais encore des extraits sur l'histoire et la philosophie des sciences et aussi sur les Méthodes de découverte et d'enseignement.

.... Il faudrait, pour compléter le tableau, deux autres volumes, l'un consacré aux Savants de l'Antiquité et du Moyen-Age et l'autre aux Savants contemporains. »

M. Rebière vient de mourir, le 21 février dernier, à l'âge de cinquante-huit ans. Il est à désirer que les deux volumes qu'il annonce à la fin de l'avant-propos et pour lesquels il avait sans doute déjà réuni des documents viennent compléter la série des ouvrages si instructifs qu'il a publiés sur les Savants et leurs travaux.

La lecture des *Pages choisies* est fort attrayante. L'auteur a réuni plus de deux cents morceaux, d'un caractère très varié, empruntés aux écrits de soixante-treize savants des plus illustres, mathématiciens, astronomes, physiciens, chimistes ou naturalistes. Son livre est éminemment propre à inspirer à la jeunesse le goût des sciences.

L'exécution typographique est irréprochable; elle fait honneur à la maison Nony. (J. N.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

### Question 1002.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 32).

*Si une courbe algébrique dépourvue de nœuds et de rebroussements est de l'ordre* n, *sa podaire a* 3n *points d'inflexion.* (V. Retali).

*Solution par* M. V. Retali. Comme la courbe donnée est générale de son ordre, en appelant $m$ sa classe $n(n-1)$, la podaire est en général, de l'ordre $\nu = 2m$ et de la classe $\mu = n + \nu$; et, puisqu'elle ne possède

pas de points multiples en dehors des ses trois points $m^{\text{tuples}}$ au pôle et aux points circulaires, le nombre de ses rebroussements est zéro, et, par suite, celui de ses points d'inflexion est

$$\iota = 3(\mu - \nu) = 3n.$$

On démontre de même que l'inverse de la courbe donnée a $3m$ points d'inflexion.

---

## ×Question 1050.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 280.)

*Calculer en fonction des côtés* AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, *le rapport des segments déterminés sur le côté* AD *d'un pseudo-carré par la perpendiculaire* MP *abaissée du milieu* M *du côté opposé* BC. (E. COLART.)

*Solution* par M. FAIRON (Seraing). Soient AC $= f$, BD $= g$, AM $= m$, DM $= n$, AP $= p$, DP $= q$. On trouve facilement

$$m^2 = n^2 + d^2 - 2dq, \quad n^2 = m^2 + d^2 - 2dp, \tag{1}$$

$$a^2 + f^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2}, \quad c^2 + g^2 = 2n^2 + \frac{b^2}{2}; \tag{2}$$

de (1) et (2) on tire respectivement

$$\frac{p}{q} = \frac{m^2 - n^2 + d^2}{n^2 - m^2 + d^2}, \quad a^2 - c^2 + f^2 - g^2 = 2(m^2 - n^2).$$

Donc, si $f = g$, on a

$$\frac{p}{q} = \frac{a^2 - c^2 + 2d^2}{c^2 - a^2 + 2d^2}.$$

Si l'on applique la règle des signes aux segments AP, DP, on doit écrire

$$\frac{p}{q} = \frac{a^2 - c^2 + 2d^2}{a^2 - c^2 - 2d^2}.$$

---

## ×Question 1071.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 188).

*Au cercle* I, *inscrit à un triangle équilatéral* ABC, *on mène une tangente quelconque, qui coupe les côtés du triangle aux points* $\alpha, \beta, \gamma$, *de chacun desquels on mène la seconde tangente respectivement aux cercles exinscrits*

$I_a$, $I_b$, $I_c$. *Chercher les lieux des sommets du triangle formé par ces droites.* (E. Duporcq.)

*Solution géométrique* par M. Droz Farny. Appelons T la quatrième tangente commune aux cercles $I_b$, $I_c$, et soient $\beta'$, $\gamma'$ les points où cette droite est rencontrée par la seconde tangente menée de $\beta$ au cercle $I_b$, et de $\gamma$ au cercle $I_c$. Les couples $\beta\gamma$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ engendrent des ponctuelles projectives : par suite, les points $\beta'$, $\gamma'$ se correspondant dans deux ponctuelles projectives. Mais lorsqu'on suppose $\beta$ en A, $\gamma$ coïncide avec le point de contact de AB avec le cercle I, et les droites $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ coïncident toutes deux avec AB; les points $\beta'$, $\gamma'$ sont alors confondus. Ces points sont encore confondus lorsque $\gamma$ coïncide avec A ou $\beta$ avec C et $\gamma$ avec B. Donc les ponctuelles $(\beta')$, $(\gamma')$ ayant trois points doubles sont identiques: T est donc le lieu du point de concours des tangentes menées de $\beta$ au cercle $I_b$ et de $\gamma$ au cercle $I_c$.

Note. D'après cette démonstration ingénieuse, si $\Sigma$ est une conique quelconque touchant les côtés d'un triangle quelconque ABC aux points A', B', C' et si $\Sigma_a$, $\Sigma_b$, $\Sigma_c$, sont trois autres coniques inscrites dont la première touche BC en A', la seconde CA en B', la troisième AB en C', toute tangente menée à $\Sigma$ rencontre BC, CA, AB en trois points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels, que les secondes tangentes menées de $\alpha$ à $\Sigma_a$, de $\beta$ à $\Sigma_b$, de $\gamma$ à $\Sigma_c$ forment un triangle inscrit au triangle qui a pour côtés les quatrièmes tangentes communes aux courbes $\Sigma_a$ $\Sigma_b$ $\Sigma_c$ considérées deux à deux. La transformation par polaires réciproques conduit à un autre théorème intéressant. (J. N.).

*Solution analytique* par M. Deprez. Soit A' le point d'intersection des secondes tangentes menées de $\beta$ au cercle $I_b$ et de $\gamma$ au cercle $I_c$. Les droites $A'\beta$, $A'\gamma$ étant représentées par

$$x + \mu y + \nu z = 0, \quad x + \mu' y + \nu' z = 0, \qquad (1), (2)$$

et les cercles $I_b$, $I_c$ ayant pour équations

$$\sqrt{x} + \sqrt{-3y} + \sqrt{z} = 0, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{-3z} = 0,$$

on a les conditions

$$1 - \frac{3}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 0, \quad 1 + \frac{1}{\mu'} - \frac{3}{\nu'} = 0. \qquad (3), (4)$$

La droite $\beta\gamma$ aura pour équation $x + \mu' y + \nu z = 0$; pour qu'elle touche le cercle I, qui a pour équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0$, on doit avoir

$$1 + \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\nu} = 0. \qquad (5)$$

On aura donc l'équation du lieu (A') en éliminant $\mu, \nu, \mu', \nu'$ entre (1), (2), (3), (4) et (5). En comparant (3), (4), (5) on trouve $\mu = -3\mu'$, $\nu' = -3\nu$, ce qui ramène les équations (1), (2) à la forme

$$x - 3\mu' y + \nu z = 0, \quad x + \mu' y - 3\nu z = 0. \qquad (6)$$

Tirons de (6) les valeurs de $\mu'$ et $\nu$ pour les porter dans (5); il vient

$$x + 2y + 2z = 0.$$

Le lieu de A est donc la droite symétrique de BC par rapport à A.

Autre solution analytique par M. Emmerich.

---

## Question 1092.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 240 et 279.)

*La tangente en un point* M *quelconque d'une ellipse rencontre le grand axe en* T *et le petit axe en* T'; *la normale au même point* M *rencontre le grand axe en* N *et le petit axe en* N'. *La normale au point* $M_1$ *conjugué de* M *rencontre le grand axe en* $N_1$ *et le petit axe en* $N'_1$; *la tangente en* $M_1$ *rencontre le grand axe en* $T_1$ *et le petit axe en* $T'_1$. *Montrer que :*

1° *Le lieu du point de rencontre des droites* $NN'_1$ *et* $N_1N'$ *est une ellipse.*

2° *Le lieu du point de rencontre des droites* $TT'_1$ *et* $T_1T'$ *est une quartique.*

3° *Le lieu du point de rencontre des droites* $NN'_1$, $TT'_1$, *ainsi que le lieu du point de rencontre des droites* $N_1N'$ *et* $T_1T'$ *se composent chacun d'une hyperbole équilatère.*

4° *Le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur la perpendiculaire élevée à* TT' *en son milieu, est une kreuzcurve.*

5° *La perpendiculaire élevée à* NN' *en son milieu enveloppe une courbe fermée dont on demande d'évaluer l'aire.*

6° *La projection du centre de l'ellipse sur la perpendiculaire précédente est une courbe du 6e degré dont on demande l'aire.*

7° *Les perpendiculaires élevées à* NN' *et* $N_1N'_1$ *en leurs milieux se rencontrent sur une courbe dont on demande l'aire.* (E. N. Barisien.)

*Solution par* M. V. Cristesco (Bucarest). Soient ($a \cos\varphi$, $b \sin\varphi$) les

coordonnées de M, et $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$ celles de $M_1$. Les équations des tangentes et des normales en M et $M_1$ seront :

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1,\quad -\frac{x}{a}\sin\varphi+\frac{y}{b}\cos\varphi=1;$$

$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=c^2,\quad \frac{ax}{\sin\varphi}+\frac{by}{\cos\varphi}=-c^2;$$

et, par suite, les coordonnées des points où ces droites rencontrent les axes, sont :

$$T\left(\frac{a}{\cos\varphi},0\right),\quad T'\left(0,\frac{b}{\sin\varphi}\right);\quad T_1\left(-\frac{a}{\sin\varphi},0\right),\quad T'_1\left(0,\frac{b}{\cos\varphi}\right);$$

$$N\left(\frac{c^2\cos\varphi}{a},0\right),\quad N'\left(0,-\frac{c^2\sin\varphi}{b}\right);$$

$$N_1\left(-\frac{c^2\sin\varphi}{a},0\right),\quad N'_1\left(0,-\frac{c^2\cos\varphi}{b}\right).$$

1° Les équations des droites $NN'_1$, $N_1N'$ sont respectivement :

$$ax-by=c^2\cos\varphi,\quad ax+by=-c^2\sin\varphi;\qquad (1),\ (2)$$

elles se rencontrent donc sur l'ellipse :

$$a^2x^2+b^2y^2=\frac{1}{2}c^4.$$

2° Les équations des droites $TT'_1$, $T_1T'$ sont

$$(bx+ay)\cos\varphi=ab,\quad (bx-ay)\sin\varphi=-ab.\qquad (3).\ (4)$$

Leur point de rencontre décrit donc la quartique :

$$(b^2x^2-a^2y^2)^2-2a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)=0.$$

3° Si l'on élimine $\cos\varphi$ entre les équations (1) et (3), et $\sin\varphi$ entre les équations (2) et (4), on trouve que les lieux des points de rencontre des droites $NN'_1$, $TT'_1$ et $N_1N'$, $T_1T'$ sont les hyperboles équilatères :

$$abx^2\pm c^2xy-aby^2-c^2ab=0.$$

4° L'équation de la perpendiculaire élevée à $TT'$ en son milieu, et celle de la perpendiculaire menée du centre de l'ellipse sur la droite perpendiculaire précédente, sont respectivement

$$2(ax\sin\varphi-by\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi=a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi,\qquad (5)$$

$$bx\cos\varphi+ay\sin\varphi=0.\qquad (6)$$

L'équation (6) donne

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{bx}{ay},$$

et, par suite,

$$\sin\varphi = \frac{bx}{\pm\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{ay}{\mp\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}},$$

les signes se correspondant, en vertu de l'équation (6).

En portant ces valeurs dans l'équation (5), on obtient la kreuzcurve

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4.$$

5° L'équation de la perpendiculaire élevée à NN' en son milieu, est :

$$2ab\,(bx\cos\varphi + ay\sin\varphi) + c^2(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi) = 0. \qquad (7)$$

La dérivée par rapport à $\varphi$ est :

$$2ab\,(-bx\sin\varphi + ay\cos\varphi) + 2c^2(a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0. \qquad (8)$$

Les coordonnées d'un point de l'enveloppe seront donc :

$$x = \frac{c^2}{2ab^2}[a^2+2b^2-(a^2+b^2)\cos^2\varphi]\cos\varphi,$$

$$y = -\frac{c^2}{2a^2b}[2a^2+b^2-(a^2+b^2)\sin^2\varphi]\sin\varphi.$$

La différentielle de l'aire A de cette courbe est $ydx$, ou

$$\frac{c^4}{4a^3b^3}[2a^2+b^2-(a^2+b^2)\sin^2\varphi][a^2+2b^2-3(a^2+b^2)\cos^2\varphi]\sin^2\varphi d\varphi.$$

En remplaçant $\cos^2\varphi$ par $1-\sin^2\varphi$, on trouve pour l'aire totale A :

$$A = \frac{c^4}{a^3b^3}\left[4(a^2+b^2)(2a^2+b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi - \right.$$

$$\left.(2a^2+b^2)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi - 3(a^2+b^2)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi d\varphi\right].$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi d\varphi = \frac{5\pi}{32}.$$

Donc

$$A = \frac{\pi c^4}{32a^2b^2}(a^4 + 10a^2b^2 + b^4) = \frac{3\pi c^4}{8ab} + \frac{\pi(a^2 - b^2)^4}{32a^2b^2}.$$

6° L'équation de la perpendiculaire menée du centre de l'ellipse sur la droite (7) est

$$ax \sin\varphi - by\cos\varphi = 0. \qquad (9)$$

L'équation (9) donne

$$\sin\varphi = \frac{by}{\pm\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{ax}{\pm\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}}$$

les signes se correspondant. En remplaçant dans (7), on trouve que le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur la perpendiculaire élevée à NN' en son milieu, a pour équation

$$4(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) - c^4(x^2 - y^2)^2 = 0.$$

En passant aux coordonnées polaires, on a

$$\rho^2 = \frac{c^4}{4}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}.$$

L'aire d'un secteur étant $\frac{1}{2}\int\rho^2 d\theta$, l'aire totale sera

$$A = \frac{c^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta,$$

ou

$$A = \frac{c^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} - 2c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} +$$

$$2c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}. \qquad (10)$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2ab}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2a(a+b)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{1}{a^2 - b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta -$$

$$\frac{b^2}{a^2-b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=\frac{\pi(a+2b)}{4a(a+b)^2}.$$

En remplaçant dans l'égalité (10), et faisant toutes les réductions, on trouve :

$$A=\frac{\pi(a-b)^2(a^2+b^2)}{4ab(a+b)}.$$

7° Les équations des perpendiculaires élevées à NN′ et $N_1N_1'$ en leurs milieux, sont respectivement :

$$2ab(bx\cos\varphi+ay\sin\varphi)+c^2(a^2\sin^2\varphi-b^2\cos^2\varphi)=0,$$

$$2ab(bx\sin\varphi-ay\cos\varphi)-c^2(a^2\cos^2\varphi-b^2\sin^2\varphi)=0.$$

Les coordonnées d'un point de leur intersection sont donc :

$$x=\frac{c^2}{2ab^2}[a^2-(a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi](\cos\varphi-\sin\varphi),$$

$$y=-\frac{c^2}{2a^2b}[a^2-(a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi](\cos\varphi+\sin\varphi).$$

La différentielle de l'aire d'un secteur de la courbe sera donc :

$$\tfrac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{c^4}{8a^2b^2}[a^4+b^4-2(a^4-b^4)\sin\varphi\cos\varphi$$

$$-2(a^2+b^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi]d\varphi.$$

L'aire totale A s'obtiendra en faisant varier $\varphi$ de 0 à $2\pi$ ; elle sera donc :

$$A=\frac{c^4}{8a^2b^2}\left[(a^4+b^4)\int_0^{2\pi}d\varphi-2(a^4-b^4)\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right.$$

$$\left.-2(a^2+b^2)^2\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\right].$$

Or

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=0,\quad\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$A=\frac{\pi c^4}{16a^2b^2}(3a^4-2a^2b^2+3b^4)=\frac{\pi c^4}{4ab}+\frac{3\pi(a^2-b^2)^4}{16a^2b^2}.$$

## Question 1216.

(Voir *Mathesis*, 2, IX, p. 104).

***Etant donnée une ellipse, soient*** F ***un des foyers,*** MM′ ***une corde quelconque passant par*** F, I ***le milieu de cette corde*** MM′, K ***et*** K′ ***les foyers de l'ellipse lieu du point*** I, K ***étant le foyer le plus rapproché de*** F. ***Démontrer les relations :***

$$MM' + 2IK' = \textit{constante}, \quad MM' - 2IK = \textit{constante}.$$

(E. N. Barisien.)

*Solution par* M. Soons. L'ellipse donnée ayant pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

si nous appelons $x'$ et $x''$ les abscisses de M et M′, celle de I sera $x_1 = \frac{1}{2}(x' + x'')$ et nous aurons

$$MF = a - \frac{cx'}{a}, \quad M'F = a - \frac{cx''}{a};$$

d'où

$$MM' = 2a - \frac{2cx_1}{a}.$$

L'équation du lieu du point I étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 - b^2cx = 0,$$

cette courbe est une ellipse, dont les axes sont $c$, $\frac{cb}{a}$ et dont le centre a pour coordonnées $\frac{1}{2}c$, 0 ; on a donc

$$IK' = \frac{c}{2} + \frac{c}{a}\left(x_1 - \frac{c}{2}\right);$$

ce qui donne l'égalité

$$MM' + 2IK' = 2a - \frac{2cx_1}{a} + c + \frac{2c}{a}\left(x_1 - \frac{c}{2}\right) = 2a + c - \frac{c^2}{a}.$$

De ce que IK′ + IK = constante, on déduit la seconde relation.

Ont résolu la même question MM. Emmerich, Deprez et Droz Farny

**Question 1958.**

*Mathesis.* (2) X, p. 56).

*Dans un triangle isoscèle* ABC. *de base* BC, *représentons par* $h$ *la hauteur issue de* A, *et par* H *les hauteurs égales issues des sommets* B *et* C. *Suivant que l'angle* A *est supérieur ou inférieur à un droit,* $H^2$ *est supérieur ou inférieur à* $2h^2$. (Droz-Farny).

Cette question a été résolue par MM. Barisien, Cataldi, Couturier, Delahaye, Descans. Emmerich, Fairon, François, Lafontaine (Liège), Lebouco (Gand), Rose, Cl. Thiry et Andrien.

Ces solutions emploient la trigonométrie ou le théorème de Pythagore généralisé. La proposition admet cependant une démonstration très élémentaire. Soit D le milieu de BC; en égalant deux expressions de la surface ABC, on obtient

$$\frac{H}{h} = \frac{2BD}{AB}. \qquad (1)$$

Si l'on construit sur BC le triangle rectangle isoscèle A'BC, on a

$$\frac{H}{h} = \frac{2BD}{A'B} = \sqrt{2}.$$

Suivant que $A > 90°$ ou $< 90°$, on a $AD < A'D$ ou $> A'D$, $AB < A'B$ ou $> A'B$, et par suite

$$\frac{H}{h} = \frac{2BD}{AB} > \frac{2BD}{A'B} \text{ ou } < \frac{2BD}{A'B}.$$

M. Emmerich prend le symétrique F de D par rapport à AB et obtient ainsi un triangle isoscèle ADE ayant pour côtés $AD = AF = h$, $DF = H$; l'angle $EAD = BAC$. Il applique à ce triangle le théorème de Pythagore généralisé on plutôt le corollaire d'après lequel on a $a^2 > b^2 + c^2$, $= b^2 + c^2$ ou $< b^2 + c^2$ suivant que $A > 90°$, $= 90°$ ou $< 90°$.

M. Emmerich examine aussi le rapport $tg^2 H : 2\, tg^2 h$ dans le triangle isoscèle sphérique.

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

### Concours de 1900.

I. Dans le plan (P) d'une section plane d'une surface (E), pour trouver les normales à la section issues d'un point O, on peut employer la méthode suivante : couper (E) par une sphère (S), et déterminer le rayon $r$ de la sphère de façon que le plan (P) soit tangent au cône (C) qui a pour sommet le point O et pour directrice l'intersection (E, S). La génératrice de contact OG est normale à la section plane au point G où elle rencontre la directrice (E, S) du cône (C).

Justifier la méthode.

II. *Première application.* On coupe l'ellipsoïde

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

par le plan

$$\text{(P)} \qquad ux+vy+wz=0.$$

Sur le diamètre perpendiculaire, on porte à partir du centre une longueur OM dont le carré soit moyenne harmonique entre les carrés des demi-axes $\alpha$ et $\beta$ de la section :

$$\frac{2}{\overline{OM}^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}.$$

Lieu du point M, quant (P) pivote autour du point O.

III. *Deuxième application.* Même problème en remplaçant la longueur OM par la longueur ON déduite de la formule

$$\frac{1}{ON}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}.$$

Etudier la forme du lieu du point N, et celle des sections parallèles aux trois plans des coordonnées.

On conservera les notations indiquées.

---

## *QUESTIONS D'EXAMEN.

**950.** La somme des carrés de quatre termes d'une équidifférence est une somme de trois carrés. (DE ROCQUIGNY.)

C'est l'interprétation de l'identité

$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha+\gamma)^2+(\alpha+\beta)^2=(2\alpha)^2+(\beta+\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2.$$

**951.** Dans tout quadrilatère convexe ABCD,

$$\sin A\,[\sin B + \sin C - \sin(A+D)]\,[\sin C + \sin D - \sin(C+D)] = \sin C\,[\sin A + \sin B - \sin(C+D)]\,[\sin A + \sin D - \sin(A+D)].$$

(DAVIS.)

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1273.** Soient AA'A''..., BB'B''..., deux génératrices opposées sur un cylindre circulaire droit, ABA'B'A''B''... un arc d'hélice; (A),(A');... (B), (B')... les plans perpendiculaires à l'axe passant par les points A, A',... B, B',...

On demande les perspectives de l'hélice sur les plans (A'), (A''),.. (B), (B'), (B''),... selon que le point de vue est 1° en A, 2° au centre O de la base située dans le plan (A). (H. BROCARD.)

×**1274.** On projette un point quelconque M du plan d'un triangle ABC en $P_a$, $P_b$, $P_c$ sur les côtés BC, CA, AB, et en $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ sur les hauteurs AA', BB', CC'. Démontrer que les droites $P_aQ_a$, $P_bQ_b$, $P_cQ_c$ concourent en un même point; ces droites sont parallèles lorsque M appartient à la circonférence des neuf points du triangle ABC.

(SPORER.)

Généraliser cette proposition par voie de perspective et démontrer directement le théorème généralisé par la géométrie projective ou analytiquement.

Énoncer la proposition corrélative. (J. N.)

**1275.** Soient $a_1$, $a_2$, $a_3$,... des nombres qui tendent vers une limite $a$. Démontrer que

$$\lim_{n=\infty} (a_1^{u_n} a_2^{u_{n-1}} a_3^{u_{n-2}} \cdots a_n^{u_1}) = a^s,$$

$s$ étant la limite de la série $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ (E. CESÀRO.)

**1276.** Étant données une hyperbole équilatère dont $\overline{AB}$ est l'axe transverse et une parabole ayant pour foyer le centre de l'hyperbole et pour directrice la tangente au sommet B, une tangente mobile de la parabole coupe l'hyperbole aux points $H_1$, $H_2$ : on demande l'enveloppe des ellipses qui ont $H_1H_2$ pour diamètre et passent par les deux points fixes A, B. (V. RETALI.)

# SUR LES TRIANGLES TRIHOMOLOGIQUES;

par M. J. A. THIRD.

1. Considérons deux triangles trihomologiques ABC et A'B'C', c'est-à-dire tels que les droites AA', BB', CC' concourent en un point $S_1$; que les droites AB', BC', CA' concourent en un point $S_2$; et que les droites AC', BA', CB' concourent en un point $S_3$. Les droites BC, CA, AB seront alors rencontrées par les droites B'C', C'A', A'B' en trois points $D_1, E_1, F_1$ situés sur une même droite $u_1$; par les droites C'A', A'B', B'C' en trois points $D_2, E_2, F_2$ d'une même droite $u_2$; par les droites A'B', B'C', C'A' en trois points $D_3, E_3, F_3$ d'une même droite $u_3$.

Cela posé, 1° il existe une conique $\Sigma_1$ qui touche les droites $AD_1$, $BE_1$, $CF_1$ aux points A, B, C et qui passe par les points $S_2$, $S_3$; 2° il existe une conique $\sigma_1$ qui touche BC, CA, AB aux points $D_1$, $E_1$, $F_1$ et qui est également tangente aux droites $u_2$, $u_3$.

Ces propositions étant corrélatives, il suffira de démontrer la première. Si l'on remplace A'B'C' par B'C'A' ou par C'A'B', on trouve deux coniques $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ analogues à $\Sigma_1$, et deux coniques $\sigma_2$, $\sigma_3$, analogues à $\sigma_1$.

Prenons ABC comme triangle de référence, et soient $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les coordonnées des points A', B', C'.

En exprimant que les droites AA', BB', CC' sont concourantes, de même que les droites AB', BC', CA', on trouve

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 = \alpha_2\beta_3\gamma_1 = \alpha_3\beta_1\gamma_2, \qquad (1)$$

et la forme de ces égalités montre que les droites AC', BA', CB' concourent également en un même point.

Des relations (1) on conclut

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{1}{\beta_1\gamma_2} : \frac{1}{\gamma_1\alpha_2} : \frac{1}{\alpha_1\beta_2}. \qquad (2)$$

Il en résulte qu'on peut prendre pour les coordonnées des centres d'homologie :

$S_1, (\gamma_1\alpha_2, \beta_1\gamma_2, \gamma_1\gamma_2)$; $S_2, (\alpha_1\beta_2, \beta_1\beta_2, \beta_1\gamma_2)$; $S_3, (\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2, \gamma_1\alpha_2)$;

puis, que les axes d'homologie ont pour équations :

$$\frac{x}{\alpha_1\beta_2(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)} + \frac{y}{\alpha_1\beta_2(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)} + \frac{z}{\gamma_1\gamma_2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)} = 0, \quad \text{etc.}$$

On trouve ensuite pour l'équation de la conique $\Sigma_1$ circonscrite au triangle ABC et touchant les droites $AD_1$, $BE_1$, $CE_2$ :

$$\frac{\alpha_1\beta_2(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)}{x} + \frac{\alpha_1\beta_2(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)}{y} + \frac{\gamma_1\gamma_2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}{z} = 0.$$

On voit immédiatement que cette courbe passe par les points $S_2$, $S_3$.

2. Passons à quelques corollaires ou cas particuliers.

A. Le théorème suivant est évidemment compris dans le théorème général : si une conique variable $\sigma$ touche les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC en X, Y, Z, et touche une droite fixe $u$ qui coupe BC, CA, AB en D, E, F, le lieu du point S, où AX, BY, CZ concourent, est la conique $\Sigma$ circonscrite à ABC et touchant AD, BE, CF.

Si nous projetons $u$ à l'infini, $\sigma$ se transforme en une parabole ; AD, BE, CF deviennent parallèles à BC, CA, AB, et, par suite, $\Sigma$ devient l'ellipse de Steiner de ABC; ce qui nous donne le théorème suivant :

Si une parabole variable touche les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC aux points X, Y, Z, le lieu du point de concours S de AX, BY, CZ est l'ellipse de Steiner du triangle (*).

Signalons ici un autre cas particulier :

Soit $u$ la quatrième tangente commune de deux cercles qui touchent les côtés de ABC, et désignons par D, E, F les points où $u$ rencontre BC, CA, AB; la conique circonscrite à ABC et touchant AD, BE, CF passe par les deux points de Gergonne correspondants. Cette conique a pour centre le milieu de l'un des côtés de ABC.

B. Si le triangle A'B'C' du cas général, se réduit à trois points situés sur une même droite $u$, les axes $u_1$, $u_2$, $u_3$ coïncident avec $u$, et les coniques $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ se confondent; ce qui nous donne le théorème suivant :

Soit $\Sigma$ une conique circonscrite à un triangle ABC, et soit $u$ la droite passant par les points où les tangentes à $\Sigma$ menées par les sommets coupent les côtés opposés. Les droites qui joignent A, B, C à un point quelconque $S_1$ de $\Sigma$ rencontrent $u$ en trois point A', B', C', tels que les droites AB', BC', CA' concourent en un point $S_2$ de $\Sigma$ et que les droites AC', BA', CB' se rencontrent en un point $S_3$ de $\Sigma$.

---

(*) Voir *Theorie der Kegelschnitte* (Steiner-Schröter, 1867), p. 287, où cette propriété est signalée.

Si l'on projette $u$ à l'infini, $\Sigma$ devient l'ellipse de Steiner de ABC, et l'on a la théorème suivant :

Si $S_1$ est un point quelconque situé sur l'ellipse de Steiner de ABC, les parallèles à $AS_1$, $BS_1$, $CS_1$, par C, A, B, concourent en un point $S_2$, et les parallèles à $AS_1$, $BS_1$, $CS_1$ par B, C, A concourent en un second point $S_3$, et $S_2$ et $S_3$ se trouvent sur l'ellipse(*).

C. Si les sommets de A, B, C, du cas général, coïncident en un point S, les centres d'homologie $S_1$, $S_2$, $S_3$ coïncident évidemment avec S, et les coniques $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, se confondent ; ce qui nous donne le théorème suivant, corrélatif au théorème B.

Soit $\Sigma$ une conique circonscrite à un triangle ABC ; désignons par D, E, F les points de rencontre des côtés BC, CA, AB avec les tangentes à $\Sigma$ menées par les sommets opposés. S étant un point quelconque de $\Sigma$, appelons M et N′ les points où SD coupe CA et AB, N et L′ les points où SE coupe AB et BC, et L et M′ les points où SF coupe BC et CA. Les points L, M, N, L′, M′, N′ se trouveront sur deux droites tangentes à la conique $\sigma$ qui touche les côtés de ABC aux points où ils sont rencontrés par les droites AS, BS, CS.

Si l'on projette $u$ à l'infini, $\Sigma$ devient l'ellipse de Steiner et $\sigma$ une parabole. On obtient alors le théorème suivant :

Par un point quelconque S de l'ellipse de Steiner d'un triangle ABC, menons des parallèles aux côtés. La parallèle à BC coupant CA, AB en M et N′, la parallèle à CA coupant AB, BC en N et L′, et la parallèle à AB coupant BC, CA en L et M′, les six points L, M, N, L′, M′, N′ sont situés sur deux droites(**), ces droites sont des tangentes à la parabole qui touche les côtés de ABC aux points où ils sont rencontrés respectivement par les droites AS, BS, CS.

Parmi les applications que l'on peut faire de la proposition fondamentale à la géométrie brocardienne du triangle, nous signalons ici la suivante :

Soit A′B′C′ le premier triangle de Brocard de ABC, et désignons par D, E, F les points (situés sur une même droite) où B′C′, C′A′, A′B′ coupent BC, CA, AB respectivement : 1° DA′, EB′, FC′ sont des tangentes

---

(*) Cette propriété a été signalée par M. Neuberg (*Mathesis* (2) V, p. 199), et J. M. S, 1886. p. 51.

(**) M. Neuberg a signalé cette partie du théorème dans *Mathesis*, t. II, p. 42.

au cercle de Brocard de ABC, et 2° DA, EB, FC sont des tangentes à la conique passant par les sommets de ABC et les points de Brocard.

---

## DIVISION D'UN ANGLE EN $n$ PARTIES ÉGALES

**Une nouvelle et une vieille solution.**

### I.

Soit $ACB = \alpha$ un angle à diviser en $n$ parties égales, $n$ étant impair. (Le lecteur est prié de faire la figure). Décrivons autour du sommet C un arc ADB de circonférence avec un rayon quelconque $CA = CB$. Sur la bissectrice CD de l'angle portons, à partir de D, le tiers DF de la flèche DE de l'arc ADB et décrivons la circonférence concentrique passant par F. Portons sur CB, CA des longueurs $CH = CG = \frac{1}{n} CA$ et joignons GH. Projetons GH sur AB en $G_1, H_1$; les droites projetantes $GG_1$ et $HH_1$ rencontreront la seconde circonférence respectivement en $G_2$ et $H_2$. Alors $G_2CH_2$ sera à peu près la $n^{ième}$ partie de $\alpha$.

Pour faire l'analyse de cette construction, supposons $CA = CB = 1$, par conséquent,

$$CG = CH = \frac{1}{n}, \quad GH = \frac{2}{n} \sin \frac{1}{2}\alpha.$$

D'ailleurs, on a $DE = 1 - \cos \frac{1}{2}\alpha$; partant

$$DF = \frac{1}{3}(1 - \cos \tfrac{1}{2}\alpha), \quad CF = \frac{1}{3}(2 + \cos \tfrac{1}{2}\alpha)$$

Soit $G_2CH_2 = \beta$; il viendra

$$\sin \frac{1}{2}\beta = \frac{3 \sin \frac{1}{2}\alpha}{n(2 + \cos \frac{1}{2}\alpha)},$$

ou enfin

$$(1) \qquad \beta = 2 \arcsin \frac{3 \sin \frac{1}{2}\alpha}{n(2 + \cos \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Le développement en série de la fraction $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$ étant

$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} = x - \frac{1}{180} x^5 - \frac{1}{1512} x^7 \ldots,$$

on en tire

$$\beta = 2 \arc\sin \frac{1}{n}\left\{\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^5}{5760} \cdots\right\},$$

au lieu de

$$2) \qquad \beta = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^3}{24n^3} - \frac{\alpha^5}{5760n} + \frac{3\alpha^5}{640n^5} + \cdots$$

Si $\alpha$ n'est pas grand, on fera donc une petite erreur en posant $\beta = \frac{\alpha}{n}$.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ et $n = 3, 5, 7$ on obtient, à l'aide de la formule (1), les angles :

$$\beta_{(5)} = 30°16'59'', \quad \beta_{(5)} = 18°2'0'', \quad \beta_{(7)} = 12°51'37'',$$

au lieu des valeurs exactes respectivement 30°, 18°, 12° 51′ 52″,7.

Avec $\alpha = \pi$, on obtient $\beta_{(5)} = 60°$ (exact), mais

$$\beta_{(6)} = 34° 54' 54'',6 \quad \text{et} \quad \beta_{(7)} = 24° 44' 50''$$

au lieu de 36° et de 25° 42′ 51″,4 respectivement (Solution communiquée à M. le Prof. E. Lampe, par un praticien).

II.

La solution pratique la plus élégante du problème de la division d'un angle en $n$ parties égales s'obtient au moyen de la courbe imaginée par Hippias d'Elis, pour la trisection, au V$^e$ siècle avant notre ère : Tracez un angle droit YOX. Divisez en $2^n$ parties égales, OY = 1 et l'angle YOX; projetez le point M, qui correspond sur OY à $k$ des $2^n$ parties de OY, parallèlement à OX, en $m$ sur le second côté Om de l'angle XO$m$ qui est égal à $k$ des $2^n$ parties de l'angle droit. Le lieu des points $m$ est la *courbe d'Hippias* (appelée aussi *quadratrice de Dinostrate*, parce qu'elle coupe OX à une distance égale à $(2 : \pi)$; on la construit facilement point par point.

Pour diviser un angle XO$m$ en $n$ parties égales, prenez sur OY une longueur OP égale à $\frac{1}{n}$OM; projetez P, parallèlement à OX, en $p$ sur la courbe d'Hippias. L'angle POX sera égal à la $n^{ième}$ partie de XO$m$.

(P. M.)

## NOTRE SUPPLÉMENT.

Notre supplément contient deux mémoires. Le premier par V. Retali, *sur une transformation géométrique* a été suscité par le travail de M. Brocard publié en supplément à la livraison de mars 1898 de *Mathesis*. Il est précédé d'une introduction historique complète. L'autre dû à M. G. Tarry, *sur les permutations carrées de base* 6 traite une question assez curieuse dont voici les antécédents. La question 453 de *l'Intermédiaire des Mathématiciens* (1895), due à M. E. Maillet, est formulée ainsi :

« Dans les *Mémoires de la Société de Flessingue*, Euler n'a pu trouver de solution pour ce qu'il appelle le problème des 36 officiers, sans cependant montrer qu'il n'y avait aucune solution. A-t-on trouvé une solution ou montré qu'il n'y en avait aucune?

Voici l'énoncé de ce problème : « Cette question roulait sur une assemblée de 36 officiers de 6 grades différents et tirés de 6 régiments différents qu'il s'agissait de ranger dans un carré de manière que sur chaque ligne, tant horizontale que verticale, il se trouvât 6 officiers tant de différents grades que de régiments différents. » On le cite dans les *Récréations math.* de Lucas, Introduction, p. 13, t. I; dans l'ouvrage de M. Arnoux. *Sur les espaces arithmétiques hypermagiques*, etc. p. 5.

M. Laugel (I. M., 1896, p. 17) conjecture que le problème est impossible pour $4n^2$ officiers, et que l'on devrait chercher la démonstration de ce fait dans la théorie des substitutions. Il ajoute que le problème est toujours possible si le nombre est impair et que la construction du carré dépend simplement de l'application méthodique de substitutions circulaires. Ainsi, si $a$, $b$, $c$,... désignent les grades différents des officiers et que les indices 1, 2, 3,... marquent les numéros de leurs régiments, le tableau suivant représente une solution du problème des 25 officiers :

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\ b_5 & c_1 & d_2 & e_3 & a_4 \\ c_4 & d_5 & e_1 & a_2 & b_3 \\ d_3 & e_4 & a_5 & b_1 & c_2 \\ e_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_1 \end{array}$$

M. Brocard (I. M., 1896, p. 90) donne la note bibliographique suivante : « Le problème des 16, 25 et 49 officiers a été proposé et résolu

dans le journal *Le Siècle*, par M. A. Feisthamel (oct. et nov. 1884). Le rédacteur, reproduisant le passage cité d'Ed. Lucas, a dit que ses recherches pour le nombre 36 étaient demeurées infructueuses. Celui des 64 officiers a été proposé et résolu par M. B. Meyniel (nov. 1884). Voir aussi, dans les *Tablettes du chercheur*, les remarquables solutions données par M. Huber pour 16, 25, 49, 64 et 81 officiers (1894, questions 1678, 1897, 1872, 1845 et 1535) ».

M. Barbette, de Liége (I. M., 1898, p. 83) généralise le problème en considérant $m^2 = [2^k(2p+1)]^2$ officiers de $m$ grades différents et de $m$ régiments différents, qu'il s'agit de disposer en carré de manière à remplir certaines conditions, et donne les tableaux représentatifs de quelques solutions particulières. M. Heffter (I. M., 1898, p. 176) indique une solution très simple pour le cas de $(2p+1)^2$ officiers; mais comme l'ont fait remarquer MM. Delannoy et Barbette (I. M., 1898, p. 252), cette solution ne s'applique plus à $4n^2$ officiers.

M. G. Tarry (I. M., 1899, p. 251) limite l'impossibilité du problème à l'hypothèse de $4(2p+1)^2$ officiers. Dans une seconde note (I. M., 1900, p. 14), il donne un aperçu de sa démonstration pour établir l'impossibilité du problème des 36 officiers. (J. N.).

---

## SUR UNE FORMULE COMBINATOIRE(*).

Soit à calculer la valeur de la différence

$$\Delta = (2n+1)\left\{C_{2n+1}^{n} - \frac{1}{3}C_{2n+1}^{n-1} + \frac{1}{5}C_{2n+1}^{n-2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^{0}\right\}$$
$$- 8n\left\{C_{2n-1}^{n-1} - \frac{1}{3}C_{2n-1}^{n-2} + \frac{1}{5}C_{2n-1}^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{0}\right\},$$

où $C_p^r = C_p^{p-r}$ désigne le nombre des combinaisons de $p$ objets $r$ à $r$, ou $p-r$ à $p-r$.

On peut écrire

$$\Delta = \left[(2n+1)C_{2n+1}^{n} - 8n\,C_{2n-1}^{n-1}\right] - \frac{1}{3}\left[(2n+1)C_{2n+1}^{n-1} - 8n\,C_{2n-1}^{n-2}\right] + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left[(2n+1)C_{2n+1}^{1} - 8n\,C_{2n-1}^{0}\right] + (-1)^n C_{2n+1}^{0}.$$

---

(1) Voir *Mathesis*, 1899, (2), IX, pp. 33 et 237-238, Question 1903.

Or, on a successivement

$$(2n+1)C_{2n+1}^{n-k} - 8n\,C_{2n-1}^{n-k-1} = C_{2n+1}^{n-k}\left[2n+1-\frac{8n(n+k+1)(n-k)}{2n(2n+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{n-k}\left[(2n+1)^2 - 4(n+k+1)(n-k)\right] = \frac{(2k+1)^2}{2n+1}C_{2n+1}^{n-k}.$$

D'après cette formule, on trouve

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n+1}^{n} - 3\,C_{2n+1}^{n-1} + 5\,C_{2n+1}^{n-2} - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}(2n-1)\,C_{2n+1}^{1} + (-1)^n(2n+1)\,C_{2n+1}^{0}.$$

On peut transformer le second membre, en se servant de la relation connue et d'ailleurs facile à vérifier,

$$C_{2n+1}^{k} = C_{2n}^{k} + C_{2n}^{k-1}. \qquad (1)$$

On trouve ainsi

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n}^{n} + C_{2n}^{n-1} - 3\,(C_{2n}^{n-1} + C_{2n}^{n-2}) + 5\,(C_{2n}^{n-2} + C_{2n}^{n-3}) - \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}(2n-1)\left[C_{2n}^{1} + C_{2n}^{0}\right] + (-1)^n(2n+1)\,C_{2n+1}^{0}$$

ou encore, en réduisant et observant que

$$C_{2n+1}^{0} = C_{2n}^{0} = 1,$$

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n}^{n} - 2\,C_{2n}^{n-1} + 2\,C_{2n}^{n-2} - \cdots + (-1)^n\,2\,C_{2n}^{0}.$$

Appliquant de nouveau aux termes du second membre la formule (1), on obtient la relation

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n-1}^{n} + C_{2n-1}^{n-1} - 2\,(C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^{n-2}) + 2\,(C_{2n-1}^{n-2} - C_{2n-1}^{n-3}) - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\,2\,(C_{2n-1}^{1} + C_{2n-1}^{0}) + (-1)^n 2C_{2n}^{0},$$

et, enfin, après réduction,

$$(2n+1)\,\Delta = C_{2n-1}^{n} - C_{2n}^{n-1} = 0,$$

ou $\Delta = 0$(*). (P. M.)

---

(*) Dans un article ultérieur, nous déduirons de cette relation l'aire totale des *sinusoïdes impaires*.

## BIBLIOGRAPHIE.

**Die Elemente der analytischen Geometrie.** Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. *Erster Teil.* Die analytische Geometrie der Ebene von Dr Ganter, Professor an der Kantonsschule in Aarau und Dr Rudio, Professor am Polytechnikum in Zürich, 4te Auflage. Leipzig, Teubner, 1900 (VIII-180 p. in 8°, Prix : 3 marcs). *Zweiter Teil.* Die analytische Geometrie des Raumes von Dr Rudio, 2te Auflage. Leipzig, Teubner, 1900 (VI-184 p. in 8°. Prix : 2 marcs 40).

Comme le titre l'indique, les auteurs n'ont voulu exposer que les *éléments* de la géométrie analytique, et leur programme ne va guère au-delà de ce qu'exige une première étude de cette science et de ce qui est nécessaire aux élèves des écoles spéciales allemandes pour pouvoir aborder la mécanique et les sciences techniques. Cependant, leur ouvrage présente, dans ces limites, un caractère scientifique qui manque souvent dans des livres plus étendus. Par exemple, les signes des grandeurs géométriques: segments, angles, aires et volumes, y sont exposés avec toute la rigueur désirable. De même, on y rencontre des développements sur le rapport anharmonique, les formes harmoniques, l'involution, les figures affines, la théorie des transversales, les axes radicaux, la théorie des pôles et polaires.

Les propriétés des sections coniques, de l'ellipsoïde, des deux hyperboloïdes et des deux paraboloïdes sont exposées au moyen des équations réduites.

L'équation générale à deux ou trois variables est entièrement laissée de côté.

Les exercices, au nombre de plus de 400 pour chacune des deux parties, forment un complément utile; ce sont des applications numériques ou des cas particuliers des formules générales. (J. N.)

---

**Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr Rudolf Sturm, Professor an der Universität zu Breslau. Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage. Leipzig, Teubner, 1900 (VI-157 p. avec 61 figures dans le texte et 7 planches lithographiées). Prix : 5 marcs 60.

La première édition de cet ouvrage s'adressait spécialement aux élèves des écoles techniques allemandes. L'édition actuelle a surtout en vue à ceux qui se destinent à l'enseignement moyen en Allemagne. Les nouveaux règlements rangent les éléments de géométrie descriptive parmi les matières obligatoires pour les candidats aux fonctions de professeur de *mathématiques appliquées* dans les Ecoles réales ou professionnelles; mais, chose singulière, cette science n'est pas exigée de ceux qui aspirent à enseigner les *mathématiques pures*.

L'ouvrage de M. Sturm se distingue des manuels français par l'introduction de notions préparatoires à l'étude de la géométrie supérieure, notions qui se présentent naturellement dans les épures. Nous faisons ici allusion à l'affinité, à l'homo-

logie, aux propriétés projectives générales ou spéciales, au principe de dualité et aux éléments à l'infini.

La table des matières que nous allons résumer, suffit pour indiquer quel est le programme développé par M. Sturm.

Introduction (Projection centrale. Éléments qui n'ont pas de projection proprement dite; éléments à l'infini). Chap. I. Projection orthogonale sur un plan unique; rabattements et affinité; éléments parallèles. Chap. II. Projections sur deux plans. Chap. III. Problèmes. Chap. IV. Rotations. Chap. V. Changement de plans de projections. Chap. VI. Polyèdres. Sections planes; situation perspective; homologie. Pénétration de deux polyèdres. Développements de polyèdres. Chap. VII. Perspective. Chap. VIII. Projections obliques. Chap. IX. Axonométrie. Chap. X. Ombres et éclairement.

---

**Histoire des mathématiques** par J. Boyer. Illustrée de fac-similés de manuscrits et de portraits. Paris, Carré et Naud, 1900 (XI-260 p. in-8, cartonné). Prix : 5 fr.

Livre amusant, mais superficiel et souvent inexact (Voir les comptes rendus de M. G. Loria. dans son *Bollettino*, 1900, pp. 10-12; de M. Cantor, dans la H.-L. Abteilung de la *Zeitchrift für Math. und Physik*, 1900, pp. 98-99; et de M. Eneström, dans la *Bibliotheca mathematica*, 1900, pp. 278-280.) On y trouve des portraits de Carnot, Cauchy, Descartes, M^me^ du Chatelet, Euler, Fermat, Galois, Sophie Kovalevsky, Lagrange, Laplace, Leibniz, Lobatchefsky, Monge, Neper, Newton, Pascal, Saunderson, Viète et Weierstrass. (P. M.)

---

1. **Histoire abrégée de l'astronomie** par E. Lebon, agrégé de l'Université etc. Avec seize portraits. Paris, Gauthier-Villars, 1899 (VII-288 pp. in 8°). Prix : 8 fr.

2. **L'évolution de l'Astronomie chez les Grecs** par J. Thirion, S. J. professeur de physique au Collège de la Compagnie de Jésus à Louvain. Bruxelles, rue impériale, 20, Lagaert (In 12, 286 pp ). Prix : 3 fr.

« Nous avons exposé sobrement les observations faites pendant la période ancienne (avant Copernic), dit M. Lebon, en tenant compte des résultats des recherches les plus récentes; avec plus d'étendue les nombreux travaux de la période moderne. et assez amplement, pensons-nous, les découvertes de l'astronomie physique et les recherches de l'astronomie mathématique pendant la période contemporaine. »

Nous souscrivons bien volontiers à cette appréciation pour la partie de l'histoire de l'astronomie qui commence à Newton (p. 40), en ajoutant que l'exposition de M. Lebon est claire et intéressante. Mais pour l'histoire de l'ancienne astronomie, celle qui explique les mouvements des astres par des combinaisons de mouvements circulaires, son livre devrait être refait au moyen de celui du P. Thirion. Celui-ci expose vraiment d'après les travaux les plus récents (surtout ceux de

Schiaparelli), les vues ou systèmes de Pythagore, Philolaus, Platon, Eudoxe, Héraclite du Pont, Aristarque, Hipparque et Ptolémée et fait connaître le vrai point de vue auquel il faut se placer pour apprécier l'œuvre de Copernic. Les portraits qui ornent le livre de M. Lebon sont ceux de Copernic, Galilée, Kepler, Newton, Herschel, Laplace, Arago, Leverrier, Faye, Janssen, Lœwy, Perrier, Newcomb, Tisserand, Sophie Kovalevsky, Poincaré. A la fin de l'ouvrage, il y a un dictionnaire biographique et bibliographique de 45 pages où l'on trouve des renseignements sommaires sur beaucoup d'astronomes et de météorologistes et même de mathématiciens purs. (P. M.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 1085.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, page 216).

*Soient* $P_aBC$, $P_bCA$, $P_cAB$ *trois triangles isoscèles semblables construits sur les côtés d'un triangle donné. Les triangles homologiques* $P_aP_bP_c$, ABC *sont polaires réciproques par rapport à une certaine conique* $\Sigma$. *Démontrer que lorsque l'angle* $P_aBC$ *varie, la courbe* $\Sigma$ *engendre un système homofocal.* (J. Neuberg).

*Solution* par M. Mandart. Si $\theta$ désigne l'angle $P_aBC$, les coordonnées des points $P_a$, $P_b$, $P_c$ sont

$$-\sin\theta, \quad \sin(C+\theta), \quad \sin(B+\theta);$$

$$\sin(C+\theta), \quad -\sin\theta, \quad \sin(A+\theta);$$

$$\sin(B+\theta), \quad \sin(A+\theta), \quad -\sin\theta.$$

Or, si l'équation tangentielle d'une conique est

$$A_{11}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 + A_{33}\nu^2 + 2A_{12}\lambda\mu + 2A_{23}\mu\nu + 2A_{31}\lambda\nu = 0,$$

les coordonnées des pôles des côtés du triangle de référence sont $(A_{11}, A_{12}, A_{13})$, $(A_{21}, A_{22}, A_{23})$, $(A_{31}, A_{32}, A_{33})$. En comparant les coordonnées à celles des points $P_a$, $P_b$, $P_c$, on voit que l'équation de $\Sigma$ est

$$-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\sin\theta + 2\lambda\mu\sin(C+\theta) + 2\mu\nu\sin(A+\theta) + 2\lambda\nu\sin(B+\theta) = 0;$$

on peut l'écrire ainsi

$$-\sin\theta(\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\lambda\mu\cos C-2\mu\nu\cos A-2\lambda\nu\cos B)$$
$$+2\cos\theta(\lambda\mu\sin C+\mu\nu\sin A+\lambda\nu\sin B)=0.$$

De cette forme on conclut que $\Sigma$ touche les tangentes communes aux deux coniques

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\lambda\mu\cos C-2\mu\nu\cos A-2\lambda\nu\cos B=0,$$
$$\lambda\mu\sin C+\mu\nu\sin A+\lambda\nu\sin B=0,$$

dont l'une est l'ensemble des points cycliques, et l'autre l'ellipse qui touche les côtés du triangle de référence en leurs milieux. Par conséquent, les foyers de cette ellipse sont aussi les foyers de $\Sigma$.

M. Droz Farny a donné de la même question une démonstration géométrique très ingénieuse; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de la reproduire.

---

## ×Question 1284.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 264).

*Si* $x^2+y^2=z^2$, $x$, $y$ *et* $z$ *étant entiers, les expressions*

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1},\quad z^{2n}-x^{2n}-y^{2n} \tag{1}$$

*sont divisibles par* $x+y+z$. (Graeber.)

*Solution par* M. Déprez. Toute solution de l'équation $x^2+y^2=z^2$ est de la forme

$$x=\alpha^2-\beta^2,\quad y=2\alpha\beta,\quad z=\alpha^2+\beta^2.$$

On en déduit

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=(\alpha^2-\beta^2)^{2n+1}+(2\alpha\beta)^{2n+1}+(\alpha^2+\beta^2)^{2n+1}.$$

Sous cette forme, on voit que la première des expressions (1) est divisible par $x+y+z=2\alpha(\alpha+\beta)$; car elle admet le facteur numérique 2 et s'annule pour $\alpha=0$ et pour $\alpha=-\beta$.

De même, en écrivant

$$z^{2n}-x^{2n}-y^{2n}=(\alpha^2+\beta^2)^{2n}-(\alpha^2-\beta^2)^{2n}-(2\alpha\beta)^{2n},$$

on trouve facilement que la seconde expression est divisible par $2\alpha(\alpha+\beta)$.

*Solution par* M. Plakhowo. On peut poser

$$x = \alpha^2 - \beta^2, \quad y = 2\alpha\beta, \quad z = \alpha^2 + \beta^2,$$

d'où

$$xy = 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2), \quad x + y + z = 2\alpha(\alpha + \beta);$$

donc $xy$ est divisible par $x + y + z$.

En considérant les expressions (1) comme des polynômes en $z$, on trouve pour les restes de leur division par $z + x + y$ :

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} - (x+y)^{2n+1}, \quad (x+y)^{2n} - x^{2n} - y^{2n}.$$

En développant $(x+y)^{2n+1}$ et $(x+y)^{2n}$ on voit que ces restes sont divisibles par $xy$ et par suite, par $x + y + z$.

*Solution par* M. Soons. Sous la condition $x^2 + y^2 = z^2$ on trouve

$$(x + y + z)(x + y - z) = 2xy.$$

Or l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$ exige que deux des nombres $x, y, z$ soient impairs et le troisième pair ou que les trois soient pairs. Donc $x + y - z$ est divisible par 2, et par suite le produit $xy$ est divisible par $x + y + z$.

Cela posé, on peut écrire :

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$$

$$= (x+y)\ (x^{2n} - x^{2n-1}y + \cdots) + z\,(x^{2n} + nx^{2n-2}y^2 + \cdots)$$

$$= (x+y)\ (x^{2n} + y^{2n} + \text{M. } xy) + z\,(x^{2n} + y^{2n} + \text{M. } xy)$$

$$= (x+y+z)\ (x^{2n} + y^{2n}) + \text{M. } xy = \text{M}\,(x+y+z);$$

$$z^{2n} - x^{2n} - y^{2n} = (x^2 + y^2)^n - (x^{2n} + y^{2n})$$

$$= (x^{2n} + nx^{2n-2}y^2 + \cdots) - (x^{2n} + y^{2n})$$

$$= \text{M. } x^2y^2 = \text{M. } (x+y+z)^2.$$

*Solution par* M. Emmerich. Posons $s_p = x^p + y^p - (-z)^p$ ; nous aurons l'identité $s_p = s_{p-2}\,s_2 + s_{p-2}\,z^2 - x^2y^2\,(x^{p-4} + y^{p-4}) - (-z)^{p-2}\,s_2$

Donc, si $s_2 = 0$,

$$s_p = s_{p-2}\,z^2 - x^2y^2\,(x^{p-4} + y^{p-4}). \qquad (1)$$

Or, sous la même condition $s_2 = 0$, on a

$$xy = \tfrac{1}{2}(x+y+z)(x+y-z);$$

donc puisque $x + y$ et $z$ sont de même parité, le produit $xy$ est multiple de $x+y+z$ et de $x+y-z$.

Cela posé, si l'on fait successivement $p = 4, 6, \ldots$, n l'égalité(1)mon-

tre que les sommes $s_4, s_6, \ldots, s_{1n} = x^{2n} + y^{2n} - z^n$ sont divisibles par $(x+y+z)^2$ et par $(x+y-z)^2$.

Pour passer au second cas, considérons d'abord $s_5$. On a

$$s_5 = 3xyz + \Sigma x.(\Sigma x^2 - \Sigma xy)$$
$$= xy(3z - \Sigma x) + \Sigma x.(2z^2 - yz - zx)$$
$$= (2z - x - y)(xy + xz + yz + z^2).$$

La dernière parenthèse, à cause de $x^2 + y^2 = z^2$, peut prendre la forme

$$\tfrac{1}{2}(2xy + 2xz + 2yz + x^2 + y^2 + z^2) = \tfrac{1}{2}\Sigma^2 x;$$

donc $s_5$ est divisible par $\frac{1}{2}(x+y+z)^2$. En s'appuyant ensuite sur l'identité (1), on voit que $s_5, s_7, \ldots$ sont divisibles par $\frac{1}{2}(x+y+z)^2$.

Si l'on change $z$ en $-z$ on trouve que

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} - z^{2n+1} = \text{M}.\tfrac{1}{2}(x+y-z)^2.$$

On ne peut affirmer que $s_{2n+1}$ est divisible par $(x+y+z)^2$, car $2z - x - y$ peut ne pas être divisible par 2.

---

## Question 1249.

(Voir *Mathesis* (2), IX, p. 280).

***On considère toutes les coniques semblables à une conique donnée, ayant un foyer donné et pour directrice correspondante une tangente à une circonférence donnée; démontrer que l'enveloppe de ces courbes est un ovale de Descartes.*** (J. Neuberg.)

*Solution géométrique par* M. G. Gérard. Soient F le foyer donné, O le centre de la circonférence donnée et R son rayon; appelons en outre $k$ l'excentricité qui, d'après la condition de similitude, doit être constante ($k < 1, = 1, > 1$. selon l'espèce des coniques que nous considérons).

Soit maintenant M l'un des deux points d'intersection à distance finie, de deux courbes voisines du système; menons MF et projetons M en D et D′ sur les directrices correspondantes; nous aurons

$$k = \frac{\text{MF}}{\text{MD}} = \frac{\text{MF}}{\text{MD}'},$$

donc MD = MD′, et le point M se trouve sur la bissectrice de l'angle des

deux directrices; mais cette bissectrice passe aussi par le centre O de la circonférence donnée, à laquelle les directrices sont tangentes.

Dès lors, si les deux directrices sont données, il suffira, pour obtenir le point M, de déterminer leur point de rencontre I et de mener le rayon OI : ce rayon passera par M.

Cette construction subsiste encore quand la directrice ID′ s'approche indéfiniment de ID, et elle conduit alors au point caractéristique de la conique correspondant à ID; ce dernier point est donc à l'intersection de cette conique avec le rayon de contact OI de ID. Désignons-le par C; nous aurons $\frac{CF}{CI} = k$, d'où, en posant $CF = r$ et $CO = r'$ :

$$\frac{r}{r' - R} = k, \quad \text{ou} \quad r - kr' + kR = 0.$$

Cette équation représente, en coordonnées bipolaires, l'enveloppe cherchée; comme elle est du premier degré en $r$ et $r'$, l'enveloppe est un ovale de Descartes.

Remarque. On peut considérer l'ovale de Descartes comme le lieu des points dont le rapport des distances CA : CA′ à deux cercles donnés O et O′ est constant; d'après Chasles, la droite AA′ passe par un point fixe S de la ligne des centres OO′, et les tangentes en A et A′ aux deux cercles se coupent sur la tangente en C à l'ovale(*). Il est facile de retrouver ces propriétés dans la présente question : les deux cercles fixes sont O et F (cercle de rayon nul), et S est confondu avec F; ensuite, la tangente à l'ovale en C est aussi la tangente à la conique et l'on sait que cette dernière droite passe par le point de rencontre de la directrice et de la perpendiculaire à FC en F; or, ce sont là les tangentes aux deux cercles fixes.

*Solution analytique par* M. E. N. Barisien. Soient F le foyer donné, $e$ l'excentricité des coniques, O et R le centre et le rayon de la circonférence donnée. Prenons des axes rectangulaires en F, FO étant l'axe des $x$ et la longueur $FO = a$.

L'équation d'une tangente à la circonférence étant

$$(x - a)\cos\alpha + y\sin\alpha - R = 0,$$

(*) G. de Longchamp, *Géom. Analyt.*, p. 32.

on peut écrire l'équation générale des coniques de l'énoncé sous la forme

$$x^2 + y^2 = e^2 [(x - a)\cos\alpha + y\sin\alpha - R]^2,$$

ou
$$(x - a)\cos\alpha + y\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{e} + R,$$

De sorte que l'enveloppe de ces coniques est la courbe

$$(x - a)^2 + y^2 = \left(\pm\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{e} + R\right)^2.$$

Pour un point M de cette courbe on a donc

$$\overline{MO}^2 = \left(\pm\frac{MF}{e} + R\right)^2;$$

le lieu se compose donc des deux ovales de Descartes ayant O et F pour foyers et pour chacun desquels on a

$$MO - \frac{MF}{e} = \pm R, \quad MO + \frac{MF}{e} = R.$$

Si $e = 1$, toutes les coniques sont des paraboles, et l'enveloppe de de ces paraboles est une ellipse ou une hyperbole, suivant que $OF < R$ ou $> R$.

Autres solutions analytiques par MM. Retali et Cardoso-Laynes.

M. Déprez, qui a résolu cette question en se servant des coordonnées polaires, accompagne sa solution des remarques suivantes :

I. Le second foyer, le centre, les sommets et les pieds des directrices décrivent des limaçons de Pascal.

II. Le second axe, les tangentes aux sommets, la seconde directrice de la conique enveloppent des circonférences.

---

## Question 1951.

(*Mathesis*, (2), t. X, p. 32).

*Une conique variable touche les côtés du triangle* ABC *aux points* A', B', C'. *Si les droites* AA', BB', CC', *se coupent sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *la conique touche constamment la droite de Lemoine de* ABC. (E. Lemoine).

*Solution par* MM. C. Couturier et Retali. Prenons le triangle ABC

pour triangle de référence; l'équation d'une conique inscrite à ce triangle sera

$$\sqrt{f\mathrm{X}}+\sqrt{g\mathrm{Y}}+\sqrt{h\mathrm{Z}}=0. \qquad (1)$$

Les droites unissant les sommets aux points de contact des côtés opposés auront pour équations

$$f\mathrm{X}-g\mathrm{Y}=0, \quad g\mathrm{Y}-h\mathrm{Z}=0, \quad h\mathrm{Z}-f\mathrm{X}=0.$$

Ces droites se coupent en un même point dont les coordonnées sont $\frac{1}{f}, \frac{1}{g}, \frac{1}{h}$.

Or l'équation du cercle circonscrit étant

$$\mathrm{YZ}\sin\mathrm{A}+\mathrm{ZX}\sin\mathrm{B}+\mathrm{XY}\sin\mathrm{C}=0,$$

la condition pour que le point de concours soit sur cette circonférence est

$$f\sin\mathrm{A}+g\sin\mathrm{B}+h\sin\mathrm{C}=0. \qquad (2)$$

Mais la droite de Lemoine ayant pour équation

$$\frac{\mathrm{X}}{\sin\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{Y}}{\sin\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{Z}}{\sin\mathrm{C}}=0,$$

la condition (2) exprime précisément la relation qui doit exister entre $f, g, h$ pour que la droite de Lemoine soit tangente à la conique (1).

*Solution par* MM. Déprez, Krahé (Madrid). Plus généralement, si les droites AA′, BB′, CC′ se coupent sur une conique Δ circonscrite au triangle ABC, la première conique touche une droite fixe.

En effet, soit $\sqrt{fx}+\sqrt{gy}+\sqrt{hz}=0$ l'équation de la conique inscrite; pour que la droite $\lambda x+\mu y+\nu z=0$ soit une tangente, on doit avoir

$$\frac{f}{\lambda}+\frac{g}{\mu}+\frac{h}{\nu}=0. \qquad (1)$$

D'autre part, le point de concours des droites AA′, BB′, CC′ a pour coordonnées $\frac{1}{f}, \frac{1}{g}, \frac{1}{h}$; s'il décrit la conique $\frac{\mathrm{L}}{x}+\frac{\mathrm{M}}{y}+\frac{\mathrm{N}}{z}=0$, on a constamment

$$\mathrm{L}f+\mathrm{M}g+\mathrm{N}h=0. \qquad (2)$$

Les conditions (1) et (2) se confondent si l'on suppose L, M, N

proportionnels à $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$; autrement dit, la conique variable inscrite touche constamment la droite

$$\frac{x}{L}+\frac{y}{M}+\frac{z}{N}=0.$$

Cette droite est la polaire trilinéaire du point (L, M, N), qui lui-même est le point de concours des droites joignant A, B, C aux sommets correspondants du triangle formé par les tangentes aux points A, B, C de la conique Δ.

*Solution par* M. Boutin. Si $(x_1, y_1, z_1)$ sont les coordonnées du point de concours des droites AA', BB', CC', et si ce point se meut sur une conique circonscrite au triangle ABC, la conique variable a pour équation

$$\sqrt{\frac{x}{x_1}}+\sqrt{\frac{y}{y_1}}+\sqrt{\frac{z}{z_1}}=0, \qquad (1)$$

moyennant une condition de la forme

$$\frac{L}{x_1}+\frac{M}{y_1}+\frac{N}{z_1}=0. \qquad (2)$$

Pour trouver *l'enveloppe* de la conique (1), nous différentions les équations (1) et (2) par rapport aux paramètres variables $x_1, y_1, z_1$; il vient

$$\sqrt{\frac{x}{x_1^3}}\,dx_1+\sqrt{\frac{y}{y_1^3}}\,dy_1+\sqrt{\frac{z}{z_1^3}}\,dz_1=0. \qquad (3)$$

$$\frac{L}{x_1^2}\,dx_1+\frac{M}{y_1^2}\,dy_1+\frac{N}{z_1^2}\,dz_1=0. \qquad (4)$$

Les coefficients de $dx_1, dy_1, dz_1$ doivent être proportionnels; on en conclut

$$\sqrt{\frac{xx_1}{L}}=\sqrt{\frac{yy_1}{M}}=\sqrt{\frac{zz_1}{N}},$$

ou

$$\sqrt{x_1}:\sqrt{y_1}:\sqrt{z_1}=\frac{L}{\sqrt{x}}:\frac{M}{\sqrt{y}}:\frac{N}{\sqrt{z}}.$$

Introduisant dans l'équation (1) pour $\sqrt{x_1}, \sqrt{y_1}, \sqrt{z_1}$, les quantités proportionnelles, on obtient pour l'enveloppe

$$\frac{x}{L}+\frac{y}{M}+\frac{z}{N}=0.$$

*Solution par* M. Soons. Les tangentes menées en A, B, C au cercle ABC forment un triangle $A_1B_1C_1$, et rencontrent les côtés opposés du triangle ABC en trois points $A_2$, $B_2$, $C_2$ de la droite de Lemoine. Appelons N le point de concours des droites AA', BB', CC'. Les points A', B', C' sont les points de concours des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère ABCN inscrit au cercle; donc la droite A'C' est la polaire de B'. Mais $B_1$ est le pôle de la droite AC; donc A'C' passe par $B_1$. De plus les droites $B_1B'$ et A'C' forment un faisceau harmonique avec les tangentes $BA_2BC$. On en conclut qu'il existe une conique touchant les côtés du quadrilatère $ACA_2C_2$ aux points B', A', E, C', E étant le point de rencontre des droites $A_2C_2$, $B'B_2$. Le théorème est donc démontré.

Cette démonstration peut être étendue au cas où le cercle est remplacé par une conique quelconque circonscrite au triangle ABC.

Autres solutions par MM. Ripert et Emmerich.

La question 1251 se rattache à la question 1426 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. La réponse de M. *Duporcq* à cette dernière question (I. M, 1899, p. 280) contient la solution généralisée de la question 1251 (Note de M. Ripert.)

---

## ×Question 1253.

Voir *Mathesis* (2, X p. 32.)

*Par deux points donnés* A, B *faire passer une circonférence qui coupe une droite donnée m ou une circonférence donnée* O *sous un angle donné* $\alpha$.

(Orlando.)

*Premier problème.* 1° La perpendiculaire élevée au milieu C de la distance AB rencontre $m$ en un point D. En un point quelconque E de $m$, menons une droite qui fasse avec $m$ l'angle $\frac{\pi}{2}-\alpha$, et soit $\omega'$ le point où elle rencontre CD. La circonférence décrite du centre $\omega'$ avec le rayon $\omega'E$ coupera $m$ sous l'angle $\alpha$; elle sera homothétique à la circonférence cherchée $\omega$, le centre de similitude est D. Par conséquent, si la droite

DA rencontre la circonférence $\omega'$ en A', une parallèle à la droite A'$\omega'$ par A détermine sur CD le centre $\omega$. (Soons.)

2° Décrivons une circonférence X qui coupe $m$ sous l'angle $\alpha$, et considérons-la comme une figure homothétique à la circonférence cherchée $\omega$. Deux lignes homologues sont les perpendiculaires abaissées des centres X et $\omega$ sur AB; les points D', D où ces droites rencontrent $m$ sont des points homologues connus. Par suite, la parallèle menée par D' à la droite DA rencontre la circonférence X en un point A' qui est l'homologue de A, et les rayons A$\omega$, A'X sont parallèles; ce qui sert à déterminer le point $\omega$. (Emmerich.)

3° Transformons pas inversion le cercle inconnu $\omega$ et la droite $m$ en prenant pour pôle le point A, pour puissance $\overline{AB}^2$. La droite $m$ se transforme en un cercle $\mu$ que l'on sait tracer. Le cercle $\omega$ se transforme en une droite $\omega_1$ qui passe par B et coupe le cercle $\mu$ sous l'angle $\alpha$. Or, toutes les droites qui coupent $\mu$ sous l'angle $\alpha$ enveloppent un cercle facile à construire. Il reste à mener par B les deux tangentes à ce dernier cercle, etc. (Soons et Emmerich.)

*Second problème.* 1° Soumettons encore la figure à une inversion en prenant pour pôle le point A et pour puissance $\overline{AB}^2$. Le cercle donné O se transforme en un cercle O', et le cercle cherché $\omega$ en une droite $\omega_1$ qui passe par B et rencontre le cercle A' sous l'angle $\alpha$. La solution s'achève comme précédemment. (Soons et Emmerich.)

2° Prenons pour centre d'inversion un point quelconque F de la circonférence O; celle-ci se transforme en une droite $p$. On trouve facilement les points $A_1$ et $B_1$ qui sont les transformés des points A et B. La question est ramenée à faire passer par $A_1$ et $B_1$ une circonférence qui rencontre la droite $p$ sous l'angle $\alpha$; ce qui est le premier problème.

Pour simplifier, prenons pour F une extrémité du diamètre du cercle O perpendiculaire à AB; en choisissant convenablement la puissance, on peut regarder la droite AB comme l'inverse du cercle O, et prendre pour $A_1$ et $B_1$ les points de rencontre de ce cercle avec les droites FA et FB. (Soons.)

**M. Emmerich donne également une solution algébrique du second problème; M. Barisien résout les deux cas par le calcul.**

## ×Question 1956.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 32).

***Soient*** B, C ***deux points fixes d'une circonférence*** O, A ***un point variable de cette courbe. Etudier la variation de l'aire du triangle compris entre la médiane et la hauteur issues de*** A ***dans le triangle*** ABC.

***Même question pour le triangle ayant pour sommets le point*** A, ***le centre de gravité*** G ***et l'orthocentre*** H ***du triangle*** ABC.

*Solution par* MM. Emmerich, Barisien et Soons(*) : 1° Soient D le milieu de la corde BC, E et F les extrémités du diamètre OD, A′ la projection de A sur EF; nous supposons ED > DF. Prenons pour variable l'angle EOA = φ; à cause de la symétrie de la figure par rapport à EF, nous le supposons compris entre 0 et π; nous aurons alors

$$OA' = R\cos\varphi, \quad A'A = R\sin\varphi, \quad DA' = d + R\cos\varphi,$$

*d* désignant la distance DO. Par conséquent

$$S = \tfrac{1}{2}(d + R\cos\varphi).\, R\sin\varphi. \qquad (1)$$

Cette formule convient à toutes les positions de A pourvu que l'on considère S comme positif ou comme négatif suivant que A appartient à l'arc EB ou à l'arc BF. En E et en B, on a S = 0; donc S a un maximum $S_1$ en un certain point $A_1$ de l'arc AB. De même S passe par un minimum négatif $S_2$ en un certain point $A_2$ de l'arc AB.

Pour trouver $S_1$ et $S_2$ par un procédé élémentaire, écrivons

$$\frac{4S^2}{R^2\alpha^2\beta\gamma} = \left(\frac{d + R\cos\varphi}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{1 - \cos\varphi}{\beta}\right)\left(\frac{1 + \cos\varphi}{\gamma}\right)$$

et exprimons que les facteurs du second membre sont égaux entre eux et ont une somme indépendante de cos φ; ce qui donne

$$\frac{d + R\cos\varphi}{\alpha} = \frac{1 - \cos\varphi}{\beta} = \frac{1 + \cos\varphi}{\gamma}, \quad \frac{2R}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0.$$

L'élimination des inconnues auxilaires α, β, γ conduit à l'équation

$$\frac{2R}{d + R\cos\varphi} - \frac{1}{1 - \cos\varphi} + \frac{1}{1 + \cos\varphi} = 0,$$

ou

$$R\cos 2\varphi + d\cos\varphi = 0.$$

---

(*) Nous avons modifié ces solutions de manière à éviter l'emploi des coordonnées et du calcul différentiel, tout en complétant la discussion. (J. N.)

Si l'on appelle A l'angle BOD = BEC, on a $d = R \cos A$, et l'équation précédente se ramène à

$$\cos A \cos \varphi + \cos 2\varphi = 0.$$

On en tire

$$\cos \varphi = \frac{1}{4}(-\cos A \pm \sqrt{\cos^2 A + 8}).$$

Les deux racines sont admissibles; la première définit un angle $\varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, la seconde un angle $\varphi_2 > \frac{\pi}{2}$.

Si l'on prend l'équation sous la forme

$$\frac{R}{d + R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad \text{ou} \quad d + R \cos \varphi = R \sin \varphi . \operatorname{tg} \varphi,$$

elle exprime que la médiane AD et le rayon AO font des angles égaux respectivement avec BC et FE ou encore que l'angle ADB = B — C.

La solution $\varphi_2$ exige un complément d'explication; car le principe sur lequel on s'est appuyé, suppose que les facteurs du produit à rendre maximum soient positifs. Or, si $d + R \cos \varphi$ est négatif, admettons que $\alpha$ représente un nombre négatif, et les égalités de condition seront les mêmes que tantôt.

2° Soit K la projection de A sur BC. Le triangle AHG vaut les $\frac{2}{3}$ du triangle AHD ou les $\frac{1}{3}$ du triangle OKD, car AG = $\frac{2}{3}$ AD et AH = 2OD. Le maximum de l'aire AHG a donc lieu lorsque le rayon OA est parallèle à BC.

Remarque. Bien que le triangle ABC tende vers zéro, lorsque A tend vers B, il n'en est pas de même du triangle AHG, car le côté AB ayant pour limite la tangente en B, la hauteur CH a pour limite une parallèle à OB; AH tend vers la perpendiculaire élevée en B sur BC. En prenant sur cette perpendiculaire (dans le sens OD) une longueur AH′ = 2OD, on aura l'orthocentre H′ du triangle aplati BBC. (J. N.)

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**252.** On coupe un tétraèdre ABCD par un plan quelconque parallèle à la face BCD; soient B'C'D' la section, B''C''D'' la projection de B'C'D' sur le plan BCD parallèlement à une direction donnée $\alpha$. Trouver le lieu géométrique du centre de gravité du prisme B'C'D' B''C''D'' (milieu de la droite joignant les centres de gravité des bases).

Ce lieu est la droite joignant le centre de gravité de BCD au milieu de la parallèle à $\alpha$ menée par A et terminée au plan BCD.

**253.** Un cercle variable touche une parabole donnée en un point donné M et la rencontre en deux autres points P, Q; démontrer que le milieu de la corde PQ est à une distance constante de l'axe de la parabole.

Plus généralement, un cercle variable coupe une conique en quatre points A, B, C, D; si la corde AB a une direction constante, il en est de même de la corde CD.

**254.** On donne deux droites parallèles AP, BQ et un cercle O tangent à ces droites aux points A et B. Soit M un point quelconque du cercle O; on mène les droites MA, MB qui coupent BQ, AP en B', A'.

On trace la droite A'B', et on mène sur AB la perpendiculaire MD qui coupe A'B' en M'. 1° On a MD = M'M; 2° le point M' décrit une ellipse E; 3° trouver l'angle dont il faut faire tourner l'ellipse E autour de AB pour qu'elle se projette suivant le cercle O; 4° A'B' est la tangente en M' à l'ellipse E; 5° calculer la longueur MD, de manière que la surface totale du tronc de cône engendré par le trapèze ABB'A' tournant autour de BA soit égale à $m$ fois la surface du cercle Q.

(*Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles*).

**255.** Trouver le plus petit parallélogramme circonscrit à une ellipse donnée.

Cette question, proposée dans plusieurs manuels, peut être résolue analytiquement et géométriquement. Nous résumons ici une solution analytique qui nous a été communiquée par M. Tonneau (Liége), mais qui a déjà été publiée. Soient

$$y = mx + \mu, \quad y = mx - \mu, \quad y = m'x + \mu', \quad y = m'x - \mu'$$

les équations de deux couples de tangentes parallèles MN et QP, MQ et NP; $\mu$ et $\mu'$ désignent $\sqrt{a^2m^2+b^2}$, $\sqrt{a^2m'^2+b'^2}$. On calcule facilement les coordonnées

$$x_M = \frac{\mu'-\mu}{m-m'}, \quad y_M = \frac{m\mu'-\mu m'}{m-m'}, \quad x_N = -\frac{\mu'+\mu}{m-m'}, \quad y_N = -\frac{m\mu'+\mu m'}{m-m'};$$

d'où

$$\overline{MN}^2 = 4\mu'^2(1+m^2) : (m-m')^2.$$

La hauteur du parallélogramme est le double de la distance du centre de l'ellipse à MN, ou $2\mu : \sqrt{1+m^2}$. La quantité à rendre minimum est donc

$$\frac{\mu'^2\mu^2}{(m-m')^2} = \frac{(a^2m^2+b^2)(a^2m'^2+b'^2)}{(m-m'^2)} - a^2b^2 + a^2b^2 = \frac{(a^2mm'+b^2)^2}{(m-m')^2} + a^2b^2;$$

le minimum correspond donc à $a^2mm'+b^2=0$, etc.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

*1277. On donne les angles d'un triangle ABC, et le rayon $r$ du cercle inscrit, qui touche BC, CA, AB aux points D, E, F. Lorsque la figure tourne autour de la bissectrice de l'angle BAC, calculer les surfaces engendrées par les droites AF, FB, EC et par les deux arcs que sous-tend la corde FE. Trouver également les volumes engendrés par les triangles curvilignes ayant pour côtés les droites AF, AE et l'un des arcs de cercle FE.

1278. Par un point fixe A on mène une sécante quelconque qui rencontre une circonférence donnée O aux points B et C, et on construit le carré BCDE. Trouver les lieux des sommets D, E et du centre du carré. (G. DE ROCQUIGNY).

1279. Sur les côtés du triangle ABC comme bases on construit trois triangles isoscèles semblables $A_1BC$, $B_1CA$, $C_1AB$. Lorsque l'angle $A_1BC$ varie, les points de concours $A_2$, $B_2$, $C_2$ des couples de droites $(BC_1, CB_1)$, $(AB_1, A_1B)$, $(CA_1, C_1A)$ décrivent trois hyperboles. Les droites $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ concourent en un même point P, qui décrit une droite. Si $A'_1BC$, $B'_1CA$, $C'_1AB$ sont trois triangles isoscèles dont l'angle à la base est complémentaire de l'angle $A_1BC$, et que $A'_2$, $B'_2$, $C'_2$ désignent les points de concours de couples $(BC'_1, CB'_1)$, $(AB'_1, A'_1B)$, $(CA'_1, C'_1A)$, les droites $A_2A'_2$, $BB'_2$, $CC'_2$ concourent au centre du cercle circonscrit au triangle ABC. (J. NEUBERG.)

1280. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1^2+a & x_1x_2 & \dots & x_1x_{p-1} & x_1x_p & y_1 \\ x_1x_2 & x_2^2+a & \dots & x_2x_{p-1} & x_2x_p & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1x_{p-1} & x_2x_{p-1} & \dots & x_{p-1}^2+a & x_{p-1}x_p & y_{p-1} \\ x_1x_p & x_2x_p & \dots & x_{p-1}x_p & x_p^2+a & y_p \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{p-1} & y_p & -1 \end{vmatrix}.$$

(A. DEMOULIN.)

**Rectification.** Page 152, l. 7, lire *somme* au lieu de *limite*.

## QUESTIONS DE THÉORIE DES NOMBRES;

par S. Realis.

1. *Assigner, par formules directes, toutes les solutions entières de l'équation indéterminée*

$$mx^2 - 3mxy + (2m+1)y^2 = 1,$$

*m étant un entier donné.*

*Solution.* On tire, de l'équation proposée,

$$x = \frac{3y}{2} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{(m^2-4m)y^2+4m}.$$

Les deux valeurs de $x$ seront rationnelles, si la quantité sous le radical se réduit à un carré. Posant (puisque le carré doit être divisible par $m$)

$$(m^2-4m)y^2+4m = m^2z^2,$$

on tombe sur l'équation

$$mz^2-(m-4)y^2 = 4,$$

dont les solutions entières amènent, pour la proposée, des valeurs de $x$ et $y$ *entières*.

L'équation en $y$, $z$ est résolue complètement au t. II, p. 535, des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série), 1883. Il en résulte, pour $x$ et $y$, les valeurs successives

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=m, \\ y=m-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2m-3, \\ y=m-1, \end{cases} \text{ etc.}$$

2. *$\alpha$ étant un entier quelconque, et $\beta$ un entier différent de $\pm 1$, de $1 \pm 2\alpha$, et de $7 \pm 2\alpha$, l'équation*

$$x^4 - 4(\alpha^2+\beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2+\beta)x - (\alpha^4 - 2\beta^2 + 2) = 0$$

*n'a pas de racine entière.*

*Démonstration.* D'après un théorème d'Euler, l'équation $2u^2 - 2 = v$, est impossible en entiers $u$, $v$, excepté pour les deux systèmes

$$\begin{cases} u = \pm 1, \\ v = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \pm 3, \\ v = \pm 2. \end{cases}$$

Cela étant, l'équation

$$2(x^2 - \alpha x - \beta)^2 - 2 = (x - \alpha)^4,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - 4(\alpha^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - 2\beta^2 + 2) = 0,$$

est impossible en entiers $\alpha$, $\beta$, $x$, excepté dans les cas suivants :

$$1^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = 1, \\ x = \alpha, \end{cases} \qquad \beta = -1;$$

$$2^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = -1, \\ x = \alpha, \end{cases} \qquad \beta = 1;$$

$$3^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = 3, \\ x = \alpha + 2, \end{cases} \qquad \beta = 2\alpha + 1;$$

$$4^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = 3, \\ x = \alpha - 2, \end{cases} \qquad \beta = -(2\alpha - 1);$$

$$5^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = -3, \\ x = x + 2, \end{cases} \qquad \beta = 2\alpha + 7;$$

$$6^\circ \begin{cases} x^2 - \alpha x - \beta = -3, \\ x = \alpha - 2; \end{cases} \qquad \beta = -(2\alpha - 7).$$

De là l'énoncé **2**.

**3.** *$\alpha$ étant un entier quelconque, et $\beta$ un entier différent de zéro, et différent de $\pm\alpha^2$, et de $-2\alpha^2$, l'équation*

$$x^4 + 2(\alpha^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x + \alpha^4 - \beta^2 = 0$$

*n'a pas de racine entière.*

*Démonstration.* D'après un théorème d'Euler, l'équation $x^4 + y^4 = r^2$ est impossible en entiers, excepté pour $x = 0$, ou $y = 0$.

L'équation

$$x^4 + (x + \alpha)^4 = (x^2 + 2\alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 + 2(\alpha^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x + \alpha^4 - \beta^2 = 0,$$

est donc impossible, excepté :

1° pour $x = 0$, auquel cas $\beta = \pm\alpha^2$;

2° pour $x = -\alpha$, auquel cas on a $\beta = 0$, ou $\beta = -2\alpha^2$.

De là l'énoncé **3**.

**4.** *$\alpha$ étant un entier quelconque, et $\beta$ un entier positif, non carré, l'équation*

$$x^4 - 2(x^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - \beta^2) = 0,$$

*n'a pas de racine entière.*

*Démonstration*. D'après un théorème d'Euler, l'équation $y^4 - x^4 = r^2$ est impossible en entiers, excepté pour :

$$\left\{\begin{array}{l} x=0, \\ y=0, \\ r=0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=0, \\ r=\pm y^2, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=\pm y, \\ r=0. \end{array}\right.$$

L'équation

$$(\alpha - x)^4 - x^4 = (x^2 - 2\alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - 2(\alpha^2 + \beta)x^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - \beta^2) = 0,$$

est donc impossible, excepté :

1° pour $\alpha = 0$, auquel cas on a $x^2 - \beta = 0$, et $\beta$ doit être un carré;

2° pour $x = \frac{\alpha}{2}$, auquel cas, $\alpha$ étant pair, on doit avoir $\beta = -\frac{3\alpha^2}{4}$, valeur négative.

3° Pour $x = 0$, auquel cas on doit avoir $\beta = \pm \alpha^2$, et la valeur positive de $\beta$ est un carré.

5. *$\alpha$ étant un entier quelconque, et $\beta$ un entier différent de zéro, de $-1$ et de $\pm\alpha$, l'équation*

$$x^4 + 2\alpha x^3 - (\alpha^2 + 2\beta + 1)x^2 + \alpha(2\beta + 1)x - (\beta^2 + \beta) = 0$$

*n'a pas de racine entière.*

*Démonstration*. D'après un théorème de Fermat, l'équation

$$y^2 + y = 2x^4$$

est impossible en nombres entiers, excepté pour

$$\left\{\begin{array}{l} y=0, \\ x=0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y=-1, \\ x=0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y=1, \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$$

L'équation

$$(x^2 - \alpha x + \beta)^2 + x^2 - \alpha x + \beta = 2x^4,$$

c'est-à-dire

$$x^4 + 2\alpha x^3 - (\alpha^2 + 2\beta + 1)x^2 + \alpha(2\beta + 1)x - (\beta^2 + \beta) = 0,$$

est donc impossible, excepté :

1° pour $x = 0$; alors $\beta = 0$, ou $\beta = -1$;
2° pour $x = 1$; alors $\beta = \alpha$,
3° pour $x = -1$; alors $\beta = -\alpha$.

6. *$\alpha$ et $\beta$ étant entiers, et aucune des expressions*

$$\alpha^2 - 2\alpha - 19, \quad \alpha^2 - 2\alpha - 3, \quad \alpha^2 - 2\alpha + 5$$

*ne se réduisant à un carré, l'équation*

$$x^4+(2\alpha-1)x^3+(\alpha^2+\beta)x^2-\beta(2\alpha+3\beta)x+\beta^3+\beta^2-1=0$$

*n'a pas de racine entière.*

*Démonstration.* D'après un théorème d'Euler, l'équation $u^5+1=v^2$ est impossible en nombres entiers excepté pour

$$\left\{\begin{array}{l}u=0,\\ v=\pm 1,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}u=-1,\\ v=0,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}u=2\\ v=\pm 3.\end{array}\right.$$

L'équation

$$(x-\beta)^5+1=(x^2+\alpha x-\beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4+(2\alpha-1)x^3+(\alpha^2+\beta)x^2-\beta(2\alpha+3\beta)x+\beta^3+\beta^2-1=0,$$

est donc impossible, excepté pour

$$\left\{\begin{array}{l}x=\beta,\\ \beta^2+(\alpha-1)\beta=1;\end{array}\right. \quad \alpha^2-2\alpha+5=\text{carré},$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=\beta,\\ \beta^2+(\alpha-1)\beta=-1;\end{array}\right. \quad \alpha^2-2\alpha-3=\text{carré}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=\beta-1,\\ (\beta-1)^2+\alpha(\beta-1)-\beta=0;\end{array}\right. \quad \alpha^2-2\alpha+5=\text{carré}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=\beta+2,\\ (\beta+2)^2+\alpha(\beta+2)-\beta=3;\end{array}\right. \quad \alpha^2-2\alpha+5=\text{carré}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=\beta+2,\\ (\beta+2)^2+\alpha(\beta+2)-\beta=-3;\end{array}\right. \quad \alpha^2-2\alpha-19=\text{carré}.$$

Il est facile, comme on le voit, d'établir une foule de propositions analogues à celles qui viennent d'être démontrées. Des exemples en ont déjà été donnés dans la *Mathesis*.

Turin, 24 mai 1883.

Note. A propos de la dernière question de Realis, rappelons à nos lecteurs, le curieux *théorème empirique* de Catalan, dont personne n'a pu donner la démonstration, ni prouver la fausseté :

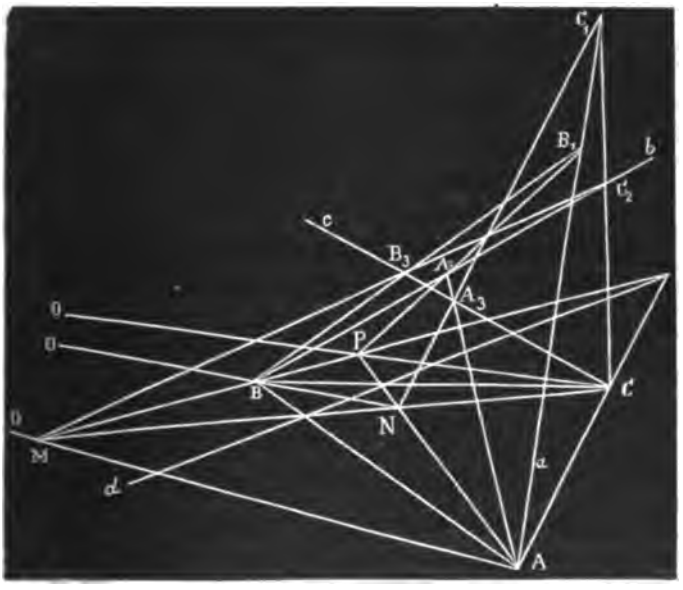
*8 et 9 sont les seuls nombres entiers consécutifs qui soient des puissances exactes.* (P. M.)

## LE THÉORÈME DE CHASLES RELATIF AUX CUBIQUES GAUCHES;

par M. STUYVAERT, professeur à l'Athénée de Gand.

***Le point de rencontre de trois plans osculateurs à une cubique gauche est situé dans le plan des trois points d'osculation*** (*).

Il existe, à notre connaissance, une dizaine de démonstrations de ce théorème; les plus élégantes, comme il arrive souvent, sont celles qui supposent le plus de connaissances antérieures. La méthode que nous allons employer est au fond une variante de celles de VON STAUDT (**)




et de SCHRÖTER(***); elle a l'avantage de pouvoir se placer tout au début de la théorie et de conduire à quelques conséquences curieuses.

1. Soient A, B, C trois points de la cubique, et $a$, $b$, $c$ les tangentes en

---

(*) CHASLES (*Liouville* (2) II, 1857, pp. 397-407). On peut définir une cubique gauche, l'intersection partielle de deux cônes du second ordre qui ont une génératrice commune; la courbe est projetée de chacun de ses points suivant un cône du second ordre, la tangente à la courbe au sommet de ce cône est une génératrice de celui-ci, et le plan osculateur est tangent au cône.

(**) *Geometrie der Lage.*

(***) *Crelle*, (1859), t. 56, p. 27.

ces points. Les plans AB$b$, AC$c$ et le plan osculateur $\alpha$ en A touchent respectivement le cône de sommet A perspectif à la courbe, le long des génératrices AB, AC, $a$. D'après une propriété connue des cônes du second ordre, les plans ABC, AC$a$, AB$a$ coupent respectivement les plans $\alpha$, AB$b$, AC$c$ suivant trois droites d'un même plan.

Donc, si $B_1$, $C_1$ ; $C_2$, $A_2$ ; $A_3$, $B_3$ sont les points de rencontre respectifs de $a$ avec les plans (B, $c$) et (C, $b$), de $b$ avec (C, $a$) et (A, $c$), de $c$ avec (A, $b$) et (B, $a$) ; si M, N, P sont les traces de $B_3C_2$, $C_1A_3$ et $B_1A_2$ sur le plan ABC, il résulte de ce qu'on vient de voir que AM appartient au plan $\alpha$ ; pareillement BN et CF sont respectivement des droites des plans osculateurs en B et C.

$AA_2A_3$, $BB_3B_1$, $CC_1C_2$ sont trois directrices du système réglé dont $a, b, c$ sont trois génératrices ; les plans ($a$, $AA_2A_3$), ($b$, $BB_3B_1$), ($c$, $CC_1C_2$) sont tangents à l'hyperboloïde, support de ce système réglé ; les traces NP, PM, MN de ces plans sur ABC touchent la conique suivant laquelle le plan ABC coupe cet hyperboloïde. Donc les triangles ABC et MNP sont homologiques et les droites AM, BN, CP concourent en un point O.

**2.** Une cubique gauche étant complètement déterminée par trois points et les tangentes en ces points, nous rencontrons ce théorème de Géométrie élémentaire :

*Si par trois points non en ligne droite* A, B, C, *on mène trois droites quelconques a, b, c, dont deux ne soient pas dans un même plan, si l'on mène, par* A, *une droite s'appuyant, en* $A_2$ *et* $A_3$, *sur b et c, par* B *une droite qui s'appuie en* $B_3$ *et* $B_1$ *sur c et a, par* C *une droite qui s'appuie en* $C_1$ *et* $C_2$ *sur a et b, les droites* $B_3C_2$, $C_1A_3$, $A_2B_1$ *percent le plan* ABC *aux trois sommets* M, N, P *d'un triangle circonscrit et homologique à* ABC.

Les côtés du triangle MNP coupent les côtés homologues de ABC en trois points d'une droite $d$ qui est visiblement la polaire de O, à la fois par rapport au triangle ABC et à la conique $\Sigma$, intersection du plan ABC avec l'hyperboloïde déterminé par $a, b, c$. Donc, *la conique* $\Sigma$ *est la conique polaire de* O *par rapport au triangle* ABC (*).

A cause d'une propriété connue, la droite polaire de O par rapport à ABC est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique (plans imaginaires conjugués si A, B, C sont réels).

---

(*) Voir Dixon, *On twisted cubics* (*Quarterly Journal*, t. 24).

Donc *l'axe d'homologie des triangles* ABC *et* MNP *est l'intersection de deux plans osculateurs.*

En faisant la figure polaire réciproque de celle qui se trouve dans le plan ABC et en choisissant Σ comme conique directrice, on voit que *la conique* Σ *est la conique polaire de la droite d par rapport à la courbe de troisième classe représentée par les trois points* M, N, P. (*).

---

## AIRE DES SINUSOÏDES ET FORMULE DE WALLIS(**).

1. *Aire d'une courbe.* Soient

$$x_0,\ x_1 = x_0 + \delta_1,\ x_2 = x_0 + \delta_2,\ \ldots,\ X = x_{n-1} + \delta_n,$$

les abscisses d'une courbe continue, les intervalles positifs $\delta$ étant égaux ou inégaux;

$$y_{01},\ y_{12},\ y_{23},\ \ldots,\ y_{n-1,n},$$

les ordonnées correspondant respectivement à un point quelconque des intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$.

On sait que la somme

$$y_{01}\,\delta_1 + y_{12}\,\delta_2 + \ldots + y_{n-1,n}\,\delta_n \quad \text{ou} \quad \sum_{x_0}^{X} y\delta$$

tend vers une limite bien déterminée S, quand tous les $\delta$ tendent simultanément vers zéro. Quand les ordonnées $y$ sont toutes positives, S est l'aire de la courbe considérée depuis $y_0$ jusque Y. Quand elles sont tantôt positives, tantôt négatives, S est l'aire de la partie de la courbe située au dessus de l'axe des $x$, moins l'aire de la partie située en dessous. Dans ce qui suit, nous appellerons S, dans les deux cas, *l'aire (algébrique)* de la courbe.

2. *Aire de la sinusoïde fondamentale.* Considérons la courbe $y = \sin x$ et choisissons pour $y_{01}, y_{12}, \ldots, y_{n-1,n}$ les ordonnées correspon-

---

(*) La figure possède encore des propriétés descriptives que l'on aperçoit aisément.

(**) Dans cet article, nous évitons l'emploi du calcul intégral, dans le sens propre du mot (calcul inverse du calcul différentiel), parce qu'il implique la connaissance du calcul différentiel et, en particulier, celle de ce théorème difficile à établir : *Deux fonctions qui ont une même dérivée ne diffèrent que par une constante.*

dant au milieu de chacun des intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ supposés tous égaux. On aura

$$\sum_{x_0}^{X} y\delta = \delta\left[\sin m\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) + \sin m\left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right) + \ldots + \sin m\left(x_{n-1} + \frac{\delta}{2}\right)\right].$$

Mais

$$2\sin m\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{m\delta}{2} = \cos mx_0 - \cos mx_1,$$

$$2\sin m\left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{m\delta}{2} = \cos mx_1 - \cos mx_2,$$

. . . . . .

$$2\sin m\left(x_{n-1} + \frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{m\delta}{2} = \cos mx_{n-1} - \cos mX.$$

Par suite, dans le cas actuel,

$$\sum_{x_0}^{X} y\delta = \frac{\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{m\delta}{2}}(\cos mx_0 - \cos mX),$$

et, à la limite, pour $\delta = 0$,

$$S = \lim \sum_{x_0}^{X} y\delta = \frac{\cos mx_0 - \cos mX}{m}$$

puisque, pour $\delta = 0$,

$$\lim \frac{\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{m\delta}{2}} = \frac{1}{m}\lim \frac{\frac{m\delta}{2}}{\sin\frac{m\delta}{2}} = \frac{1}{m} \times 1.$$

Remarque. On trouve de même, pour l'aire (algébrique) S′ de la *cosinusoïde* $y = \cos mx$, de $x_0$ à X,

$$S' = \frac{\sin mX - \sin mx_0}{m}.$$

Si $x_0 = 0$, $X = \frac{1}{2}\pi$, on a, en particulier,

$$S' = \frac{\sin\frac{1}{2}m\pi}{m}.$$

Par suite, dans le cas où $m = 2n$, $n$ étant entier,

$$S' = 0,$$

et, si $m = 2n + 1$,

$$S' = (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Si de plus $n = 0$, ou $m = 1$, on trouve que l'aire de $y = \cos x$ (et aussi celle de $y = \sin x$), de $x = 0$ à $x = \frac{1}{2}\pi$, est égale à 1.

3. *Aire des sinusoïdes paires.* Nous appelons *sinusoïde paire* la courbe ayant pour équation $y = \sin^{2n} x$, $n$ étant entier positif. La *cosinusoïde* $y = \cos^{2n} x$ est au fond identique à cette sinusoïde, comme on le voit en remplaçant $x$ par $\frac{1}{2}\pi - x$, c'est-à-dire, par un simple changement d'axes de coordonnées.

Nous allons chercher l'aire $S_{2n}$ de la seconde de ces courbes, de $x = 0$ à $x = \frac{1}{2}\pi$. Elle est évidemment égale à l'aire de la première dans le même intervalle.

D'après une forme connue,

$$2^{2n-1}\cos^{2n} x = \cos 2nx + C^1_{2n}\cos(2n-2)x + \cdots + C^{n-1}_{2n}\cos 2x + \tfrac{1}{2}C^n_{2n},$$

si l'on représente par $C^r_p$ les combinaisons de $p$ lettres $r$ à $r$. Il en résulte immédiatement

$$2^{2n-1}\lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2n} x \,.\, \delta = \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2nx \,.\, \delta + C^1_{2n} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(2n-2)\, x \,.\, \delta$$

$$+ \ldots + C^{n-1}_{2n} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2x \,.\, \delta + \tfrac{1}{2} C^n_{2n} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \delta .$$

D'après la remarque du n° 2, tous les termes du second membre à l'exception du dernier sont nuls; le dernier est évidemment égal à $\frac{1}{2} C^n_{2n} \,.\, \frac{1}{2}\pi$. Le premier membre est d'ailleurs $2^{2n-1} S_{2n}$.

On a donc

$$2^{2n-1} S_{2n} = \frac{1}{2} C^n_{2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad S_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} C^n_{2n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$S_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1.2.3 \ldots 2n}{1.2.3 \ldots n \,.\, 1.2.3 \ldots n} \frac{\pi}{2} = \frac{1.2.3 \ldots 2n}{2.4. \ldots 2n \,.\, 2.4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2},$$

ou enfin,

$$S_{2n} = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. On trouve de même, pour l'aire $S_{2n+2}$ de $y = \cos^{2n+2} x$ ou $y = \sin^{2n+2} x$, de $x = 0$ à $x = \frac{1}{2}\pi$,

$$S_{2n+2} = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{2.4.6 \ldots 2n\,(2n+2)} \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent,

$$S_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} S_{2n}.$$

4. ***Aire des sinusoïdes impaires.*** Les courbes identiques $y = \sin^{2n+1} x$, $y = \cos^{2n+1} x$, qui peuvent s'appeler ***sinusoïdes*** et ***cosinusoïdes impaires***, ont évidemment une même aire $S_{2n+1}$ de $x = 0$ à $x = 1$.

On a, comme l'on sait,

$$2^{2n} \cos^{2n+1} x = \cos(2n+1)x + C^1_{2n+1} \cos(2n-1)x + \cdots$$
$$+ C^{n-1}_{2n+1} \cos 3x + C^n_{2n+1} \cos x,$$

et, par suite,

$$2^{2n} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2n+1} x \,.\, \delta = \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(2n+1)x \,.\, \delta$$
$$+ C^1_{2n+1} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(2n-1)x \,.\, \delta + \cdots$$
$$+ C^{n-1}_{2n+1} \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 3x \,.\, \delta + C^n_{2n+1} \lim \sum_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \,.\, \delta,$$

ou d'après la dernière formule du n° 2, en renversant l'ordre des termes du second membre,

$$2^{2n} S_{2n+1} = C^n_{2n+1} - \frac{1}{3} C^{n-1}_{2n+1} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} C^1_{2n+1} + (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

On trouve de même, pour l'aire $S_{2n-1}$ de $y = \cos^{2n-1} x$ ou $y = \sin^{2n-1} x$,

$$2^{2n-2} S_{2n-1} = C^{n-1}_{2n-1} - \frac{1}{3} C^{n-2}_{2n-1} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{1}{2n-1} C^1_{2n-1}$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}.$$

D'après ***une formule combinatoire*** démontrée antérieurement (***Mathesis***, p. 159) le rapport des seconds membres des relations précédentes est $[8n : (2n+1)]$. On trouve donc, en divisant ces deux relations l'une par l'autre,

$$2^2 \frac{S_{2n+1}}{S_{2n-1}} = \frac{8n}{2n+1},$$

c'est-à-dire

$$S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} S_{2n-1},$$

relation analogue à celle qui termine le n° 3. On a de même, successivement,

$$S_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} S_{2n-3}$$

$$S_{2n-3} = \frac{2n-4}{2n-3} S_{2n-5}$$

$$S_1 = \frac{2}{3} S_1.$$

On a d'ailleurs, pour $n$ nul, d'après la remarque qui termine le n° 2, $S_1 = S' = 1$. Donc enfin

$$S_{2n+1} = \frac{2.4.6. \ldots 2n}{1.3.5.7. . (2n+1)}.$$

Remarque. Si $p$ est entier, pair ou impair, on a

$$p S_p = (p-1) S_{p-2},$$

d'après la remarque du n° 3 et ce qui vient d'être prouvé.

5. ***Formule de Wallis.*** On a évidemment, de $x = 0$ à $x = \frac{1}{2}\pi$,

$$\cos^{2n} x \gtrless \cos^{2n+1} x \geqq \cos^{2n+2} x,$$

et, par suite, la courbe $y = \cos^{2n+1} x$ est située entre les courbes $y = \cos^{2n} x$ et $y = \cos^{2n+2} x$, tout en ayant les mêmes extrémités. On a donc

$$S_{2n} > S_{2n+1} > S_{2n+2},$$

ou

$$\frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots \quad 2n} \frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6 \ldots \quad 2n}{3.5.7 \ldots (2n+1)} > \frac{1.3.5 \ldots (2n+1)}{2.4.6 \ldots (2n+2)} \frac{\pi}{2}.$$

On déduit de là

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots \ldots 2n.2n}{1.3.3.5.5.7 \ldots (2n-1)(2n+1)},$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots \ldots 2n.2n}{1.3.3.5\ 5.7 \ldots (2n-1)(2n+1)} \times \frac{2n+2}{2n+1},$$

ou, en abrégé,

$$\frac{\pi}{2} > P_{2n}, \quad \frac{\pi}{2} < P_{2n}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right),$$

en posant

$$P_{2n} = \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots \ldots 2n.2n}{1.3.3.5.5.7 \ldots (2n-1)(2n+1)}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{\pi}{2} = P_{2n}\left(1 + \frac{\theta}{2n+1}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\theta}{2n+1}} = P_{2n},$$

en désignant par $\theta$ une quantité comprise entre 0 et 1. Par suite, en faisant $n = \infty$, on a

$$\frac{\pi}{2} = \lim P_{2n} = \lim \frac{2.2\ 4.4.6.6 \ldots 2n.2n}{1.3.5.5.7.7 \ldots (2n-1)(2n+1)},$$

ce qui est la formule de Wallis.

Note. Le théorème du n° 1 sur l'existence de la limite S est dû à Cauchy; on l'attribue souvent à tort à Riemann (voir notre *Cours d'Analyse*, n°s 106-108, pp. 25-26). — Si nos souvenirs sont exacts, c'est Kepler qui a obtenu, le premier, l'aire de la sinusoïde fondamentale, par un procédé identique ou analogue à celui du n° 2. — Wallis a trouvé sa formule *par induction* et l'a publiée dans son *Arithmetica infinitorum* (1655). — Laplace, dans la première des *Additions* de sa *Théorie analytique des Probabilités* (pp. 462 464, de la 3e édition (1820), en donne une démonstration, qui traduite dans le langage précis de l'analyse moderne devient celle du n° 5; puis (pp. 465-468) il analyse avec soin la démonstration de Wallis en en signalant les postulats; enfin (pp. 469-470) il en déduit une formule de Stirling. — La formule de Wallis se déduit aisément de celle qui donne cos $x$, sous forme de produit infini, mais cette formule relative à cos $x$ n'est pas aussi facile à établir qu'il paraît au premier abord (voir Serret, *Trigonométrie*, cinquième édition (1875), pp. 242-247, n°s 185-188). (P. M.)

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Précis d'Arithmétique élémentaire**, à l'usage des écoles moyennes, des Cours professionnels, des Écoles normales et des classes d'humanités par l'abbé E. Gelin, Docteur en philosophie et en théologie, professeur de Mathématiques supérieures au collège Saint-Quirin à Huy. Quatrième édition, rédigée d'après un plan simplifié et contenant les solutions raisonnées de cent trente problèmes-types. Namur, Wesmael-Charlier; Huy, chez l'auteur (In-8° de 272 p.). Prix : 3 francs.

Nous avons maintes fois parlé dans *Mathesis* du *Traité*, du *Précis* et de *Recueil*

*de problèmes d'Arithmétique* de M. l'abbé Gelin et nous en avons fait ressortir les qualités, au point de vue scientifique, pédagogique et pratique.

Si nous ne nous contentons pas aujourd'hui de signaler simplement la quatrième édition du *Précis*, c'est que l'auteur a introduit de profondes modifications dans l'ordre des matières exposées dans les éditions antérieures.

L'ordre ancien était celui-ci : 1. Opérations sur les nombres entiers. 2. Caractères de divisibilité. 3. Théorie des nombres premiers. 4. Fractions ordinaires. 5. Fractions décimales. 6. Fractions décimales périodiques. 7. Les mesures. 8. La résolution des problèmes. 9. Puissances et racines. 10. Rapports et proportions. 11. Progressions et logarithmes.

L'ordre nouveau est 1, 2, 4, 5, 7, 8, 3, 6, 9, 10, 11; les difficultés sont beaucoup mieux graduées, la théorie des fractions étant rendue indépendante autant que possible de la théorie des nombres premiers. Il y a une foule de manuels d'arithmétique élémentaire, où l'on procède de cette manière, mais dans la plupart, on le fait aux dépens de la rigueur. Naturellement, M. Gelin n'a eu garde de tomber dans ce défaut. Dans la théorie des fractions ordinaires, il se borne aux notions indispensables sur la simplification des fractions et sur la réduction au même dénominateur, sauf à revenir plus tard sur ces deux questions, après la théorie des nombres premiers.

Nous croyons que l'ordre nouveau adopté dans le *Précis* de M. Gelin en rendra l'emploi beaucoup plus facile pour la moyenne des élèves, et nous sommes persuadé que son livre, sous sa nouvelle forme, rendra plus de services encore à l'enseignement que sous l'ancienne (*) (P. M.)

---

**Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, de mathématiques spéciales, des candidats aux écoles du gouvernement et des candidats à l'agrégation, par MM. B. Niewenglowski, Inspecteur de l'Académie de Paris, et L. Gérard, Professeur au lycée Charlemagne. Paris, G. Carré et C. Naud. *Première partie*. Géométrie plane, 1898 (In-8° carré de XX-362 p. avec 289 figures. Prix cart., 5 fr.; broché, 4 fr.) *Deuxième partie*. Géométrie dans l'espace, 1899. (In-8° carré de 495 p. avec 363 figures. Prix : cart. 6 fr., broché 5 fr.).

Voici un excellent ouvrage que nous aurions voulu signaler à nos lecteurs plus tôt. Les auteurs se sont proposé de nous doter d'un Cours de géométrie qui soit rigoureux et complet sans être trop compliqué; ils ont voulu tenir compte dans

---

(*) Trois petites observations : 1° On peut supprimer sans inconvénient le n° 58, contenant une règle difficile à retenir et non démontrée. 2° Au n° 97, 4° on peut prouver que le produit est un dénominateur commun; il ne faut renvoyer au n° 372 que pour la démonstration de ce fait que ce dénominateur commun est le plus petit. 3° La règle relative aux annuités (n° 489) peut se déduire de la formule des intérêts composés sans recourir aux progressions. N'est-il pas utile de faire connaître cette seconde manière d'établir cette règle?

une certaine mesure des observations critiques adressées à l'enseignement de la géométrie de divers côtés, mettre à profit les perfectionnements signalés dans les recueils périodiques ou ayant cours dans certaines classes, enfin introduire les nouvelles théories utiles à connaître et en quelque sorte indispensables à ceux qui se préparent aux études supérieures. Bien que le manuel s'éloigne des programmes belges ou plutôt pour cette raison même les élèves de nos classes scientifiques et même les professeurs y trouveront une foule de choses intéressantes, instructives ou originales.

Sauf quelques changements qui ont leur valeur, l'ordre des matières est, en général celui qui est suivi dans les manuels français depuis un demi-siècle : Le troisième livre comprend les figures semblables, le quatrième la mesure des aires, le septième tout ce qui est relatif aux corps ronds, le huitième les courbes usuelles.

Les notions fondamentales ont été exposées avec clarté et rigueur : définitions de la droite et du plan, comparaison des segments rectilignes, mesure des grandeurs (avec une note à la fin du premier volume), etc. Ainsi que la logique l'exige, avant d'aborder la géométrie plane on démontre que par trois points non en ligne droite on peut faire passer un plan et un seul. Les premières notions sur la circonférence se placent au début de la géométrie plane, et l'idée d'angle reçoit tous ses développements en se liant à celle de l'arc de cercle décrit du sommet comme centre et intercepté entre les côtés. Les auteurs placent la théorie des parallèles avant celle des perpendiculaires; cet ordre leur permet de généraliser l'idée d'angle et de parler des plans orientés avant de passer aux propriétés des triangles et des polygones. A l'occasion de la symétrie par rapport à un centre ou une droite, ils insistent sur l'égalité directe ou l'égalité inverse de deux figures situées dans un même plan.

La mesure des angles au centre, dans le cas de l'incommensurable, est présentée aussi simplement que possible, sans le subterfuge de renvoyer aux traités d'Arithmétique qui, eux-mêmes, renvoyent souvent aux traités de Géométrie. Les problèmes du deuxième et du troisième livre sont accompagnés de l'appréciation de la simplicité et de l'exactitude des constructions, d'après les principes de M. Lemoine. A la fin du deuxième Livre sont exposées les premières notions sur le déplacement d'une figure plane (Translation, rotation, retournement).

Le Livre III débute par quelques connaissances sur les *vecteurs*, et par l'étude de la variation du rapport MA : MB quand le point M parcourt la droite indéfinie AB; cette étude conduit à introduire le point à l'infini de la droite. La théorie des lignes proportionnelles est accompagnée de la construction des expressions rationnelles. La théorie des figures homothétiques précède celle des figures semblables; cette marche, préconisée depuis longtemps, est plus rationnelle que l'ancienne. Le chapitre intitulé *Propriétés métriques du triangle, du quadrilatère, du cercle, etc.* est très complet; on y rencontre le théorème de Stewart avec des applications, la théorie des axes radicaux, celle des droites antiparallèles, la construction des valeurs irrationnelles, quelques lieux géométriques et le problème du cercle tangent à trois cercles donnés.

De même, le chapitre consacré aux *transversales*, aux *polaires* et à l'*inversion* renferme tout ce qu'on peut désirer sur ces matières; il est une excellente introduction à la géométrie supérieure. La recherche de la longueur d'une circonférence est précédée d'explications sur ce qu'on peut appeler longueur d'une courbe, et la détermination de $\pi$ par la méthode des périmètres ou celle des isopérimètres est donnée avec soin, sans prolixité.

Dans la mesure des aires, les auteurs suivent dans le texte la méthode classique; mais une note placée à la fin du volume expose une méthode, due à M. Gérard, qui est affranchie de tout postulat (voir *Mathesis*, 1897, p. 265.)

Les exercices placés à la fin de chaque chapitre sont bien gradués et complètent souvent le Cours; les plus difficiles sont accompagnés d'indications suffisantes pour mettre le lecteur sur la voie de la démonstration. Cette partie de l'ouvrage est, à nos yeux un véritable Cours d'applications géométriques; les auteurs se sont efforcés de la tenir au courant de ce qui a paru dans les recueils périodiques.

L'analyse assez détaillée que nous venons de faire de la Géométrie plane de MM. Gérard et Niewenglowski nous dispense de faire un examen complet de la seconde partie. Nous signalons particulièrement le Livre VIII qui traite géométriquement les courbes usuelles; les propriétés des coniques y sont établies par des procédés très simples. Nos programmes belges ont peut-être le tort de ne pas faire précéder la géométrie analytique de l'étude géométrique des courbes du second ordre.

Les *Compléments* de géométrie dans l'espace comprennent les chapitres suivants : I. Déplacement d'un solide indéformable. II. Divisions homographiques, faisceaux homographiques. III. Involutions. IV. Homologie. V. Propriétés générales des coniques. VI. Propriétés générales des polyèdres. Quatre notes sont consacrées respectivement à la symétrie, aux coordonnées tétraédriques, à la mesure des polyèdres, et au plus court chemin dans l'espace et sur la sphère.

L'exécution typographique du Cours de Géométrie fait honneur aux presses de la maison Carré et Naud. (J. N.)

Note. A cause de l'importance de la Géométrie de MM. B. Niewenglowski et H. Gérard, nous croyons utile d'ajouter au précédent compte rendu, la table détaillée des livres V, VI, VII.

Livre V : *Droites et Plan*. — *Le plan*. Définition, détermination d'un plan. Modes de génération d'un plan. Intersection d'une droite et d'un plan. Exercices. — II. Droites et plans parallèles. — III. Angles de droites non situées dans le même plan. — IV. *Droite et plan perpendiculaires*. Définition et premières propriétés. Théorème des trois perpendiculaires. Lieu des points équidistants de deux points donnés. Perpendiculaire et obliques. Exercices. — V. *Angles dièdres*. Définition. Rectiligne d'un dièdre. Dièdre droit Exercices. — VI. *Plans perpendiculaires*. — VII. *Plans parallèles*. Définition et premières propriétés. Distance de deux plans parallèles. Proportionnalité des segments interceptés par des plans parallèles sur les côtés d'un polygone plan ou gauche. Ces particulier du quadrilatère. Plan bissecteur d'un dièdre. Exercices. — VIII. *Projections*

*orthogonales*. Définitions. Projection d'une droite. Projections de deux droites orthogonales sur un plan parallèle à l'une d'elles. Réciproques. Angle d'une droite et d'un plan. Lignes de pente d'un plan. Projections sur un axe. Perpendiculaire commune à deux droites. Exercices. — IX. *Angles polyèdres*. Définitions. Angles polyèdres symétriques. Trièdres supplémentaires. Angles polyèdres supplémentaires. Propriétés fondamentales des angles polyèdres convexes. Trièdres rectangles. Cas d'égalité des trièdres quelconques. Cas d'égalité des trièdres rectangles. Analogie et différences entre les trièdres et les triangles. Constructions d'un trièdre connaissant les trois faces ou les trois dièdres. Exercices. — X. Rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans. — XI. Translation et rotation.

Livre VI : *Polyèdres*. — I. *Généralité sur les polyèdres*. Définitions. Propriétés des diagonales d'un parallélépipède. Exercices. — II. *Volume du prisme*. Définitions. Mesure du parallélépipède rectangle. Mesure du parallélépipède droit. Mesure du parallélépipède oblique. Mesure du prisme. Exercices. — III. *Volume de la pyramide*. Définitions. Sections faites dans une pyramide par des plans parallèles à la base. Mesure de la pyramide. Tronc de pyramide de première et de deuxième espèce. Tronc de prisme triangulaire. Prismatoïde. Exercices. — IV. *Symétrie*. Définitions Symétrie par rapport à une droite. Symétrie par rapport à un point ou par rapport à un plan. Exercices. — V. *Homothétie et similitude*. Définition de l'homothétie. Conséquences. Définition de la similitude. Conséquences. Décomposition de deux polyèdres semblables en tétraèdres semblables chacun à chacun. Réciproque. Cas de similitude de deux tétraèdres. Rapport des volumes de deux polyèdres semblables. Exercices.

Livre VII : *Les corps ronds*. I. *Notions sur les surfaces coniques, cylindriques et de révolution*. Définitions. Plan tangent. Normale. Exercices. II. *Cylindre et cône de révolution. Aire de la surface latérale, développement, volume*. Cylindre de révolution. Cône de révolution. Tronc de cône de révolution de première et de deuxème espèce. Exercices. — III. *Premières notions sur la sphère*. Définitions. Positions relatives d'une sphère et d'une droite, ou d'un plan. Tangentes. Plans tangents. Cônes circonscrits à une sphère. Mener par une droite un plan tangent à une sphère donnée. Positions relatives de deux sphères. Angle de deux sphères, d'une droite et d'une sphère. Sphères orthogonales. Exercices. — IV. *Aire et volume de la sphère*. Aire d'une zone, ou d'une calotte. Aire de la sphère. Volume engendré par un triangle en tournant autour d'un axe passant par un de ses sommets, situé dans son plan et ne le traversant pas. Secteur sphérique. Volume de la sphère. Volume engendré par un segment circulaire en tournant autour d'un diamètre qui ne le traverse pas. Segment sphérique à une ou deux bases. Formule de Mac-Laurin. Exercices. — V. *Sphère circonscrite, sphères inscrites à un tétraèdre*. Sphère circonscrite à un tétraèdre. Sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre. Sphères tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche. Exercices. — VI. *Plan radical et plan polaire*. Puissance d'un point par rapport à une sphère. Plan radical. Centre radical. Points conjugués par rapport à une sphère. Plan polaire d'un point, pôle d'un plan. Droites conjuguées par rapport à une sphère. Exercices, — VII. *Systèmes*

*de sphères. Inversion.* Centres d'homothétie de deux sphères. Axes d'homothétie de trois sphères. Plan d'homothétie de quatre sphères. Plans tangents à deux ou à trois sphères. Inversion. Sphères isogonales. Sphères tangentes. Construction des sphères tangentes à quatre sphères données. Cercles inverses. Projections stéréographiques. Sections antiparallèles d'un cône oblique à base circulaire. Exercices. — VIII. *Figures tracées sur la sphère.* Pôles d'un cercle de la sphère. Trouver le rayon d'une sphère solide. Angles sphériques. Cercles orthogonaux; axes radicaux. Polygones sphériques, premières propriétés. Triangles et polygones polaires. Triangles opposés. Cas d'égalité des triangles sphériques. Perpendiculaires et obliques. Positions relatives de deux cercles. Constructions. Equivalence des polygones sphériques et des fuseaux. Mesure des polygones sphériques. Rapport anharmonique. Polaires. Centres de similitude de deux cercles sur la sphère. Cercles isogonaux, cercles tangents. Exercices.

---

**Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften**, herausgegeben von H. Burkhardt und W. F. Meyer. Band I, Heft 5 (pp. 513-720). Band II, Heft 2/3 (pp. 161-399). Leipzig, Teubner, 1900. Prix : 6 marcs 40, 7 marcs 70.

Ces livraisons ont paru le 29 mai et le 10 avril 1900. Voici l'indication des diverses sections dont elles se composent.

I. *Théorie de Galois et applications*, par C. Hölder, professeur à l'Université de Leipzig (fin) (pp. 513-520).

*Groupes finis de substitutions linéaires*, par A. Wiman, professeur à l'Université de Lund (522-554).

*Théorie* (élémentaire) *des nombres*, par P. Bachman, à Weimar (pp. 555-581).

*Théorie arithmétique des formes*, par K. Th. Vahlen, professeur à l'Université de Königsberg (pp. 582-635).

*Théorie analytique des nombres*, par P. Bachman (pp. 636-674)

*Théorie des corps numériques* (Zahlkörper) *algébriques* (pp. 675-698) *et du corps circulaire* (Kreiskörper) (pp. 699-714), par D. Hilbert, professeur à l'Université de Goettingue.

*Multiplication complexe des fonctions elliptiques*, par H. Weber, professeur à l'Université de Strasbourg (pp. 716-720; fin dans la prochaine livraison).

II. *Intégrales définies*, par G. Brunel, professeur à l'Université de Bordeaux (fin) (pp 161-188).

*Équations différentielles ordinaires, existence des solutions*, par P. Painlevé, professeur à l'Université de Paris (pp. 189-229).

*Équations différentielles ordinaires; méthodes élémentaires d'intégration*, par Vessiot, professeur à l'Université de Lyon (pp. 230-293).

*Équations aux dérivées partielles*, par E. von Weber, privat-docent à l'Université de Munich (pp. 293-399).

Les trois livraisons dont nous venons de faire connaître sommairement le contenu compteront parmi les plus remarquables de l'Encyclopédie, parce qu'il n'existe

*cercle et à une parabole*, le second *sur les tangentes communes à une ellipse et à un cercle.*

Il ne sera pas inutile de reproduire ici une partie du dernier article; je le ferai suivre de l'analyse d'un article de Schröter et de communications de MM. Gob, Absolonne et Mandart sur le même sujet.

I. Pour que deux droites rencontrent une conique en quatre points d'une même circonférence de cercle, il faut et il suffit qu'elles fassent des angles égaux en sens contraire avec un axe de la conique.

Ce théorème bien connu a pour analogue le suivant, dont le rôle, nous semble-t-il, n'a pas été suffisamment apprécié :

*Pour que les tangentes menées de deux points à une conique enveloppent un même cercle, la condition nécessaire et suffisante est que ces points soient sur une même conique homofocale à la première.*

Voici une démonstration analytique de cette élégante proposition due à Chesles (*Comptes rendus*, t. XVII, 1843). Une droite étant représentée par l'équation $ux + vy + 1 = 0$, nous prenons les quantités $u$ et $v$ pour cordonnées de la droite. Une ellipse E rapportée à ses axes principaux a alors pour équation tangentielle

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

L'équation tangentielle d'un cercle de centre I $(x_0, y_0)$ et de rayon R est évidemment

$$(x_0u + y_0v + 1)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0. \qquad (2)$$

Soient $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ les coordonnées de deux sommets opposés $M_1$, $M_2$ du quadrilatère circonscrit au cercle et à l'ellipse. L'équation du cercle pourra aussi prendre la forme

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 - k\,(x_1u + y_1v + 1)\,(x_2u + y_2v - 1) = 0. \qquad (3)$$

Si l'on écrit que les équations (2) et (3) ne diffèrent que par un facteur constant $l$, on trouve l'identité

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 + lR^2\,(u^2 + v^2)$$

$$\equiv (x_0u + y_0v - 1)^2 + kl\,(x_1u + y_1v + 1)\,(x_2u + y_2v - 1) = 0.$$

Les deux membres de cette identité, égalés à zéro, doivent représenter la même courbe. Le premier membre correspond à une conique dont les carrés des demi-axes sont $a^2 + lR^2$, $b^2 + lR^2$; on voit immédiatement que cette conique est homofocale à l'ellipse E. D'après la forme

du second membre, la même courbe touche les droites $IM_1$, $IM_2$ aux points $M_1$, $M_2$. Le théorème est donc démontré.

Réciproquement, *étant données deux coniques homofocales, si de deux points de l'une on mène des tangentes à l'autre, les quatre droites ainsi obtenues enveloppent un même cercle.*

Le théorème de Chasles admet le corollaire suivant :

*Si l'on considère tous les cercles touchant deux tangentes fixes* $M_1N$, $M_1N'$ *menées à une ellipse, le lieu du point d'intersection* $M_2$ *des deux autres tangentes communes à l'un de ces cercles et à l'ellipse se compose des deux coniques homofocales à* E *et passant par* $M_1$.

L'hyperbole homofocale menée par $M_1$ rencontre E en quatre points P, P', P'', P'''. Ces points sont les points de contact de cercles touchant E et les droites $M_1N$, $M_1N'$; car ils correspondent à des cercles ayant avec E deux tangentes communes confondues.

Il existe une infinité de cercles touchant E en P; les tangentes communes à l'un de ces cercles et à E se coupent sur l'hyperbole. Nous retrouvons ainsi la solution de la question du concours de 1844 en France, et de 1899 en Belgique.

II. Dans les *Mathematische Annalen*, t. V, p. 50, Schröter a étudié synthétiquement le lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites fixes *a*, *b*, *c*, *d*. Nous extrayons de cet article quelques développements qui conduisent au théorème de Chasles.

Désignons par A, B, C les sommets du triangle *abc*, et par A', B', C' les points *ad*, *bd*, *cd*. Soit F un foyer d'une conique U inscrite au quadrilatère *abcd*. L'involution F (AA', BB', CC') jouit de la propriété caractéristique d'être *équilatère*; autrement dit, les angles AFA', BFB', CFC' ont les mêmes bissectrices, lesquelles sont les rayons doubles de l'involution. Cette propriété résulte du théorème que les angles BFC, C'FB' sont égaux ou supplémentaires.

Si F' est le second foyer de U, l'involution B (CC', FF') étant équilatère, B est aussi le foyer d'une conique V inscrite au quadrilatère CFC'F'. Le second foyer de V est B'; car les involutions C (FF', BB') et C' (FF', BB') sont équilatères.

Soient encore G, G' les foyers d'une seconde conique U' inscrite au quadrilatère. De ce que les involutions B (FF', GG'), C (FF', GG'), B' (FF', GG') sont équilatères, on peut conclure que B et B' sont les

foyers d'une même conique inscrite au quadrilatère FGF'G' ; en appliquant ensuite la proposition démontrée tantôt, on voit que F et F' sont aussi les foyers d'une conique inscrite au quadrilatère BGB'G' et, par suite, que les droites FG, FG' sont les rayons conjugués de l'involution F (AA', BB', CC').

En résumé, la courbe lieu des foyers des coniques inscrites à un même quadrilatère *abcd* est formée de couples de *points conjugués* AA', BB', CC', FF', GG',.... tels que les deux droites joignant un point quelconque de la courbe à ces couples soient des rayons conjugués d'une même involution équilatère. Deux points conjugués quelconques sont toujours les foyers d'une même conique inscrite au quadrilatère ayant pour sommets les points de deux autres couples quelconques de points conjugués.

Pour passer au théorème de Chasles, supposons qu'il existe un cercle W, de centre O, inscrit au quadrilatère *abcd*. Deux points conjugués de la courbe lieu des foyers se trouvent alors réunis en O. Par suite, la conique inscrite au quadrilatère BFB'F' et ayant un foyer en O, a pour second foyer le même point O. Cette conique est donc une circonférence. On en conclut que la somme ou la différence des côtés FB, FB' du quadrilatère BFB'F' est égale à la somme ou la différence des deux autres côtés; donc F et F' sont des foyers d'une conique passant par les points B et B'.

On pourrait aussi dire que F et F' sont les deux foyers d'une conique inscrite au quadrilatère dont deux sommets opposés sont B et B' et dont deux autres sommets opposés se confondent avec O; autrement dit, cette conique touche les droites OB, OB' en B, B'.

Ces deux démonstrations nous ont été communiquées, sous une forme moins explicite, par M. Absolonne.

III. Les développements qui précèdent sont susceptibles de généralisation. On remplace les points cycliques par deux points quelconques, $\omega$ et $\omega'$ du plan *abcd*; les points conjugués dont il a été question ci-dessus sont alors remplacés par deux sommets opposés du quadrilatère ayant pour côtés les tangentes menées de $\omega$ et $\omega'$ à une conique quelconque inscrite au quadrilatère ABCD. Le cas particulier où $\omega$ et $\omega'$ appartiennent à une même conique inscrite au quadrilatère *abcd*, correspond alors au théorème de Chasles.

MM. Mandart et Gob nous ont adressé des communications se rapportant à cette généralisation. La question pourra être reprise plus tard dans *Mathesis*. (J. NEUBERG.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 1215 et 1231.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 104 et 215).

*Résoudre les systèmes* :

**1215.** $x^2 = ax + by + cz$,
$y^2 = ay + bz + cx$,
$z^2 = az + bx + cy$.

**1231.** $x = px^2 + qy^2 + rz^2$,
$y = py^2 + qz^2 + rx^2$,
$z = pz^2 + qx^2 + ry^2$.

*Trouver les valeurs des inconnues pour* $a = 2, b = 2, c = 1; p = 4, q = -2, r = 1$ *respectivement.* (EMMERICH.)

*Solution par l'auteur.* **1215** Posons, pour abréger,

$$\Sigma x = \xi, \quad \Sigma ys = \eta, \quad xyz = \zeta;$$
$$\Sigma a = \alpha, \quad \Sigma bc = \beta, \quad \alpha^2 - 3\beta = \gamma.$$

En écrivant :

$(a - x)x + by + cz = 0$, ..., ..., on a $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, ou

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c \\ c & a-y & b \\ b & c & a-z \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a\alpha - \beta)\xi - a\eta + \zeta = \alpha\gamma. \tag{1}$$

L'addition des trois équations donne

$$2\eta = \xi^2 - \alpha\xi. \tag{2}$$

En multipliant les équations du système deux à deux et en faisant la somme, on trouve

$$\eta^2 - 2\xi\zeta = \beta\xi^2 + \gamma\eta. \tag{3}$$

De (1) et (2), on déduit

$$2\zeta = a\xi^2 - (3a\alpha - 2\beta)\xi + 2\alpha\gamma. \tag{4}$$

Avec les valeurs (2) et (4), l'équation (3) prend la forme

$$\xi^4 - 2(\alpha + 2a)\,\xi^3 - (\alpha^2 - 12a\alpha + 6\beta)\,\xi^2 - 6\alpha\gamma\xi = 0.$$

La solution $\xi = 0$ de cette équation est à écarter; elle conduirait à $\eta = 0$, $\zeta = \alpha\gamma$ de sorte que $x, y, z$ seraient proportionnelles aux racines cubiques de l'unité, ce qui n'est pas d'accord avec les équations proposées où $a, b, c$ sont des quantités données quelconques. En remarquant la solution évidente $\xi = 3\alpha$, $x_2 = y_2 = z_2 = \alpha$ on pourra débarrasser l'équation cubique du facteur $\xi - 3\alpha$ et il restera

$$\xi^2 + (\alpha - 4a)\,\xi + 2\gamma = 0.$$

Avec les expressions (2) et (4) on trouve ainsi deux groupes de valeurs $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ qu'on substituera dans l'équation $t^3 - \xi t^2 + \eta t - \zeta = 0$.

Dans l'exemple numérique on a

$$a = 2,\ b = 2,\ c = 1; \quad \alpha = 5,\ \beta = 8,\ \gamma = 1;$$

$$\xi_1 = 2,\ \eta_1 = -3,\ \zeta_1 = -5; \quad \xi_2 = 1,\ \eta_2 = -2,\ \zeta_2 = -1;$$

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0; \quad x_2 = y_2 = z_2 = 5;$$

$$x_3 = y_4 = z_5 = 2{,}37720 \qquad x_6 = y_7 = z_8 = 1{,}80194$$

$$y_4 = y_5 = z_3 = 1{,}27389 \qquad x_7 = y_8 = z_6 = 0{,}44504$$

$$x_5 = y_3 = z_4 = -1{,}65109; \qquad x_8 = y_6 = z_7 = -1{,}24698.$$

**1231.** On pourrait procéder directement d'une manière analogue à la précédente, mais il est préférable de réduire le problème au n° 1215. En effet, si l'on pose

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pq = \Delta,$$

$$p^2 - qr = a\Delta, \quad r^2 - pq = b\Delta, \quad q^2 - rp = c\Delta,$$

les deux systèmes sont identifiés.

Reste seulement à traiter l'exemple numérique : $p = 4$, $q = -2$, $r = 1$. On trouve successivement

$$\Delta = 81, \quad a = \tfrac{2}{9}, \quad b = \tfrac{1}{9}, \quad c = 0;$$

$$\alpha = \tfrac{1}{3}, \quad \beta = \tfrac{3}{81}, \quad \gamma = \tfrac{1}{27};$$

$$\xi^2 - \tfrac{5}{9}\xi + \tfrac{2}{27} = 0;$$

$$\zeta_1 = \tfrac{1}{3}, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = -\tfrac{1}{243};$$

$$\xi_2 = \tfrac{2}{9}, \quad \eta_2 = -\tfrac{1}{81}, \quad \zeta_2 = -\tfrac{1}{729};$$

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0; \quad x_2 = y_2 = z_2 = \tfrac{1}{3};$$

$$x_3 = y_3 = z_3 = 0{,}28134 \qquad x_6 = y_7 = z_8 = -0{,}08910$$
$$x_4 = y_5 = z_5 = 0{,}14970 \qquad x_7 = y_8 = z_6 = 0{,}24966$$
$$x_5 = y_6 = z_4 = -0{,}09771; \qquad x_8 = y_4 = z_7 = 0{,}06166.$$

NOTE. M. GOB a également résolu la question 1231 en la ramenant à la question 1215 et en formant l'équation qui a pour racines $x$, $y$, $z$. Il observe que cette méthode est en défaut lorsque $\Delta = 0$, c'est-à-dire dans l'hypothèse $p + q + r = 0$; pour ce cas, il indique la solution suivante :

En additionnant les équations du système on trouve $x + y + z = 0$. Donc si l'on adopte les notations de M. Emmerich, on a

$$\Sigma x^2 = -2\eta, \quad \Sigma x^3 = 3\zeta, \quad \Sigma x^4 = 2\Sigma x^2 y^2 = 2\eta. \qquad (a)$$

Multiplions les équations proposées par $x^2$, $y^2$, $z^2$ et ajoutons les résultats; nous aurons, eu égard aux égalités $(a)$,

$$3\zeta = p\eta^2. \qquad (b)$$

Multiplions encore les équations proposées par $x$, $y$, $z$ et faisons la somme des produits; en posant

$$x^2y + y^2z + z^2x = \lambda, \quad xy^2 + yz^2 + zx^2 = \mu,$$

le résultat prend la forme

$$-2\eta = 3p\zeta + q\mu + r\lambda. \qquad (c)$$

Si l'on multiplie les équations du système respectivement par $y^2$, $z^2$, $x^2$ ou par $z^2$, $x^2$, $y^2$ et qu'on ajoute chaque fois les produits, on obtient

$$\mu = q\eta^2, \quad \lambda = r\eta^2. \qquad (d)$$

Remplaçons $\zeta$, $\mu$, $\lambda$ par les valeurs $(b)$ et $(d)$ dans l'équation $(c)$; il vient

$$-2\eta = (p^2 + q^2 + r^2)\,\eta^2;$$

d'où la solution $\eta = 0$, qui correspond au système de valeurs $x = y = z = 0$, et la solution

$$\eta = -\frac{2}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

L'équation $(b)$ fait connaître $\zeta$, et l'équation du troisième degré qui a pour racines $x$, $y$, $z$, est

$$x^3 - \frac{2}{p^2 + q^2 + r^2}x + \frac{4p}{3(p^2 + q^2 + r^2)^2} = 0.$$

## ×Question 1288.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 216.)

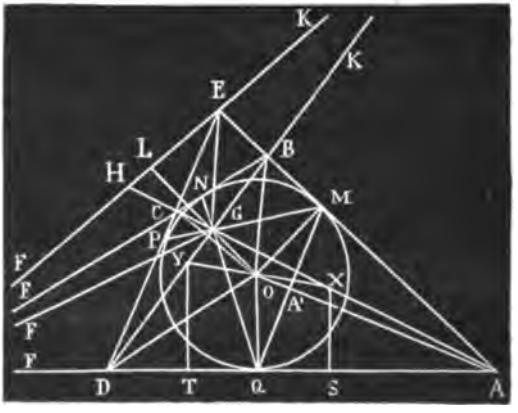
*Soient* Q *la surface d'un quadrilatère convexe* ABCD, *circonscrit à un cercle*; *a*, *b*, *c*, *d les distances des sommets aux points de contact adjacents*, T *la surface du triangle qui a pour sommets les points de concours* E, F, G *des côtés opposés et des diagonales*; $T_1$ *la surface du triangle dont les côtés sont dirigés suivant les lignes* AC, BD, EF; *m la droite qui joint les milieux des diagonales. Démontrer les formules*

$$4m^2 = (a+b+c+d)\left[\frac{(a-c)^2}{a+c}+\frac{(b-d)^2}{b+d}\right],$$

$$\frac{T}{Q} = \frac{2abcd}{(ab-cd)(ad-bc)}, \qquad \frac{T_1}{Q} = \frac{4abcd}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}.$$

(J. Neuberg.)

De bonnes solutions de cette question nous ont été adressées par MM. Emmerich, Couturier, Critesco et Plakhowo. Comme elles sont susceptibles de simplifications ou qu'elles s'appuient sur des formules peu connues (*), nous profitons de l'occasion pour exposer une théorie




assez complète du quadrilatère circonscriptible; nous n'emploierons que la géométrie pure.

Soient $r$, O le rayon et le centre du cercle inscrit; M, N, P, Q les

(*) M. Plakhowo invoque des formules de Dostor (*Propriétés nouvelles des quadrilatères en général*, pp. 53, 55, 156). Nous n'avons pas eu l'occasion de comparer nos démonstrations à celles de M. Dostor.

points de contact des côtés AB, BC, CD, DA; $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ les distances OA, OB, OC, OD; $f$, $g$ les diagonales AC, BD; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Les données étant $a, b, c, d$, il s'agit de trouver les autres éléments du quadrilatère ABCD.

1. Les triangles AOB et COD, BOC et DOA ayant des angles supplémentaires en O et même hauteur $r$, on a

$$\frac{a'b'}{c'd'} = \frac{a+b}{c+d}, \quad \frac{b'c'}{d'a'} = \frac{b+c}{d+a}; \tag{1}$$

d'où, par multiplication et par division,

$$\frac{b'^2}{d'^2} = \frac{(b+a)(b+c)}{(d+a)(d+c)}, \quad \frac{a'^2}{c'^2} = \frac{(a+b)(a+d)}{(c+b)(c+d)}. \tag{2}$$

2. La dernière relation peut s'écrire

$$\frac{a^2+r^2}{c^2+r^2} = \frac{a^2+a(b+d)+bd}{c^2+c(b+d)+bd}.$$

Retranchons chaque numérateur du dénominateur correspondant, puis divisons les deux dénominateurs par le facteur commun $c-a$; il vient

$$a'^2 = a^2+r^2 = \frac{(a+b)(a+c)(a+d)}{\Sigma a}. \tag{3}$$

Un calcul facile donne ensuite

$$r^2 = \frac{\Sigma abc}{\Sigma a}. \tag{4}$$

$$Q = r\,\Sigma a = \sqrt{\Sigma a \,.\, \Sigma abc}. \tag{5}$$

3. Dans ce qui suit, nous nous appuyerons sur le lemme que voici : *Si les angles de deux triangles* ABC, A'B'C' *vérifient les égalités* $A + A' = 180°$, $B = B'$, *on a entre les côtés les relations*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad aa' = bb' + cc'. \tag{6}$$

Pour les démontrer, transportons le triangle A'B'C' de manière que A' coïncide avec A et que AC' se place sur AC, AB' sur le prolongement de BA, ce qui est possible à cause de $A + A' = 180°$; menons ensuite par C une parallèle à C'B', qui coupe AB' en D. Le triangle CBD est isocèle ; donc CD = CB. La proportion CD : C'B' = AC : AC'

revient à $a : a' = b : b'$. Une propriété connue du triangle isoscèle donne aussi

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + BA \cdot AD \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2 + c \cdot \frac{ac'}{a'}.$$

Multipliant par $a'$ et remplaçant $ba'$ par $b'a$ on trouve $aa' = bb' + cc'$.

Cela posé, les cordes MP, NQ passant par G, les triangles AGM, CGP ont un angle égal en G et des angles supplémentaires en M et P; de là et par analogie

$$\frac{AG}{CG} = \frac{a}{c}, \quad \frac{BG}{DG} = \frac{b}{d};$$

par conséquent

$$AG = \frac{af}{a+c}, \quad CG = \frac{cf}{a+c}, \quad BG = \frac{bg}{b+d}, \quad DG = \frac{dg}{b+d}. \qquad (7)$$

On trouve semblablement ou en considérant les divisions harmoniques ACGH, BDGK :

$$\frac{HC}{HA} = \frac{c}{a}, \quad HC = \frac{cf}{a-c}, \quad HA = \frac{af}{a-c}, \text{ etc.} \qquad (7')$$

4. On voit facilement que

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{AG}{CG} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\delta}{\beta} = \frac{BG}{DG} = \frac{b}{d};$$

et comme $Q = \alpha + \gamma = \beta + \delta$, on a

$$\alpha = \frac{cQ}{a+c}, \quad \gamma = \frac{aQ}{a+c}, \quad \beta = \frac{dQ}{b+d}, \quad \delta = \frac{bQ}{b+d}. \qquad (8$$

On peut encore calculer aisément les aires des triangles AGB, BGC,... ; par exemple

$$\frac{AGB}{BG} = \frac{AGD}{DG} = \frac{\gamma}{g},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{AGB}{ab} = \frac{BGC}{bc} = \frac{CGD}{cd} = \frac{DGA}{da} = \frac{Q}{(a+c)(b+d)}. \qquad (9$$

5. Pour calculer les diagonales, nous appliquons le théorème de Stewart aux deux triangles ADB, CDB; en remplaçant DG, BG, AG, CG par les valeurs (7), nous aurons

$$(a+b)^2 d + (a+d)^2 b = \frac{a^2(b+d)}{(a+c)^2} f^2 + \frac{bd}{b+d} g^2,$$

$$(b+c)^2 d + (c+d)^2 b = \frac{c^2(b+d)}{(a+c)^2} f^2 + \frac{bd}{b+d} g^2.$$

Retranchons ces égalités membre à membre et supprimons le facteur commun $a - c$ qui s'aperçoit immédiatement si l'on combine les termes de même rang des deux égalités ; il vient

$$f^2 = (a+c)^2 + 4\,\frac{a+c}{b+d}\,bd,$$

et de même

$$g^2 = (b+d)^2 + 4\,\frac{b+d}{a+c}\,ac.$$

Il en résulte

$$f^2 + g^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 + 4\left(\frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}\right)\Sigma a. \qquad (10)$$

6. Introduisons cette valeur dans la relation

$$4m^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 + (d+a)^2 - f^2 - g^2 ;$$

nous aurons

$$4m^2 = \Sigma^2 a - 4\left(\frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}\right)\Sigma a.$$

$$= \Sigma a\left(a + c - \frac{4ac}{a+c} + b + d - \frac{4bd}{b+d}\right),$$

ce qui revient à la première formule proposée.

Un calcul anologue donne pour les lignes $p$, $q$ qui joignent les milieux des côtés opposés AB, CD ou ceux de AB, BC :

$$4p^2 = (a+d-b-c)^2 + 4\left(\frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}\right)\Sigma a,$$

$$4q^2 = (a+b-c-d)^2 + 4\left(\frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}\right)\Sigma a.$$

On en déduit $p^2 - q^2 = (a-c)(d-b)$.

7. Nous indiquons d'abord le calcul des aires T, $T_1$ pour un quadrilatère quelconque, en fonction des aires $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. On a

$$T = CEF + CFG + CGE,$$

$$\frac{CEF}{\alpha} = \frac{EC}{CD}\cdot\frac{FC}{CB}, \quad \frac{CFG}{\delta} = \frac{FC}{CB}\cdot\frac{CG}{CA}, \quad \frac{CGE}{\beta} = \frac{EC}{CD}\cdot\frac{CG}{CA}.$$

Or, les triangles BCA, BDA sont entre eux comme leurs hauteurs issues de C, D ou comme EC est à ED ; donc

$$\frac{\delta}{EC} = \frac{\gamma}{ED} = \frac{\gamma - \delta}{CD}, \quad \text{ou} \quad \frac{EC}{CD} = \frac{\delta}{\gamma - \delta}.$$

Semblablement

$$\frac{FC}{CB}=\frac{\beta}{\gamma-\beta},\quad \frac{CG}{CA}=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma};$$

par conséquent,

$$CEF=\frac{\alpha\beta\delta}{(\gamma-\delta)(\gamma-\beta)},\quad CFG=\frac{\alpha\beta\delta}{(\gamma-\beta)(\gamma+\alpha)},$$

$$CGE=\frac{\alpha\beta\delta}{(\gamma-\delta)(\gamma+\alpha)};$$

et, en additionnant,

$$T=\frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{(\gamma-\delta)(\gamma-\beta)(\gamma+\alpha)}.$$

Si l'on remplace $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les valeurs (8) on obtient la seconde formule de la question

8. On a

$$\frac{T_1}{Q}=\frac{HG}{CA}\cdot\frac{KG}{BD}.$$

Or

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{CG}{GA}=\frac{HC}{HA},\quad \text{d'où}\quad \frac{CG}{CA}=\frac{\alpha}{\gamma+\alpha},\quad \frac{HC}{CA}=\frac{\alpha}{\gamma-\alpha};$$

par suite

$$\frac{HG}{CA}=\frac{CG}{CA}+\frac{HC}{CA}=\frac{2\alpha\gamma}{\gamma^2-\alpha^2},\quad \frac{KG}{BD}=\frac{2\beta\delta}{\beta^2-\delta^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{T_1}{Q}=\frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{(\gamma^2-\alpha^2)(\beta^2-\delta^2)}.$$

Remplaçons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les valeurs (8), etc.

9. Appelons $x, y$ les distances des milieux X, Y des diagonales au côté AD; comme ce sont les moitiés des hauteurs des triangles ABD, ACD, on a

$$x=\frac{\gamma}{a+d}=\frac{aQ}{(a+d)(a+c)},\quad y=\frac{dQ}{(a+d)(b+d)}.$$

Par conséquent,

$$(a+c)x+(b+d)y=Q=r(a+b+c+d),$$

et

$$r=\frac{(a+c)x+(b+d)y}{(a+c)+(b+d)}.$$

Si l'on avait abaissé les perpendiculaires $x$, $y$ sur un autre côté du quadrilatère, on aurait trouvé le même résultat. On en conclut que le centre O divise la droite XY dans le rapport $\frac{b+d}{a+c}$.

**10.** Cherchons la puissance du point G par rapport au cercle O. Elle a pour valeur absolue [(voir la seconde formule (6)] :

$$GP \cdot GM = GC \cdot GA - CP \cdot AM$$

$$= \frac{acf^2}{(a+c)^2} - ac = \frac{ac}{(a+c)^2}[f^2 - (a+c)^2] = \frac{4abcd}{(a+c)(b+d)}.$$

On trouve de même pour la puissance du point H

$$HP \cdot HQ = HC \cdot HA - CP \cdot AQ = \frac{ac}{(a-c)^2}[f^2 - (a-c)^2].$$

$$= \frac{4ac \cdot \Sigma abc}{(a-c)^2(b+d)}.$$

**11.** G étant le pôle de EF par rapport au cercle O, la droite GO est perpendiculaire à EF, et les aires des triangles EFG, EFO se déduisent facilement l'une de l'autre. En effet,

$$\frac{GEF}{OEF} = \frac{GL}{OL} = 1 - \frac{OG}{OL} = 1 - \frac{OG^2}{OG \cdot OL} = 1 - \frac{\overline{OG}^2}{r^2} = \frac{r^2 - \overline{OG}^2}{r^2};$$

or $r^2 - \overline{OG}^2$ est la valeur absolue de la puissance de G que nous avons déterminée plus haut. On trouve

$$OEF = \frac{(a+c)(b+d)r^2}{2(ab-cd)(ad-bc)}.$$ (*)

**12.** Cherchons maintenant les côtés et la surface Q' du quadrilatère MNPQ (**). Si MQ rencontre AO en A', on a

$$OM \cdot MA = OA \cdot MA', \quad \overline{OM}^2 = OA' \cdot OA;$$

d'où

$$MQ = \frac{2ar}{a'}, \quad OA' = \frac{r^2}{a'}.$$

---

(*) M. Emmerich a suivi la marche inverse: il calcule directement l'aire OEF, puis en déduit T.

(**) M. Emmerich cherche l'aire Q' au moyen de la trigonométrie, puis en déduit T, en remarquant que le triangle HGK est par rapport au quadrilatère MNPQ le triangle T de la question 1230 résolue p. 74.

La surface OMQ est donc égale à $ar^5 : a'^2$. Par suite :

$$Q' = r^5\left(\frac{a}{a'^2}+\frac{b}{b'^2}+\frac{c}{c'^2}+\frac{d}{d'^2}\right),$$

$$= \frac{r^5\Sigma a}{\lambda}\Sigma a\,(b+c)\,(c+d)\,(d+b),$$

ou

$$\lambda = (a+b)\,(a+c)\,(a+d)\,(b+c)\,(b+d)\,(c+d).$$

Mais

$$\Sigma a\,(b+c)\,(c+d)\,(d+b)$$
$$= \Sigma a\,[2bcd + bc\,(b+c) + cd\,(c+d) + bd\,(b+d)]$$
$$= 8abcd + 2\Sigma abc\,(a+b+c) = 2\Sigma a\,.\,\Sigma abc;$$

il en résulte

$$Q' = \frac{2r^5\,\Sigma^2 a\,\Sigma abc}{\lambda}.$$

Si l'on observe que

$$a'b'c'd' = \frac{\lambda}{\Sigma^2 a},\quad \Sigma abc = r^2\Sigma a,\quad Q = r\Sigma a,$$

on peut encore écrire

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{2r^4}{a'b'c'd'} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}.$$ (J. N.)

---

## Question 1259.

(Voir *Mathesis* (2), t. X, p. 56).

*On donne une circonférence* $C^2$, *dont le centre est* C, *et un de ses points* P. *Soit* M *un point mobile sur* $C^2$. *Si nous appelons r la parallèle conduite par* M *au diamètre qui passe par* P, *s la parallèle conduite par le même point à la tangente en* P, *d le diamètre passant par* M, *t la tangente en* M *à* $C^2$ *et t' la parallèle conduite par* C *à t; en considérant les intersections des droites r, s, d, t, t' avec la circonférence* $\gamma^2$ *qui a pour centre* M *et pour rayon* MP. *Démontrer que :* 1° *le lieu des intersections de r et* $\gamma^2$ *est un trifolium droit.*

2° *le lieu des intersections de s et* $\gamma^2$ *est un folium double.*

3° *les lieux des intersections de* $\gamma^2$ *avec d, t ou t' sont des sextiques tricirculaires. Étudier leurs formes et indiquer leurs points multiples.*

(Cardoso-Laynes).

*Solution par* M. V. Retali. 1° Les deux points $(\gamma^2, r)$ sont vus du point P sous un angle droit et tombent sur une parallèle à CP; leur lieu est donc le *trifolium droit*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(y^2 - x^2)x;$$

CP est l'axe, P le point triple.

2° Les points $(\gamma^2, s)$ sont vus de P sous un angle droit, et placés sur une perpendiculaire à CP; leur lieu est donc le *bifolium*

$$(x^2 + y^2)^2 + 8xy^2 = 0;$$

CP est l'axe, P le point triple (*spécial*). Nous avons pris P pour origine et CP pour axe des coordonnées rectangulaires, le rayon de $C^2$ égal à l'unité. Ces deux théorèmes sont connus; voir le mémoire de M. Brocard, *Le Trifolium* (JMS, 1891, *Mathesis*, 1892, Suppl. p. 28 et 31, ou la *Géométrie analytique* de M. de Longchamps, 1894, t. II, p. 571).

3° *a*) Etant donnés dans un plan deux points fixes C et P, faisons correspondre à un point M, les deux points $M_1$, $M_2$ où la droite CM est coupée par le cercle ayant son centre en M et passant par P. Lorsque M décrit une courbe $\Sigma$, le lieu des points $M_1$, $M_2$ est une autre courbe $\Sigma'$ appelée *strophoïdale*(*) de $\Sigma$ par rapport aux pôles C et P. Si l'on prend CP pour axe des $x$, C pour origine des coordonnées rectangulaires et CP $= a$, les formules de la transformation (double, du troisième ordre et genre un) sont

$$\xi : \eta : 1 = x(x^2 + y^2 - a^2) : y(x^2 + y^2 - a^2) : 2(x^2 + y^2 - ax);$$

la strophoïdale du cercle $\xi^2 + \eta^2 = 1$, par rapport aux pôles C, P est donc

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4(x^2 + y^2 - x)^2 = 0,$$

ou bien

$$(x^2 + y^2)^3 - 6(x^2 + y^2)^2 + 8x(x^2 + y^2) + (y^2 - 3x^2) = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

Cette courbe est l'inverse, par rapport à C, de la quartique circulaire

$$(y^2 - 3x^2)(x^2 + y^2) + 8x(x^2 + y^2) - 6(x^2 + y^2) - 1 = 0,$$

qui a un point triple en P; avec les notations usuelles nous avons donc

$$m = 4,\ n = 6,\ f = 2,\ f' = g' = g = p = q = 0$$

et, par suite,

$$M = 2m - f = 6, \quad N = n + 2m - 2f = 10,$$
$$F = 2m - f = 6, \quad G' = m - f = 2.$$

(*) *Mathesis*, 1894, p. 139-141.

La sextique (1) est donc de sixième classe, a deux points triples aux points circulaires, un autre point triple en P et un point double en C, dont les tangentes forment un angle de 60° (voir fig. 1).

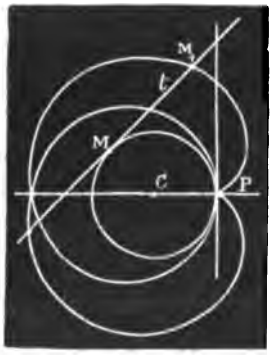



Fig. 1.

*b*) Avec les mêmes axes, si l'on fait CP = 1, MCP = $\theta$, les coordonnées des points $(\gamma^2, t)$ sont

$$x = \cos\theta \pm 2\sin\theta\sin\frac{\theta}{2},$$

$$y = \sin\theta \pm 2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2};$$

éliminant $\theta$, nous trouvons pour équation du lieu

$$[(x^2+y^2-3)^2-4](x^2+y^2-1)+(x^2+y^2+2x-3)^2=0;$$

et prenant P pour origine,

$$(x^2+y^2)^3+6x(x^2+y^2)^2+3(x^2+y^2)(3x^2-y^2)-8xy^2=0 \ldots\ldots (2)$$

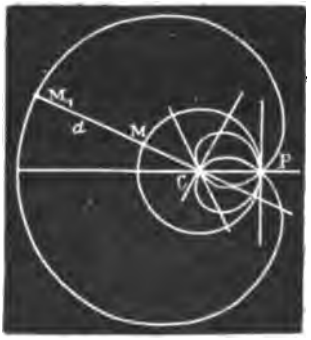



Fig. 2.

Le lieu est donc une sextique symétrique par rapport à CP, avec deux points triples ordinaires aux points cycliques, un nœud au point (— 3.0) et un point triple *spécial* en P, formé par la coïncidence de deux nœuds avec un rebroussement. — On peut aussi déterminer ces caractéristiques en observant que la courbe (2) est l'inverse, par rapport à P, de la cubique rationnelle parabolique

$$(1+3x)^2=(8x+3)y^2;$$

nous avons donc $m=3$, $n=4$, $g=1$, $f=f'=g'=p=q=0$ et, par suite,

$$M=2m=6,\quad N=n+2m-g=9,$$

$$F=2m=6,\quad G'=m=3,\quad P=g=1;$$

sixième ordre, neuvième classe, deux points triples ordinaires aux points circulaires, un point triple avec une coïncidence à l'origine (voir fig. 2).

c) Si $M_1$ est un point correspondant à M et si $MCP = \omega$, nous avons

$$\overline{CM_1}^2 = \rho^2 = \overline{MP}^2 - 1 = 4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

l'équation polaire du lieu cherché est donc

$$\rho^2 = 1 + 2\sin\omega,$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$(x^2+y^2)^3 - 2(x^2+y^2)^2 + x^2 - 3y^2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Observant que cette sextique est l'inverse, par rapport au centre C, de la quartique circulaire binodale

$$(x^2 - 3y^2)(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2) + 1 = 0,$$

on a $m = 4$, $n = 8$, $f = 2$, $f' = g' = g = p = q = 0$; donc

$$M = 2m - f = 6, \quad N = n + 2m - 2f = 12,$$
$$F = 2m - f = 6, \quad G' = m - f = 2.$$

La courbe (3) est donc du sixième ordre et de la douzième classe; elle a deux points triples ordinaires aux points circulaires, un nœud à l'origine C; ses deux autres points doubles sont ceux de la quartique inverse, savoir $(\pm 1, 0)$. Le point double C est *bitrinodal* et ses tangentes forment un angle de 60° (voir fig. 3).

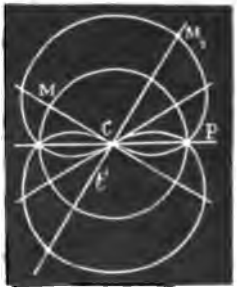


Fig. 3.

Note. D'autres bonnes solutions de la même question nous ont été adressées par MM. Couturier, Fairon et Rose; nous regrettons que le défaut de place nous empêche de les reproduire.

---

## ×Question 1268.

(Voir *Mathesis* (2), X, p. 104.)

*Un triangle scalène tourne successivement autour de la bissectrice extérieure de chacun de ses angles. Comparer les trois volumes engendrés ainsi que leurs surfaces.*

*Même question en prenant pour axe de révolution la tangente menée par l'un des sommets au cercle circonscrit.*

(J. Neuberg.)

*Solution par* M. M. Vignery (Bouillon) et Plakhowo. 1° Soient $r$, $r'$ les distances des points B et C à la bissectrice extérieure de l'angle A, $V_a$ et $S_a$ le volume et la surface qui correspondent à cette droite prise pour axe de révolution, T la surface du triangle ABC. Un théorème connu donne

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h_a a (r + r') = \frac{2}{3}\pi T (b + c)\cos\frac{A}{2}.$$

Par conséquent

$$V_a : V_b : V_c = (b + c)\cos\frac{A}{2} : (c + a)\cos\frac{B}{2} : (a + b)\cos\frac{C}{2}.$$

2° $$\begin{aligned} S_a &= \text{surf. BC} + \text{surf. CA} + \text{surf. AB} \\ &= \pi a (r + r') + \pi r' b + \pi r c \\ &= \pi (ab + ac + b^2 + c^2)\cos\frac{A}{2}. \end{aligned}$$

D'où l'on conclut

$$\frac{S_a}{(ab + ac + b^2 + c^2)\sqrt{a(p-a)}} = \frac{S_b}{(bc + ba + c^2 + a^2)\sqrt{b(p-b)}} = \frac{S_c}{(ca + cb + a^2 + b^2)\sqrt{c(p-c)}}$$

3° Appelons $V'_a$ et $S'_a$ le volume et la surface qui correspondent à la tangente en A prise pour axe de révolution. On trouve

$$V'_a = \frac{2}{3}\pi S (b \sin B + c \sin C) = \frac{2}{3}\pi S \frac{b^2 + c^2}{2R}.$$

Donc

$$V'_a : V'_b : V'_c = (b^2 + c^2) : (c^2 + a^2) : (a^2 + b^2).$$

4° $$\begin{aligned} S'_a &= \pi a (b \sin B + c \sin C) + \pi b^2 \sin B + \pi c^2 \sin C \\ &= \frac{\pi}{2R}(ab^2 + ac^2 + b^3 + c^3). \end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{S'_a}{ab^2 + ac^2 + b^3 + c^3} = \frac{S'_b}{bc^2 + ba^2 + c^3 + a^3} = \frac{S'_c}{ca^2 + cb^2 + a^3 + b^3}.$$

M. Emmerich a résolu la même question au moyen du théorème de Guldin, et indiqué les inégalités qui suivent dans la note.

NOTE. Supposons $a > b > c$, et par suite $\frac{A}{2} > \frac{B}{2} > \frac{C}{2}$. Nous aurons

$$b + c < c + a < a + b, \quad \cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2} < \cos\frac{C}{2};$$

il en résulte

$$V_a < V_b < V_c.$$

De même, de

$$b^2 + c^2 < c^2 + a^2 < a^2 + b^2,$$

on déduit

$$V'_a < V'_b < V'_c.$$

On a $S_a < S_b < S_c$. En effet,

$$\cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2} < \cos\frac{C}{2},$$

et

$$a(b + c) + b^2 + c^2 < b(c + a) + c^2 + a^2,$$

car, cette inégalité revient à

$$c(a - b) < a^2 - b^2, \quad \text{ou} \quad c < a + b.$$

Enfin, $S'_a < S'_b < S'_c$; car l'inégalité

$$ab^2 + ac^2 + b^3 + c^3 < a^2b + bc^2 + a^3 + c^3,$$

se ramène successivement aux suivantes :

$$c^2(a - b) < a^3 - b^3 + ab(a - b), \quad c^2 < (a + b)^2. \qquad \text{(J. N.)}$$

---

## ×QUESTIONS D'EXAMEN.

**956**(*). Quel segment sphérique a même volume qu'un cylindre de même base et hauteur ?

Désignant la hauteur par $h$, on a

$$\tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \pi h^2(2r - h), \quad h = \tfrac{3}{2}r.$$

**957**. Le périmètre de la section méridienne d'un tronc de cône droit étant $2p$ et la hauteur $h$, on a pour sa surface totale $S = \frac{1}{2}\pi(p^2 - h^2)$.

Car
$$\begin{aligned} S &= \pi[R^2 + r^2 + (R + r)s] \\ &= \tfrac{1}{2}\pi[(R + r)^2 + 2s(R + r) + (R - r)^2] \\ &= \tfrac{1}{2}\pi\left\{(R + r + s)^2 - [s^2 - (R - r)^2]\right\} = \tfrac{1}{2}\pi(p^2 - h^2). \end{aligned}$$

---

(*) Les questions 956-960 (avec leurs réponses) sont dues à M. Emmerich.

**958.** Résoudre le système :

$$x + y = 2a, \quad x^7 + y^7 = 2a^7.$$

En posant $x = a(1+z)$, $y = a(1-z)$, on a $(1+z)^7 + (1-z)^7 = 2$; d'où $z^2(z^4 + 5z^2 + 3) = 0$.

**959.** Déterminer deux nombres, connaissant leur somme $a$ et sachant que la somme de leurs septièmes puissances égale la septième puissance de leur somme.

Les nombres $\frac{a}{2}(1+z)$, $\frac{a}{2}(1-z)$ doivent satisfaire à l'équation $(1+z)^7 + (1-z)^7 = 2^7$, laquelle peut s'écrire $(z^2-1)(z^2+3)^3 = 0$.

**960.** Résoudre le système :

$$x : y : z = y - z : z - x : x - y.$$

On a successivement

$$\frac{x}{y-z} = \frac{y}{z-x} = \frac{z}{x-y}; \quad \frac{y+z}{z-y} = \frac{z+x}{x-z} = \frac{x+y}{y-x};$$

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y}; \quad x^3 = y^3 = z^3. \quad x, y, z \text{ sont égaux, ou}$$

l'on a $x : y : z = 1 : \theta : \theta^2$, $\theta$, $\theta^2$ étant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

**961.** Soient $\alpha$ et $\beta$ deux arcs, d'extrémités différentes, vérifiant l'équation

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

Calculer $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

1° De

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = c = a\cos\beta + b\sin\beta,$$

on conclut

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a};$$

connaissant $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, on trouve facilement

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

2° L'équation proposée se résout en posant $b = a\operatorname{tg}\varphi$; on trouve

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Si $\gamma$ est l'un des arcs ayant pour cosinus $\frac{c}{a}\cos\varphi$, on aura toutes les solutions au moyen des formules

$$\alpha = \varphi + 2k\pi + \gamma, \quad \beta = \varphi + 2k'\pi - \gamma,$$

d'où

$$\alpha + \beta = 2\varphi + 2(k + k')\pi, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos 2\varphi, \quad \text{etc.}$$

(*Journal de Vuibert.*)

On peut de même se proposer de calculer les valeurs de

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos 2\gamma, \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin 2\gamma, \quad tg(\alpha - \beta) = tg\, 2\gamma.$$

## QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1281.** Soient I, $I_a$, $I_b$, $I_c$ les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC, et soient (I′, II″), ($I'_a$. $I''_a$), ··· les projections de ces points sur la base BC et sur la médiatrice de BC. Si la base BC est fixe et si l'angle opposé A est constant, les cercles I′I″A, $I'_aI''_aA$ passent par un même point fixe; les cercles $I'_bI''_bA$, $I'_cI''_cA$ passent par un second point fixe. (J. Déprez.)

**1282.** X, Y, Z sont trois points dans le plan d'un triangle ABC tels, que les droites AY et AZ. BZ et BX, CX et CY soient, respectivement, symétriques par rapport aux bissectrices AI, BI, CI du triangle ABC. On fait parcourir à Y une droite donnée $u_b$, à Z une droite donnée $u_c$. Démontrer les propositions suivantes :

1° Le lieu de X est une droite $u_a$.

2° Si $u_b$ est perpendiculaire à CA et $u_c$ à AB, $u_a$ est perpendiculaire à BC.

3° Les droites $u_a$, $u_b$, $u_c$ forment un triangle homologique à ABC.

4° Les droites AX, BY, CZ concourent sur une conique circonscrite au triangle ABC et passant par le centre d'homologie des triangles ABC, $u_au_bu_c$.

5° Étant donné ce centre d'homologie, les droites $u_a$, $u_b$, $u_c$ peuvent varier de manière qu'elles se coupent en un même point; le lieu de ce point est une cubique. (J. A. Third.)

**1283.** On circonscrit à une ellipse donnée tous les quadrilatères ABCD dont les diagonales AC, BD sont rectangulaires; soient P, Q les points de rencontre des côtés opposés (AB, CD), (AD, BC). Trouver 1° la relation entre les points P, Q; 2° la relation entre les droites PQ, AC; 3° la relation entre le point P et la droite AC.

On appelle *liaison ponctuelle* l'ensemble des couples de points satisfaisant à une même condition; *liaison tangentielle*, l'ensemble des couples de droites satisfaisant à une même condition; *connexe*, l'ensemble des cou-

ples constitués par un point et une droite et qui satisfont à une même condition.

**1284.** On donne un cercle $K^2$ dont le diamètre AB = 2 et le centre O, et une ellipse $E^2$ dont les foyers sont O, B et le grand axe $\sqrt{3}$: si une tangente mobile de l'ellipse coupe le cercle aux deux points P, P', démontrer que le lieu du point d'intersection des droites AP', BP est une courbe du quatrième ordre et de la huitième classe ayant ses deux nœuds en A et B. Déterminer la tangente en un point, les huit bitangentes; les tangentes aux points doubles et les quatre tangentes issues de chacun de ces points. (V. Retali.)

×**1285.** Deux cônes droits de rayons donnés, $r_1$, et $r_2$ ont même surface totale et même volume. On propose de calculer cette surface, le volume et le rayon de la sphère inscrite.

Même question si les hauteurs $h_1$, $h_2$ sont données. (Emmerich.)

×**1286.** Résoudre les $n$ équations :

$$x_1x_2 + ax_1 + bx_2 + c = 0, \quad x_2x_3 + ax_2 + bx_3 + c = 0;$$

. . . . . .

$$x_{n-1}x_n + ax_{n-1} + bx_n + c = 0, \quad x_nx_1 + ax_n + bx_1 + c = 0.$$

(Emmerich.)

**1287.** On donne dans un même plan une parabole $\pi$ et une droite $\mu$. Une sécante quelconque menée par un point fixe P de $\pi$ rencontre la conique en A et la droite en B. On mène la tangente $t$ en A, et par B on tire une droite $d$ parallèle à $t$. Trouver l'enveloppe de la droite $d$.

(H. Lorent.)

×**1288.** Dans la pyramide DABC, l'arête CD est perpendiculaire à la face ABD; si l'on désigne par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles DAC, DBC, ACB et qu'on pose $\alpha + \beta + \gamma = 2p$, le volume de la pyramide a pour expression

$$\tfrac{1}{6}\,\mathrm{CD}\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos p\cos(p-\gamma)\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)}.$$

(A. C.)

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1900.

Solution par M. PLOUMEN, professeur à Chimay.

### Première question de Géométrie analytique.

*Un des sommets* A *d'un parallélogramme* ABCD *circonscrit à une hyperbole se meut sur la circonférence ayant l'axe transverse pour diamètre et dans l'un des angles formés par les asymptotes et comprenant l'axe imaginaire. Rechercher les lieux décrits par les trois autres sommets.*

1. Il est évident que le centre de la courbe est le centre de tout parallélogramme circonscrit ABCD, puisque les points de contact de deux côtés opposés se trouvent sur le même diamètre. Donc, pendant que le sommet A décrit, dans l'un des angles formés par les asymptotes et comprenant l'axe imaginaire, l'arc de cercle ayant l'axe transverse comme diamètre, le sommet opposé C décrit, dans l'angle opposé, un arc du même cercle.

Cherchons maintenant le lieu décrit par les sommets B et D; chacun de ces sommets se trouve évidemment toujours dans l'un des angles formés par les asymptotes et comprenant l'axe transverse. Soient $(x', y')$, $(x'', y'')$ les coordonnées des points de contact des tangentes issues de B; $(-x', -y')$, $(-x'', -y'')$ seront les coordonnées des points de contact des deux autres tangentes. La condition que le point A se trouve à une distance $a$ du centre s'exprime par l'égalité

$$a^2 = \frac{a^4(y'+y'')^2 + b^4(x'+x'')^2}{(y'x''-y''x')^2}. \qquad (1)$$

Les tangentes issues de B ont pour équations

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2, \quad (2) \qquad a^2yy'' - b^2xx'' = -a^2b^2, \quad (3)$$

avec les conditions

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2, \quad (4) \qquad a^2y''^2 - b^2x''^2 = -a^2b^2. \quad (5)$$

Il nous suffit d'éliminer $x'$. $y'$, $x''$, $y''$ entre ces cinq relations pour avoir l'équation du lieu du point B. Pour cela, tirons d'abord $y'$, $y''$ de (2) et (3) et substituons dans (1); nous obtenons

$$a^2(x'-x'')^2 = [x(x'+x'') - 2a^2]^2 + y^2(x'+x'')^2. \qquad (6)$$

Si ensuite nous éliminons $y'$ entre (2) et (4), ou $y''$ entre (3) et (5), nous trouverons une équation du 2e degré dont nous appellerons les racines

$x'$, $x''$. Cette équation nous donne

$$x' + x'' = \frac{2a^2b^2x}{b^2x^2 - a^2y^2}, \quad (x' - x'')^2 = \frac{4a^4y^2(a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2)}{(b^2x^2 - a^2y^2)^2}.$$

Substituant enfin dans (6) il nous vient pour équation du lieu de B

$$x^2 = \frac{a^4}{c^2}. \qquad (7)$$

Il est facile de voir que si, dans les calculs précédents, on change $x', y', x'', y''$ en $-x', -y', -x'', -y''$ on obtient pour le lieu du point D la même équation (7).

Donc les lieux des points B et D ont pour équation $x = \pm\frac{a^2}{c}$; c'est-à-dire que ces points décrivent les portions des directrices comprises dans les angles des asymptotes comprenant l'axe transverse.

2. *Autre manière de faire les calculs.* On peut représenter par $(a\cos\varphi, b\sqrt{-1}\sin\varphi)$, $(a\cos\varphi', b\sqrt{-1}\sin\varphi')$ les coordonnées des points de contact des tangentes issues de B.

La condition que le point A se trouve à une distance $a$ du centre s'exprime par

$$a^2 = \frac{a^2(\sin\varphi + \sin\varphi')^2 - b^2(\cos\varphi + \cos\varphi')^2}{\sin^2(\varphi - \varphi')}$$

ou

$$a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi') = a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') - b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi'). \qquad (1)$$

Les tangentes issues de B ont pour équations

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b\sqrt{-1}} = 1, \quad \frac{x\cos\varphi'}{a} + \frac{y\sin\varphi'}{b\sqrt{-1}} = 1. \qquad (2), (3)$$

Pour avoir l'équation du lieu de B, il nous suffit d'éliminer $\varphi$ et $\varphi'$ entre ces trois dernières relations.

De (2) et (3), nous tirons

$$x = \frac{a\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}, \quad y = \frac{b\sqrt{-1}\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}.$$

D'où

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}, \quad \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \frac{x\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}{a};$$

on peut alors éliminer $\varphi$ et $\varphi'$ de l'équation (1) et l'on obtient ainsi comme plus haut, $x = \pm\frac{a^2}{c}$.

## Seconde question de Géométrie analytique.

***Rechercher les positions d'équilibre d'une masse m d'électricité positive occupant un point d'une ellipse, mais assujettie à se mouvoir sous l'action de deux masses m' et m'' d'électricité de même nom, sans action réciproque et placées respectivement aux foyers F et F' de la courbe.***

Soit M $(x', y')$ un point de l'ellipse qui répond à la question et supposons que les masses $m'$ et $m''$ soient d'électricité positive. Les masses $m'$, $m''$ exercent sur $m$ des répulsions égales à $\frac{mm'}{\overline{MF}^2}$ et $\frac{mm''}{\overline{MF'}^2}$. Décomposons chacune de ces forces suivant la tangente et la normale en M; puisque le point M est en équilibre, les deux composantes tangentiellles seront égales. Or les directions des forces $\frac{mm'}{\overline{MF}^2}$, $\frac{mm''}{\overline{MF'}^2}$ font des angles égaux avec la tangente; l'égalité des composantes tangentielles exige donc que

$$\frac{mm'}{\overline{MF}^2} = \frac{mm''}{\overline{MF'}^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{m'}{(a^2 - cx')^2} = \frac{m''}{(a^2 + cx')^2},$$

ou $$\frac{\sqrt{m'}}{a^2 - cx'} = \frac{\sqrt{m''}}{a^2 + cx'}, \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{a^2}{c} \frac{\sqrt{m''} - \sqrt{m'}}{\sqrt{m''} + \sqrt{m'}}.$$

Donc, si $m'' > m'$, il existe à la droite du petit axe deux points, symétriques par rapport au grand axe, qui répondent au problème; si $m'' < m'$, ces deux points symétriques existent à la gauche du petit axe; enfin si $m'' = m'$, ce sont les extrémités du petit axe qui satisfont à la question. Toutefois, pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait, en valeur absolue,

$$\frac{\sqrt{m''} - \sqrt{m'}}{\sqrt{m''} + \sqrt{m'}} \leq \frac{c}{a} \text{ ou } \frac{m''}{m'} \leq \frac{(a+c)^2}{(a-c)^2}.$$

En particulier, si $\frac{m''}{m'} = \frac{(a+c)^2}{(a-c)^2}$, ce sont les sommets du grand axe qui sont les positions demandées.

## Question d'Algèbre(*).

*Démontrer la relation*

$$m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)+(m-1)m(m+1)\cdots(m+n-2)+\cdots$$
$$\cdots+(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)=$$
$$=\frac{m(m+1)\cdots(m+n)-(m-k)\cdots(m+n-k)}{n+1}.$$

Si nous divisons les deux membres de cette égalité par $n!$, il vient

$$C'_{m,n}+C'_{m-1,n}+C'_{m-2,n}+\cdots+C'_{m-k+1,n}=C'_{m,n+1}-C'_{m-k,n+1}$$

$C'_{m,n}$ désignant le nombre de combinaisons avec répétition de $m$ éléments, $n$ à $n$.

Cette dernière relation peut encore s'écrire

$$C_{m+n-1,n}+C_{m+n-2,n}+\cdots C_{m+n-k,n}=C_{m+n,n+1}-C_{m+n-k,n+1}$$

$C_{m,n}$ désignant un nombre de combinaisons simples.

On a

$$C_{m+n,n+1}=C_{m+n-1,n+1}+C_{m+n-1,n}$$
$$C_{m+n-1,n+1}=C_{m+n-2,n+1}+C_{m+n-2,n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{m+n-k+1,n+1}=C_{m+n-k,n+1}+C_{m+n-k,n}$$

Ajoutant ces égalités, simplifiant et transposant, on arrive à la relation proposée.

---

## NOTES SUR LA COMPOSITION DES FORCES ;

par M. C. Wastreels, répétiteur à l'Université de Gand.

I. *Centre de gravité d'un quadrilatère.* Le centre de gravité d'un quadrilatère est le centre de cinq forces parallèles et égales, appliquées respectivement aux quatre sommets et à l'intersection des diagonales, les quatre premières étant dirigées dans un même sens et la dernière, en sens contraire.

*Démonstration.* Soient le quadrilatère ABCD dont les diagonales se coupent en O, et 3P, $3P_a$, $3P_c$, les poids du quadrilatère et des triangles DAB et BCD. Le poids $3P_a$ peut être remplacé par trois poids égaux

---

(*) Enoncé rectifié.

à $P_a$ appliqués respectivement en A, B et D; de même, le poids $3P_a$ se décompose en 3 poids $P_a$ appliqués en C, B et D.

Appliquons encore au sommet A une force $P_a$ et une force $P'_a = -P_a$, et en C, les forces $P_a$ et $P'_c = -P_a$.

Les deux forces $P'_a$ et $P'_c$ se composent en une force unique égale à $-(P_a + P_a) = -P$ et appliquée en un point de AC qui divise cette droite dans le rapport $P_a : P_c$ ou AO : OC, c'est-à-dire au point O.

Les sommets A, B, C, D et le point O sont donc respectivement sollicités par les forces

$$P_a + P_c,\ P_a + P_c,\ P_a + P_a,\ P_a + P_a,\ -P,$$

ou

$$P,\quad P,\quad P,\quad P,\quad -P;$$

d'où l'on conclut sans peine le théorème énoncé.

II. *Sur deux systèmes de forces équivalents.* Soit un pentagone $A_1A_2A_3A_4A_5$ dans lequel les diagonales se coupent en $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ et $S_5$, $S_i$ désignant celui de ces cinq points qui n'est situé sur aucune diagonale issue de $A_i$, de sorte que $S_i$ est encore le point de rencontre des diagonales du quadrilatère $Q_i$ obtenu en supprimant le sommet $A_i$.

Cela étant, considérons un système de cinq forces parallèles et de même sens $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ et $P_5$, appliquées respectivement en $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ et $S_5$ et proportionnelles aux quadrilatères correspondants; on obtiendra un système équivalent en transportant chaque force $P_i$ au sommet $A_i$.

*Démonstration.* Désignons par $T_i$ et $t_i$ des forces proportionnelles aux triangles construits respectivement sur les deux côtés et les deux diagonales aboutissant en $A_i$, le coefficient de proportionnalité étant le même que pour les forces déjà considérées.

Décomposons la force $P_1$ appliquée en $S_1$ en deux forces parallèles appliquées en $A_2$ et $A_5$; on voit sans peine que les deux composantes ne sont autre chose que les forces désignées par $t_2$ et $T_5$. En opérant d'une manière analogue pour chacune des autres forces $P_i$, on trouve que chaque sommet $A_i$ est sollicité par les forces $t_{i-1}$ et $T_{i-2}$ (les indices 0 et — 1 étant supposés remplacés par 5 et 4); or, $t_{i-1} + T_{i-2} = P'_i$; ce qui démontre le théorème.

Remarque. Ce théorème de mécanique peut se traduire par la formule

$$S\alpha_i Q_i = 0,$$

$\alpha_i$ désignant la projection (algébrique) de $A_iS_i$ sur un axe quelconque.

## INÉGALITÉS LOGARITHMIQUES.

1. ***Aire de la parabole et de l'hyperbole; inégalités à démontrer.*** On sait, depuis Archimède, que l'aire comprise entre un arc de parabole à partir de son sommet, la tangente en ce sommet et la perpendiculaire abaissée sur cette tangente de l'extrémité de l'arc, est le tiers du rectangle construit sur cette perpendiculaire et sur la partie de la tangente comprise entre son pied et le sommet de la courbe.

On sait aussi, relativement à l'hyperbole équilatère $xy = 1$, que l'aire comprise entre deux ordonnées correspondant aux abcisses $x_1, x_2 (x_2 > x_1)$, l'axe des $x$ et la courbe est égale à $l\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, $l$ désignant un logarithme népérien(*).

En nous appuyant sur ces deux théorèmes, nous allons prouver les inégalités suivantes :

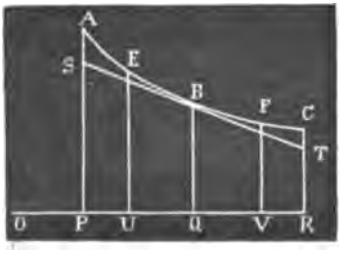
$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < l\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12n(n+\frac{1}{2})(n+1)},$$

$n$ étant une quantité positive quelconque.

2. ***Première inégalité.*** Considérons trois points A, B, C sur l'hyperbole équilatère $xy = 1$, et soient

$$OP = n, \quad OQ = n + \tfrac{1}{2}, \quad OR = n + 1,$$

les abscisses de ces trois points. Appelons S et T les points où la tangente à la courbe en B coupe AP et CR. L'aire du trapèze PSTR est égale à PR × BQ, c'est-à-dire à $\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ ; elle est inférieure à l'aire hyperbolique H = PABCR, laquelle a pour mesure $l\left(\frac{n+1}{n}\right) = l\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Donc




$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < l\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

(*) Sur la détermination de l'aire des paraboles et hyperboles quelconques, voir notre exposé de la méthode de Fermat, *Mathesis* (1), V, p. 44; sur l'application de cette méthode à l'hyperbole équilatère, notre *Résumé d'Analyse*, n° 131, p. 83.

3. *Seconde inégalité.* Supposons la longueur PR divisée en $2k$ parties égales à $\delta$. On aura, comme on sait,

$$H = \lim \sum_{x=n}^{x=n+1} \frac{1}{x} \cdot \delta$$

où l'on suppose $\delta$ indéfiniment décroissant.

Posons $QU = QV = X$ et considérons les deux ordonnées de l'hyperbole,

$$UE = \frac{1}{n+\frac{1}{2}-X}, \quad VF = \frac{1}{n+\frac{1}{2}+X},$$

correspondant aux abscisses

$$OU = OQ - QU = n+\tfrac{1}{2}-X, \quad OV = OQ + QV = n+\tfrac{1}{2}+X.$$

On pourra évidemment écrire H sous la forme

$$H = \lim \sum_{X=0}^{X=\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{n+\frac{1}{2}-X} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}+X} \right) \delta,$$

par un simple changement de notation. Or

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}-X} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}+X} = \frac{2}{n+\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{n+\frac{1}{2}-X} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \right]$$

$$- \left[ \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}+X} \right] = \frac{2}{n+\frac{1}{2}} + \frac{2X^2}{(n+\frac{1}{2})\left[(n+\frac{1}{2})^2 - X^2\right]}.$$

On a donc

$$H = \lim \sum_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{n+\frac{1}{2}} \cdot \delta + \lim \sum_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2X^2}{(n+\frac{1}{2})\left[(n+\frac{1}{2})^2 - X^2\right]} \cdot \delta.$$

La première partie de la valeur de H est égale à

$$\frac{2}{n+\frac{1}{2}} \sum_{0}^{\frac{1}{2}} \delta = \frac{2}{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

On a ensuite, pour les valeurs de X, de 0 à $\frac{1}{2}$,

$$\frac{2X^2}{(n+\frac{1}{2})\left[(n+\frac{1}{2})^2 - X^2\right]} < \frac{2X^2}{(n+\frac{1}{2})\left[(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2\right]} \text{ ou } \frac{2X^2}{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}.$$

La seconde partie de la valeur de H est donc inférieure à

$$\lim \sum_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2X^2}{n(n+\frac{1}{2})(n+1)} \cdot \delta,$$

c'est-à-dire à l'aire d'une parabole ayant pour équation

$$Y = \frac{2X^3}{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}.$$

Cette aire étant limitée comme il est dit au n° 1, a pour mesure le tiers du produit de l'ordonnée extrême par l'abscisse correspondante ou

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^3}{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}.$$

On a donc enfin

$$\text{H ou } l\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)},$$

ce qui est la seconde inégalité annoncée (*).

4. Remarque. Au moyen des deux inégalités démontrées ici, on peut construire une table de logarithmes assez exacte en faisant successivement $n = 75$, 95, 360, 512, 2400, etc. (Voir notre *Résumé d'Analyse*, n° 261, pp. 153-154). (P. M.)

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

14. *Combinaisons*. De combien de manières peut-on prendre, parmi $m$ objets en ligne droite, $n$ groupes de $p$ objets adjacents chacun?

Il faut évidemment que $m$ soit supérieur à $np$ et nous admettrons en outre que deux ou plusieurs groupes pourront parfois se suivre sans interruption.

Cela étant, désignons les objets par $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$. On peut former tous les arrangements cherchés, en écrivant d'abord $m$ groupes $g$ de $n$ lettres $a$ chacun, ces lettres étant momentanément sans indices,

$$\underbrace{a, a, a, \ldots}_{g}, \quad \underbrace{a, a, a, \ldots}_{g}, \ldots,$$

puis en plaçant, de toutes les manières possibles, les $m - np$ lettres $a$ restantes (également sans indices) dans les intervalles des groupes, ou à gauche du premier groupe, ou à droite du dernier, enfin en mettant, dans chaque arrangement, les indices de gauche à droite dans l'ordre naturel.

---

(*) Le second membre de l'inégalité est l'aire d'une parabole passant par les trois points A, B, C et ayant son axe parallèle à AB.

Mais tout cela équivaut à faire les permutations à répétition de $n$ lettres $g$ et de $m - np$ lettres $a$, à remplacer les lettres $g$ par des groupes; puis à mettre des indices.

Donc le nombre cherché est

$$\frac{P_{m-np+n}}{P_{m-np} \cdot P_n}.$$

Le lecteur peut s'exercer à résoudre la question suivante : de combien de manières peut-on prendre $n$ groupes de $p$ objets adjacents parmi $m$ objets placés en cercle ? (M. Stuyvaert.)

**15.** *Notes sur la question* 1251 (Voir *Mathesis*, (2) X, p. 32, 168). Soit MBC un triangle isoscèle de base BC ; une parallèle à la base coupe les côtés égaux MB en A et MC en D.

La hauteur abaissée de M sur la base passe par le milieu A′ de cette dernière et par le point de rencontre N des diagonales AC et BD du trapèze isoscèle ABCD.

Le trapèze isoscèle étant inscriptible dans un cercle, on retrouve comme corollaire de la question 1251, un théorème que j'avais déjà démontré dans ma note de la livraison de janvier, sur trois hyperboles associées à un triangle (pp. 11 — 13) :

La médiatrice du côté BC d'un triangle rencontre les deux autres côtés AB et AC en M et N. L'hyperbole qui est tangente en ces deux points aux côtés considérés, qui admet donc comme pôle du sommet A, la médiatrice de BC et qui a en outre ce côté BC comme une des asymptotes, touche la droite de Lemoine du triangle ABC. (Droz-Farny).

**16.** *Sur l'aire du quadrilatère.* Dans le numéro de février 1900, de *Mathesis*, p. 42, M. J. Neuberg a démontré que si $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$ sont les sommets d'un quadrilatère convexe, l'on a, en grandeur et en signe, pour l'aire Q du quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$,

$$Q = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}.$$

Voici une application intéressante de cette formule. Supposons les quatre points donnés à l'intersection d'une parabole $y^2 = 2px$ et d'un cercle quelconque. On aura

$$Q = \frac{1}{4p}\begin{vmatrix} y_3^2 - y_1^2 & y_3 - y_1 \\ y_4^2 - y_2^2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix} = \frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)}{4p}\begin{vmatrix} y_3 + y_1 & 1 \\ y_4 + y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Les quatre points seront sur une circonférence si $y_4+y_2=-(y_3+y_1)$. Donc

$$Q=\frac{(y_3-y_1)(y_4-y_2)}{4p}\begin{vmatrix} y_3+y_1 & 1 \\ -(y_3+y_1) & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(y_3^2-y_1^2)(y_4-y_2)}{2p}=(x_1-x_3)(y_1-y_4)$$

(Droz-Farny).

---

## SUR LES TRIANGLES TRIHOMOLOGIQUES;

par M. Ripert.

M. Third a démontré (*Mathesis*, 1900, p. 153) une proposition très intéressante qui adjoint à tout couple (A, B) de triangles trihomologiques, dont les centres sont $S_1$, $S_2$, $S_3$, un triple de coniques $\Sigma_1(A_1A_2A_3S_2S_3)$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, remarquables. On peut leur adjoindre de même un triple $\Sigma'_1(B_1B_2B_3S_2S_3)$. $\Sigma'_2$, $\Sigma'_3$. Chaque conique $\Sigma_i$ coupe le cercle $(A_1A_2A_3)$ en un quatrième point $C_i(i=1, 2, 3)$, et chaque conique $\Sigma'_i$ coupe le cercle $(B_1B_2B_3)$ en un quatrième point $D_i$. On peut donc adjoindre à tout couple (A, B) de triangles trihomologiques un sextuple de coniques $(\Sigma_i, \Sigma'_i)$ (*) et un second couple de triangles (C,D).

Cela posé, si A et B sont inscrits à un même cercle (ou conique) O, les triangles C, D sont trihomologiques à A et B et trihomologiques entre eux. L'ensemble forme un *quadruple* inscrit (A, B, C, D), susceptible d'être transformé en un *groupe* d'un nombre indéfini de triangles inscrits, trihomologiques deux à deux.

J'ai démontré ces propriétés dans un Mémoire *sur des groupes de triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une même conique ou à une famille de coniques*, que j'ai présenté cette année à l'AFAS.

Voici un aperçu de la démonstration.

Le triangle $A_1A_2A_3$, inscrit dans la conique $O\left(\Sigma\frac{\alpha_2}{x_2}=0\right)$ $(i, k, l=1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2)$ étant de référence, on reconnaît aisément qu'un

---

(*) Sans compter les coniques corrélatives $\sigma_i, \sigma'_i$, indiquées par M. Third et qui donneront les propriétés corrélatives pour les triangles circonscrits.

triangle $B_1B_2B_3$ trihomologique à A est défini, avec la condition $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, par

$$B_1\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1},\frac{\alpha_2}{\lambda_2},\frac{\alpha_3}{\lambda_3}\right),\quad B_2\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_3},\frac{\alpha_2}{\lambda_1},\frac{\alpha_3}{\lambda_2}\right),\quad B_3\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_2},\frac{\alpha_2}{\lambda_3},\frac{\alpha_3}{\lambda_1}\right),$$

les centres $S_i$ correspondants étant aux points

$$S_1(\alpha_1\lambda_1,\alpha_2\lambda_3,\alpha_3\lambda_2),\quad S_2(\alpha_1\lambda_3,\alpha_2\lambda_2,\alpha_3\lambda_1),\quad S_3(\alpha_1\lambda_2,\alpha_2\lambda_1,\alpha_3\lambda_3).$$

Les trois coniques $\Sigma_i$ ont pour équation

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1 x_1}+\frac{\alpha_2}{\lambda_2 x_2}+\frac{\alpha_3}{\lambda_3 x_3}=0,$$

et les points $C_i$ ont pour coordonnées, en posant $\lambda_i(\lambda_k-\lambda_l)=\mu_i$

$$C_i\left(\frac{\alpha_1}{\mu_1},\frac{\alpha_2}{\mu_2},\frac{\alpha_3}{\mu_3}\right).$$

On vérifie alors immédiatement que les triangles A et C sont trihomologiques, les centres $C_i'$ étant

$$(\alpha_1\mu_1,\alpha_2\mu_2,\alpha_3\mu_3),\quad (\alpha_1\mu_3,\cdots),\quad (\alpha_1\mu_2,\cdots).$$

On reconnaît ensuite que les triples $(B_iC_i)$, $(B_iC_k)$, $(B_iC_l)$ concourent en des points $C_i''$ :

$$C_1''\,[3\alpha_1\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\quad \alpha_2(\lambda_3\mu_2-\lambda_1\mu_1),\quad \alpha_3(\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_3)],\ \text{etc.}$$

Donc (A, B, C) est un triple de triangles inscrits, deux à deux trihomologiques. Il en est évidemment de même du triple (A, B, D). Un calcul laborieux mais sans difficulté montre que les triangles C et D sont trihomologiques entre eux. — D'ailleurs, la propriété suivante est facile à démontrer : si deux triangles *inscrits à une même conique* sont trihomologiques à un troisième (*également inscrit*)(*), ils sont trihomologiques entre eux.

---

(*) Condition qui n'est nullement nécessaire; mais la démonstration est plus compliquée quand on la supprime.

## ESQUISSE BIOGRAPHIQUE.

### Sophus Lie (1842-1899).(*)

Sophus Lie, né le 17 novembre 1842, à Nordfjordeid, près de Florö, en Norwège, est mort à Christiania, le 18 février 1899.

Dans sa jeunesse, Lie a longtemps hésité entre la Philologie et les Mathématiques; mais vers 1865, les travaux de Plücker sur la Géométrie réglée lui donnèrent, pour la première fois, pleine conscience de ses aptitudes et l'orientèrent vers les recherches auxquelles il consacra sa vie : il publia en 1869 son premier travail et dès 1870, il était en possession des idées directrices de toute sa carrière. Vers cette époque il vint à Paris, où il étudia, avec Klein, la *Théorie des substitutions* de Jordan, persuadé dès lors du rôle essentiel que la théorie des groupes est appelée à jouer dans toutes les branches des mathématiques.

Une courte note de Lie *Sur une transformation géométrique*, présentée par lui à l'Académie des sciences de Paris, en octobre 1870, développée en 1872, dans un mémoire plein d'idées neuves, qui fut publié dans les *Mathematische Annalen*, contient une découverte extrêmement originale. Il y expose une transformation singulière qui fait correspondre une sphère à une ligne droite et permet de déduire de toute proposition relative à un ensemble de droites, un théorème relatif à un ensemble de sphères. Chaque propriété des lignes asymptotiques d'une surface se transforme en une propriété relative aux lignes de courbure d'une autre.

A partir de 1872, Lie ne cesse de faire paraître une série de Mémoires sur les parties les plus difficiles et les plus hautes du calcul intégral. Il commence par une étude approfondie des travaux de Jacobi sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, les perfectionne sur un point important (**) et est conduit peu à peu à construire la théorie des groupes continus de transformations qui constitue son œuvre la plus importante; dans ces recherches, il emploie sans cesse deux éléments dont le second lui appartient en propre : les transformations de contact et les transformations infinitésimales.

---

(*) D'après Darboux, *Notice sur* Sophus Lie. C. R., t. CXXVIII, pp. 525-529. — Une liste des œuvres de Lie a paru dans le *Bollettino* de G. Loria, 1899, pp. 71-75, avec une notice sur Lie, par C. Segre. Une notice suivie d'une liste plus complète due à M. Engel, a été publiée dans la *Bibliotheca mathematica* d'Enestrom, 1900, (3), I, pp. 166-204.

(**) Nous avons le premier fait connaître ces remarquables recherches de Lie dans notre *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (1873-1875).

On doit aussi à Lie un grand nombre de recherches géométriques; il détermine toutes les surfaces minima algébriques d'une classe et d'un ordre donné, ou inscrites dans une développable algébrique donnée, quand l'on en connaît une; on lui doit des travaux intéressants sur les surfaces à courbure constante, sur les lignes et les cercles géodésiques, sur les surfaces de translation, etc. Il a étudié à fond des questions d'*analyse* en connexion intime avec les principes de la géométrie euclidienne ou non-euclidienne.

De 1877 à 1886, Lie a été professeur à l'Université de Christiania; de 1886 à 1898 à celle de Leipzig. Rentré à Christiania pour y occuper une chaire spécialement créée pour lui, il y est mort d'anémie cérébrale à l'âge de 56 ans.

Le grand ouvrage (*Theorie der Transformationsgruppen*, 1888, 1893; *Geometrie der Berührungstransformationen*, 1896, 1er Band) où il avait entrepris, avec ses disciples, l'exposition de l'ensemble de ses découvertes, reste inachevé. Peut-être n'est-il pas écrit avec la clarté et la concision nécessaires pour que les idées du maître soient rendues aussi accessibles que possible. Il faut bien avouer que les grands mémoires de Lie aussi sont parfois obscurs et prolixes en même temps. L'œuvre entière de Lie devrait être *transposée* (nous ne disons pas *traduite*) en français. (P. M.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### ×Question 1139(*).

(Voir *Mathesis* (2), t. VII, p. 237).

*Soient* A, B, ... *les mineurs du déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

*Démontrer que*

$$\frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} A^2 & B^2 & C^2 \\ A'^2 & B'^2 & C'^2 \\ A''^2 & B''^2 & C''^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 \\ a''^2 & b''^2 & c''^2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ b'c' & c'a' & a'b' \\ b''c'' & c''a'' & a''b'' \end{vmatrix}.$$

(A. C.)

*Solution par* M. Emmerich. J'écris l'égalité proposée sous la forme

$$\frac{\Delta}{D^2} = \Delta_1 - 2\Delta_2.$$

---

(*) Énoncé rectifié.

Alors

$$\begin{aligned}\Delta &= \Sigma A^2 aD\,(B'C'' + B''C')\\ &= D\Sigma A^2 a\,(aD + 2B''C')\\ &= D^2\Sigma A^2 a^2 + 2D\Sigma A^2 aB''C';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma A^2 aB''C' &= \Sigma\,(D - A'a' - A''a'')\,AB''C'\\ &= D\Sigma AB''C' - \Sigma AA'\,(B''C'a' + BC''a)\\ &= D\Sigma AB''C' - \Sigma AA'\,(B''C'a' + B''Ca - aa'D)\\ &= D\,(\Sigma AB''C' + \Sigma AA'aa') + \Sigma AA'B''C''a'';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma AA'B''C''a'' &= A\,(A'B''C''a'' + A''B'C'a') + A'A''BCa\\ &= A\,(A''B'C''a'' + cDC''a'' + A''B'C'a') + A'A''BCa\\ &= DAC''ca'' - AA''B'Ca + A'A''BCa\\ &= D\,(AC''ca'' - A''Cac'')\\ &= D\,[Aca''\,(ab' - a'b) - A''ac''\,(a'b'' - a''b')]\\ &= D\,[-Aa'a''bc + (Ac + A''c'')\,aa''b' - A''aa'b''c'']\\ &= -D\Sigma Aa'a''bc.\end{aligned}$$

En substituant, nous avons

$$\Delta = D^2\Sigma A^2a^2 + 2D^2\Sigma\,(AB''C' + AA'aa' - Aa'a''bc),$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{D^2} &= (\Sigma Aa^2) + 2\Sigma AB''C' - 2\Sigma Aa'a''bc\\ &= \Sigma A\,(B'C'' + B''C' - 2a'a''bc).\end{aligned}$$

Posons $b'c'' + b''c' = \alpha$, $b''c + bc'' = \alpha'$, $bc' + b'c = \alpha''$; il vient

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{D^2} &= \Sigma Aa\,(a\alpha - a'\alpha' - a''\alpha'')\\ &= \Sigma Aa^2\alpha - \Sigma a'a''\,(A'\alpha'' + A''\alpha').\end{aligned}$$

Or $\Sigma a^2 A\alpha = \Sigma a^2\,(b'^2c''^2 - b''^2c'^2)\,\Delta_1$; d'autre part on a

$$A'\alpha'' + A''\alpha' + \begin{vmatrix} b''c - bc'' & b''c + bc'' \\ b'c - bc' & b'c + bc' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b''c - bc'' & b''c \\ b'c - bc' & b'c \end{vmatrix} = -2bcA.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\Sigma a'a''\,(A'\alpha' + A''\alpha') &= -2\Sigma a'a''bcA = -2\Sigma a'a''bc\,(b'c'' - b''c')\\ &= 2\Sigma bc\,(c'a'.\,a''b'' - a'b'.\,c''a'') = 2\Delta_2.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

## Question 1178.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII p. 152).

*On donne dans le même plan trois systèmes égaux* $F_1, F_2, F_3$ ; $A_3$ *est le point double de* $F_1, F_2$ ; $A_2$ *celui de* $F_3, F_1$ ; $A_1$ *celui de* $F_2, F_3$ ; $D_1, D_2, D_3$ *sont respectivement les points correspondant à* $A_1, A_2, A_3$ *dans les systèmes* $F_1, F_2, F_3$. *Si, pour chaque triple* $P_1, P_2, P_3$ *de points homologues, on détermine le centre* P *du cercle circonscrit, on obtient un quatrième système que nous appellerons* $\Phi$ *: cela posé, démontrer que chacun des systèmes* $F_1, F_2, F_3$ *est lié à* $\Phi$ *par une correspondance quadratique rationnelle et étudier ces trois transformations.* (V. Retali.)

*Solution par* M. Droz-Farny. Soit $\pi$ un point quelconque du plan du triangle $A_1A_2A_3$.

On démontre, par des considérations de géométrie élémentaire, que ses symétriques par rapport aux trois côtés du triangle sont les points $P_1$, $P_2$ et $P_3$ et que le centre du cercle $P_1P_2P_3$ est le conjugué isogonal de $\pi$ par rapport au même triangle.

Or, c'est un fait bien connu, que la transformation isogonale dans le triangle $A_1A_2A_3$ revient à une transformation de Steiner par rapport au faisceau des hyperboles équilatères passant par les centres des cercles inscrits et ex-inscrits à $A_1A_2A_3$.

La correspondance de $\Phi$ à $F_1$ revient donc au produit d'une correspondance de Steiner par une symétrie.

---

## Question 1183.

(Voir *Mathesis* (2) VIII, pp. 216 et 264).

*Par un point* P *du plan d'un triangle donné* ABC, *on mène des parallèles aux médianes; soient* A', B', C' *les points de rencontre de ces parallèles avec les côtés correspondants de* ABC. 1° *Trouver le lieu d'un point* P *tel que*

$$A'B'C' = \frac{3}{16} ABC . \qquad (1)$$

2° *Quel est, dans ce cas, le lieu du centre de gravité du triangle* A'B'C'? 3° *Trouver l'enveloppe de chaque côté du triangle* A'B'C'.

(J. Déprez).

Une projection orthogonale ramène la question au cas où le triangle ABC est équilatéral; les droites AA', BB', CC' deviennent alors perpendiculaires à BC, CA, AB. Supposons donc le triangle ABC équilatéral.

1° Le triangle podaire de P doit avoir une surface constante; donc, d'après un théorème connu, le lieu de P est une circonférence concentrique avec la circonférence ABC. C'est la circonférence inscrite à ABC; car les milieux des côtés du triangle ABC ont des triangles podaires dont la surface $= \frac{3}{16}$ ABC.

2° Soient $\alpha, \beta, \gamma$ les coordonnées normales de P, et $\alpha', \beta', \gamma'$ celles du centre de gravité G' du triangle A'B'C'. Les coordonnées des points A', B', C' sont

$$0,\ B'P + A'P\cos 60° = \beta + \tfrac{1}{2}\alpha,\ \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha;\ \alpha + \tfrac{1}{2}\beta,\ 0,\ \alpha + \tfrac{1}{2}\gamma;\ \ldots,$$

on en conclut

$$\alpha' = \tfrac{2}{3}\alpha + \tfrac{1}{6}(\beta + \gamma),\quad \beta' = \tfrac{2}{3}\beta + \tfrac{1}{6}(\gamma + \alpha),\ \ldots;$$

inversement

$$\alpha = \frac{5\alpha' - \beta' - \gamma'}{3},\quad \beta = \frac{5\beta' - \gamma' - \alpha'}{3},\quad \gamma = \frac{5\gamma' - \alpha' - \beta'}{3}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation $\Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\beta\gamma = 0$ du cercle inscrit au triangle ABC; nous aurons, pour l'équation du lieu de G',

$$5\Sigma\alpha^2 - 6\Sigma\beta\gamma = 0,\quad \text{ou}\quad 5\Sigma^2\alpha - 16\Sigma\beta\gamma = 0.$$

Ce lieu est donc la circonférence qui passe par les milieux des médianes.

3° Prenons pour axes coordonnés les droites CA, CB. L'équation du cercle inscrit au triangle ABC sera

$$x^2 + xy + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0,$$

ou

$$(x + y - a)^2 - xy = 0, \qquad (1)$$

$2a$ désignant la longueur CB. Si $x$ et $y$ représentent les coordonnées du point P de ce cercle, on trouve facilement $CB' = x + \frac{1}{2}y$, $CA' = y + \frac{1}{2}x$,

de sorte que l'équation de la droite A'B' est

$$\frac{2X}{2x+y}+\frac{2Y}{2y+x}=1.$$

Les coordonnées tangentielles de A'B' étant

$$u=-\frac{2}{2x+y},\quad v=-\frac{2}{2y+x}, \tag{2}$$

on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite A'B' en éliminant $x$ et $y$ entre les égalités (1) et (2). Cette enveloppe est de la 4e classe.

On peut remplacer l'équation (1) par le système

$$\frac{x+y-a}{\lambda\mu}=\frac{x}{\lambda^2}=\frac{y}{\mu^2}, \tag{3}$$

le rapport $\lambda:\mu$ tenant lieu de paramètre variable. Du rapport (3), on déduit facilement

$$\frac{a}{\lambda^2-\lambda\mu+\mu^2}=\frac{2x+y}{2\lambda^2+\mu^2}=\frac{2y+x}{\lambda^2+2\mu^2},$$

de sorte que les coordonnées homogènes de la droite A'B' sont

$$u:v:w=\frac{1}{2\lambda^2+\mu^2}:\frac{1}{\lambda^2+2\mu^2}:\frac{-a}{2(\lambda^2-\lambda\mu+\mu^2)}.$$

En écrivant l'équation de cette droite en coordonnées cartésiennes (avec le paramètre $\lambda$) et appliquant ensuite la théorie des enveloppes, on trouve une courbe du 6e ordre. (J. N.)

M. Emmerich a résolu la même question en supposant le triangle ABC quelconque.

---

## Question 1197.

(*Mathesis*, (2) VIII, p. 280).

*Étant données deux circonférences* I *et* O, *on mène au point* M *de la première une tangente qui rencontre la seconde aux points* A *et* B, *et l'on considère le triangle* M'AB *dont le sommet* M' *est diamétralement opposé à* M *sur la circonférence* I. *Trouver le lieu du centre* N *du cercle circonscrit à ce triangle.* (Soons.)

*Solution par* M. Emmerich. Prenons pour axes la ligne des centres OI et la perpendiculaire en O; soient

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad (1)$$
$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

les équations des deux cercles.

Si l'on désigne par $\rho = O\omega$, $u = angle\ IO\omega$ les coordonnées polaires de M, les coordonnées rectangulaires des points N, M, M′ sont

$$N\begin{cases}\rho\cos\omega,\\ \rho\sin\omega;\end{cases} \quad M\begin{cases}a + r\cos\omega,\\ r\sin\omega;\end{cases} \quad M'\begin{cases}a - r\cos\omega,\\ -r\sin\omega.\end{cases}$$

La tangente au point M a pour équation

$$(x - a)\cos\omega + y\sin\omega = r. \qquad (2)$$

Appelons $x$, $y$ les coordonnées du point A; elles vérifient les équations (1) et (2). En exprimant que NA = NM′ on obtient

$$(\rho\cos\omega - x)^2 + (\rho\sin\omega - y)^2 = [(\rho + r)\cos\omega - a]^2 + (\rho + r)^2\sin^2\omega.$$

En développant et en tenant compte des égalités (1) et (2) on trouve

$$\rho = \tfrac{1}{2}a\cos\omega + \frac{R^2 - r^2 - a^2}{2r}.$$

Telle est l'équation du lieu en coordonnées polaires. On voit que ce lieu est généralement un limaçon de Pascal, ayant pour pôle le point O et pour cercle directeur le cercle décrit sur la distance OI comme diamètre. Il se réduit au cercle directeur lorsque $R^2 = r^2 + a^2$, ou quand le cercle O passe par les extrémités d'un diamètre du cercle I. On obtient une cardioïde lorsque

$$\frac{R^2 - r^2 - a^2}{2r} = \pm a,$$

ou

$$R^2 = (r \pm a)^2;$$

les cercles proposés sont alors tangents l'un à l'autre.

Ont résolu la même question MM. Déprez, Ripert, Van Dorsten, Barisien et Sintsof. M. Barisien remarque que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle des neuf points du triangle M′AB décrivent également des limaçons de Pascal.

---

## Question 1339.

(Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 240).

***Etant donnée une conique de foyers*** F ***et*** F′, ***on considère une hyperbole équilatère ayant un de ses foyers en*** F ***et dont la directrice correspondante***

*passe par* F'. *Trouver l'enveloppe de cette hyperbole, et les lieux du centre, du second foyer et des sommets, ainsi que l'enveloppe de la seconde directrice. Trouver aussi le lieu du point de rencontre des sécantes communes à la conique et à l'hyperbole.* (E. N. Barisien.)

*Solution par* M. J. Déprez. Remplaçons l'hyperbole équilatère par une conique qui reste semblable à elle même; soient $FF' = 2d$, $\varphi$ l'angle de l'axe focal de la conique variable et de la droite FF'; prenons FF' pour axe polaire et F pour pôle.

L'équation de la conique variable est

$$\rho = \frac{2dk\cos\varphi}{1 + k\cos(\omega - \varphi)}.$$

L'enveloppe a pour équation

$$\rho^2(k^2 - 1) - 4dk^2\rho\cos\omega + 4d^2k^2 = 0.$$

La conique variable enveloppe un cercle de centre $\left[\frac{2dk^2}{k^2-1}, 0\right]$, et de rayon $\frac{2dk}{k^2-1}$.

D étant la projection de F sur la directrice correspondante, O le centre, $F_1$ le second foyer; S, S' les sommets situés sur l'axe focal, T, T' les deux autres sommets, D' le pied de la seconde directrice de la conique variable, on a

$$\frac{FD}{FO} = \frac{k^2-1}{k^2},\ OF_1 = OF,\ \frac{FS}{FO} = \frac{k-1}{k},\ \frac{FS'}{FO} = \frac{k+1}{k},\ \frac{FD'}{FO} = \frac{k^2+1}{k^2}.$$

Or D décrit la circonférence ayant FF' pour diamètre, donc O, $F_1$, S, S', D' décrivent des circonférences passant par F et dont les centres se trouvent sur FF'; la perpendiculaire à FD' en D', c'est-à-dire la seconde directrice passe donc par un point fixe situé sur FF'.

Les triangles FOT, FOT' restent toujours semblables à eux mêmes, le sommet F est fixe, le sommet O décrit une circonférence, donc les sommets T, T' décrivent des circonférences.

Le point de rencontre des sécantes communes à la conique donnée et à la conique variable se trouve au point de rencontre des directrices, relatives au foyer F des deux coniques.

Le point demandé décrit donc la directrice, relative au foyer F, de la conique fixe.

Autre solution par M. Rose.

## ×Question 1250.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 280).

*Calculer les coordonnées du point dont la droite de Simson par rapport au triangle de référence* ABC *est parallèle à la droite de Lemoine, ou à l'axe antiorthique (joignant les pieds des bissectrices extérieures), ou à l'axe orthique (axe d'homologie du triangle orthique et de* ABC). (E. Lemoine.)

*Solution par* M. J. Déprez. Plus généralement, calculons les coordonnées du point P, dont la droite de Simson par rapport à ABC est parallèle à la droite $\Delta \equiv Ax + By + Cz = 0$.

Soit A′ le point où la parallèle à Δ, menée par le sommet A, coupe la circonférence ABC; P sera le point où la perpendiculaire abaissée de Δ′ sur BC, rencontre la circonférence ABC.

La parallèle à Δ menée par A a pour équation

$$y[a\mathrm{B} - b\mathrm{A}] + z[a\mathrm{C} - c\mathrm{A}] = 0;$$

les coordonnées du point A′ sont

$$\frac{1}{c[a\mathrm{C} - c\mathrm{A}] - b[a\mathrm{B} - b\mathrm{a}]}, \quad \frac{1}{a[a\mathrm{B} - b\mathrm{A}]}, \quad \frac{-1}{a[a\mathrm{C} - c\mathrm{A}]},$$

et les coordonnées du point P sont

$$\frac{1}{-\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos\mathrm{C} + \mathrm{C}\cos\mathrm{B}}, \quad \frac{1}{\mathrm{A}\cos\mathrm{C} - \mathrm{B} + \mathrm{C}\cos\mathrm{A}}, \quad \frac{1}{\mathrm{A}\cos\mathrm{B} + \mathrm{B}\cos\mathrm{A} - \mathrm{C}},$$

1° Si Δ est la droite de Lemoine, $\Delta \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$, les coordonnées de P sont

$$\frac{1}{a[b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)]}, \ldots$$

Le point P est donc le point de Tarry du triangle.

2° Si Δ est l'axe antiorthique, $\Delta \equiv x + y + z = 0$, les coordonnées de P sont

$$\frac{1}{\mathrm{R}\cos\mathrm{A} - r}, \ldots$$

3° Si Δ est l'axe orthique $\Delta \equiv x\cos\mathrm{A} + y\cos\mathrm{B} + z\cos\mathrm{C} = 0$, les coordonnées de P sont

$$\frac{1}{\cos\mathrm{A} - 2\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}}, \ldots$$

Le point P est diamétralement opposé au foyer de la parabole de Kiepert.

Remarque. Si $\Delta$ est la droite joignant le centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit, on a $\Delta \equiv \Sigma x(\cos B - \cos C) = 0$; les coordonnées de P sont

$$\frac{1}{b-c}, \quad \frac{1}{c-a}, \quad \frac{1}{a-b}.$$

Autre solution par M. Emmerich.

---

## Question 1266.

(Voir *Mathesis*, 2, X, pp. 104 et 128).

*Soient* M *et* M′ *les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse de centre* O,N *et* T *les points de rencontre de la normale et de la tangente en* M *avec le grand axe,* P′ *et* Q′ *les projections de* M′ *sur le grand axe et le petit axe,* R *et* R′ *les rayons des cercles circonscrits aux triangles* MOT *et* MON. *Démontrer que*

$$R = \frac{OM \times OM'}{2M'P'}, \quad R' = \frac{OM \times OM'}{2M'Q'}$$

(E. N. Barisien.)

*Solution par* H. Descans (Bruxelles). 1° On sait que

$$R = \frac{OM}{2 \sin OTM}.$$

Mais la tangente MT à l'extrémité M du diamètre OM étant parallèle au diamètre OM′ conjugué de OM, l'angle OTM = M′OP′. Donc

$$\sin M'OP' = \frac{M'P'}{OM'}, \quad R = \frac{OM \times OM'}{2M'P'}.$$

2° Dans le triangle OMN,

$$R' = \frac{OM}{2 \sin ONM} = \frac{OM}{2 \sin TNM}.$$

Mais les angles TNM, Q′OM′ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Donc

$$\sin TNM = \sin Q'OM' = \frac{M'Q'}{OM'}, \quad R' = \frac{OM \times OM'}{2M'Q'}.$$

Même solution par MM. G. Gérard, Lebougq (Bruxelles). Solution analytique par MM. Emmerich et Cardoso-Laynes.

---

## ×Question 1977.

(Voir *Mathesis* (2) t. X, p. 176.)

***On donne les angles d'un triangle*** ABC, ***et le rayon r du cercle inscrit, qui touche*** BC, CA, AB ***aux points*** D, E, F. ***Lorsque la figure tourne autour de la bissectrice de l'angle*** BAC, ***calculer les surfaces engendrées par les droites*** AF, FB, EC ***et par les deux arcs que sous-tend la corde*** FE. ***Trouver également les volumes engendrés par les triangles curvilignes ayant pour côtés les droites*** AF, AE ***et l'un des arcs du cercle*** FE.

*Solution par* MM. François (La Haye), Plakhovo et Emmerich. Il suffit d'indiquer les résultats.

1. Surfaces engendrées par les droites AF, FB, EC :

$$S_1 = \pi r^2 \cot \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A,$$

$$S_2 = \pi r^2 \cot \tfrac{1}{2} B \left( \cos \tfrac{1}{2} A + \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} B} \right),$$

$$S_3 = \pi r^2 \cot \tfrac{1}{2} C \left( \cos \tfrac{1}{2} A + \frac{\sin \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} \right).$$

2. Surfaces engendrées par les arcs FE :

$$S_4 = 2\pi r^2 (1 - \sin \tfrac{1}{2} A),$$
$$S_5 = 2\pi r^2 (1 + \sin \tfrac{1}{2} A).$$

3. Volume du cône AEF

$$V_1 = \tfrac{1}{3} \pi r^3 \cdot \frac{(1 - \sin \frac{1}{2} A)^2 (1 + \sin \frac{1}{2} A)^2}{\sin \frac{1}{2} A}.$$

4. Volumes des segments engendrés par la droite FE et les arcs FE :

$$V_2 = \tfrac{1}{3} \pi r^3 (1 - \sin \tfrac{1}{2} A)^2 (2 + \sin \tfrac{1}{2} A),$$
$$V_3 = \tfrac{1}{3} \pi r^3 (1 + \sin \tfrac{1}{2} A)^2 (2 - \sin \tfrac{1}{2} A).$$

5. Volumes engendrés par les triangles curvilignes ayant pour côtés les droites AF, AE et l'un des arcs de cercle FE :

$$V_4 = \tfrac{1}{3} \pi r^3 \cdot \frac{(1 - \sin \frac{1}{2} A)^2}{\sin \frac{1}{2} A}, \quad V_5 = \tfrac{1}{3} \pi r^3 \cdot \frac{(1 + \sin \frac{1}{2} A)^2}{\sin \frac{1}{2} A}.$$

---

## ×QUESTION D'EXAMEN.

**983.** Vérifier les identités suivantes relatives à trois lettres $a, b, c$, le signe sommatoire indiquant la somme de trois termes qui se déduisent du premier par une permutation tournante de $a, b, c$.

1° $\Sigma a(b-c)^2 + 8abc = (a+b)(b+c)(c+a)$.

2° $\Sigma a(b+c)^2 - 4abc = (a+b)(b+c)(c+a)$.

3° $\Sigma(a+b)(b+c)(c-a) + (a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

4° $\Sigma(a+b)(b+c)(c-a) - (a+b)(b+c)(c+a) + 2\Sigma ab^2 + 2abc = 0$.

5° $\Sigma(a+b)(b-c)(c-a) + (a-b)(b-c)(c-a) = 6abc - 2\Sigma ab^2$.

6° $\Sigma(a-b)^2(a^2-b^2) = 2\Sigma a \,.\, (a-b)(b-c)(c-a)$.

7° $\Sigma(a+b)(2a+b+c) = 3\Sigma a^2 + \Sigma ab$.

8° $\Sigma a(a-b+c) = \Sigma a(a+b-c) = \Sigma a^2$.

(Extrait du *Supplemento al Periodico di Mathematica.*)

**963.** Trouver la relation qui doit exister entre $m$ et $m'$ pour que le maximum et le minimum de la fraction

$$\frac{x^2 + 2mx + 1}{x^2 + 2m'x + 1}$$

soient égaux et de signes contraires. Quels sont-ils pour $m = 5$?

(*Bacc.*, Paris, 1900).

*Réponse.* 1° $mm' = 1$, 2° $\pm 5$.

**964.** Soient O et H le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et l'orthocentre. Les parallèles menées par H aux rayons OA, OB, OC rencontrent respectivement BC, CA, AB aux points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Démontrer que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes.

Les droites AO, BO, CO rencontrent BC, CA, AB aux points $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ qui sont les symétriques de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par rapport aux milieux des côtés de ABC...

**965.** Si deux nombres sont premiers avec 3, la différence de leurs sixièmes puissances est un multiple de 9. (*J. de Vuibert*).

A déduire de $x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$.

**966.** On donne la base BC $= 2a$ d'un triangle ABC. Trouver le lieu du sommet A dans les hypothèses suivantes :

1° $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}^2 C$ (hyperbole); 2° $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = k$ (conique); 3° $B + 2C = 180°$ (circonférence); 4° $B = 2C$ (hyperbole); 5° $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = k$ (parabole); 6° $\operatorname{tg} B = k \operatorname{tg} C$ (droite); 7° $B - C = 90°$ (hyperbole équilatère); 8° $\operatorname{tg} B = \sin C$ (parabole); 9° $\operatorname{tg} B = \sin 2C$ (ellipse); 10° $\operatorname{tg} B = -\sin 2C$ (hyperbole équilatère).

Si $\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C = 2$, l'orthocentre décrit une hyperbole équilatère.

Si cot B — cot C = $k$, l'orthocentre décrit une hyperbole et le point de Lemoine parcourt une droite (E. N. Barisien).

**2967.** Si l'on donne

$$a = \frac{x^2 - y}{1 - xy}, \quad b = \frac{y^2 - x}{1 - xy}$$

démontrer que

$$x = \frac{a^2 - b}{1 - ab}, \quad y = \frac{b^2 - a}{1 - ab}$$

(*Educational Times*).

Cette question ne diffère pas de la suivante, devenue classique :

Si l'on a

$$a : b : c = x^2 - yz : y^2 - xz : z^2 - xy,$$

on a aussi

$$x : y : z = a^2 - bc : b^2 - ac : c^2 - ab.$$

Il suffit de supposer $z = c = 1$.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**2989.** On considère tous les triangles de même base BC et dont l'angle au sommet A est constant. Démontrer que les points de contact des côtés AB, AC avec les quatre cercles tritangents décrivent des limaçons de Pascal. (J. Déprez.)

**2990.** On considère les triangles ABC qui ont leur sommet A fixe et dont le côté BC se déplace sur une droite fixe avec la condition B — C = 90°.

Trouver les lieux décrits par le point de Lemoine et par ses associés. Examiner les *parties parasites* de ces lieux. (E. N. Barisien.)

**2991.** Démontrer que si les aires du cercle osculateur et de la conique osculatrice, en un point quelconque d'une courbe sont mesurées par un même nombre, celui-ci est proportionnel au cube de l'arc.

(E. Cesàro).

**2992.** Dans un triangle sphérique ABC, rectangle en A, on porte sur AC l'arc AD égal au complément de l'arc de grand cercle qui mesure l'angle B, et du point D comme pôle, on décrit l'arc de petit cercle BE rencontrant le prolongement de DA en E; l'arc AE mesure la surface du triangle proposé. (C. E. W.)

---

# DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE L'ADDITION DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES,

par M. G. Fontené, professeur au Collège Rollin, à Paris.

Je me propose d'établir les deux formules fondamentales de la théorie des fonctions hyperboliques, d'une manière élémentaire entièrement analogue à celle qui donne les formules fondamentales de la théorie des fonctions circulaires.

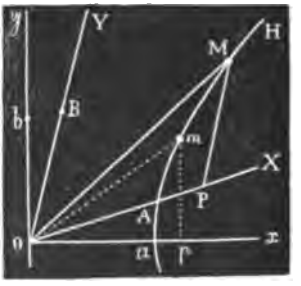
A cet effet, je montrerai que *l'on peut prendre, dans l'hyperbole équilatère comme dans le cercle, une origine quelconque pour les arguments.* Je me conformerai d'ailleurs le plus possible aux habitudes reçues.

1. *Secteurs hyperboliques équivalents.* Soit une hyperbole équilatère H, ayant pour équation par rapport aux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

et, en coordonnées obliques, par rapport à deux diamètres conjugués OX, OY faisant entre eux un angle $\theta$,

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{A^2} = 1,$$




avec la relation

$$A^2 \sin\theta = 1$$

qui traduit le second théorème d'Apollonius.

Appelons *points correspondants* les points $m\,(x, y)$, M (X, Y), dont les coordonnées, dans les deux systèmes, sont liées par les relations

$$x = \frac{X}{A}, \quad y = \frac{Y}{A}.$$

Si l'on considère un triangle $Om_1m_2$ ayant pour sommets l'origine et deux points $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ dans le premier système d'axes, et le triangle $OM_1M_2$ ayant pour sommets l'origine et deux points $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$, qui sont les correspondants des deux points ci-dessus dans le second système d'axes, les aires de ces deux triangles sont égales; on a, en effet,

$$\frac{1}{2}(X_1Y_2 - X_2Y_1)\sin\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{X_1}{A}\frac{Y_2}{A} - \frac{X_2}{A}\frac{Y_1}{A}\right) \times A^2 \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1y_2 - x_2y_1\right).$$

Deux secteurs hyperboliques dont les sommets sont l'origine et des points correspondants ont aussi des aires égales; car ils sont égaux à deux limites de sommes de triangles équivalents qui ont pour sommets l'origine et des points correspondants sur la courbe. Ainsi, par exemple, les secteurs O*am* et OAM sont équivalents.

**2.** ***Définition des fonctions hyperboliques*** Ch*u* *et* Sh*u*. Désignons par *u* le double de l'aire du secteur O*am* ou OAM, cette aire étant prise avec le signe commun des ordonnées de *m* et de M. Le ***cosinus hyperbolique*** et le ***sinus hyperbolique*** de *u*, en abrégé Ch*u* et Sh*u*, sont définis par les égalités

$$\mathrm{Ch}u = x = \frac{X}{A}, \quad \mathrm{Sh}u = y = \frac{Y}{A},$$

*x* et *y* étant les coordonnées du point *m* par rapport aux axes O*x*, O*y*, tandis que X et Y sont les coordonnées du point M par rapport aux axes OX, OY. Les expressions $\frac{X}{A}$ et $\frac{Y}{A}$ serviront uniquement pour le problème de l'addition des arguments.

**3.** ***Théorème de l'addition***. Soient deux arguments *v* et *u*. Prenons

$$2.\ \text{Aire}\ OaA = v, \quad 2.\ \text{Aire}\ OAM = u, \quad 2.\ \text{Aire}\ OaM = v + u;$$

pour l'argument *u*, nous emploierons les axes OX, OY, en observant que les deux angles *x* OX et *y* OY sont égaux (Les lignes tracées en pointillé sur la figure ne servent pas à la démonstration actuelle).

Ayant mené MP parallèle à OY, on a, en projetant sur un axe quelconque,

$$\text{proj. OM} = \text{proj. OP} + \text{proj. PM},$$

ou

$$\text{proj. OM} = \text{proj. OA} \times \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} + \text{proj. OB} \times \frac{\overline{PM}}{\overline{OB}},$$

c'est-à-dire

$$\text{proj. OM} = \text{proj. OA. Ch}\,u + \text{proj. OB. Sh}\,u.$$

Si la projection est faite sur O*x*, en observant que la projection de OB sur O*x* est égale à celle de OA sur O*y*, on a

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Ch}(v+u) = \mathrm{Ch}\,v.\ \mathrm{Ch}\,u + \mathrm{Sh}\,v.\ \mathrm{Sh}\,u.$$

Si la projection est faite sur O*y*, on a de même

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{Sh}(v+u) = \mathrm{Sh}\,v.\ \mathrm{Ch}\,u + \mathrm{Ch}\,v.\ \mathrm{Sh}\,u.$$

Les axes OX, OY sont analogues à ceux que l'on trace dans la démonstration classique de la formule qui donne cos $(a+b)$ et le fait relatif aux projections de OB joue le même rôle que la formule $\cos(v+\frac{1}{2}\pi) = -\sin v$.

4. Remarque. Si je n'avais craint de trop m'écarter du point de vue habituel, j'aurais défini les fonctions hyperboliques sur une hyperbole quelconque, rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, soit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'argument $u$ est alors le rapport de l'aire d'un secteur hyperbolique $Oam$ à l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués, et l'on a

$$\operatorname{Ch} u = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{Sh} u = \frac{y}{b},$$

$x$ et $y$ étant les coordonnées du point $m$. Les fonctions de $u$ ainsi définies dépendent uniquement de $u$, la considération des points correspondants montrant immédiatement que ces fonctions restent les mêmes quand on prend un autre système de diamètres conjugués, ou quand on change l'hyperbole employée. On a, en effet, pour deux triangles correspondants $Om_1m_2$, $OM_1M_2$, dont on compare les aires à celles des parallélogrammes mentionnés,

$$\frac{(x_1y_2 - x_2y_1)\sin\theta}{ab\sin\theta} = \frac{x_1}{a}\frac{y_2}{b} - \frac{x_2}{a}\frac{y_1}{b},$$

$$\frac{(X_1Y_2 - X_2Y_1)\sin\Theta}{AB\sin\Theta} = \frac{X_1}{A}\frac{Y_2}{B} - \frac{X_2}{A}\frac{Y_1}{B},$$

et ces deux rapports sont égaux si un point $m$ et un point M se correspondent par les formules

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{A}, \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{B}.$$

On a là une idée et un calcul très-nets.

## LES COURBES PARALLÈLES AUX ASTÉROÏDES SONT-ELLES TOUJOURS DES ASTÉROÏDES?

Note par M. GINO LORIA, Professeur à la faculté des Sciences de Gênes.

### I.

Une *astéroïde*(*) est la courbe enveloppée par une droite mobile $r$ sur laquelle deux droites fixes $a$, $b$ déterminent un segment dont la longueur $l$ est donnée. Si l'on désigne par $2\alpha$ l'angle formé par les deux droites données et si l'on prend pour axes de coordonnées les bissectrices de cet angle et de son supplément, on pourra représenter ces deux droites par les équations

$$y = \pm x \operatorname{tg} \alpha.$$

Soit

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0,$$

l'équation générale de la droite $r$, $p$ étant une fonction déterminée de $\varphi$. Pour trouver cette fonction, il suffit d'écrire que la distance entre les points $pa$ et $pb$ est égale à $l$. On trouve ainsi

$$p = \frac{l \cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

L'astéroïde considérée est donc l'enveloppe des droites représentées par l'équation :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}(\cos 2\varphi + \cos 2\alpha). \tag{1}$$

Différentiant cette équation, on trouve

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = \frac{l}{\sin 2\alpha} \sin 2\varphi; \tag{2}$$

résolvant les équations (1) et (2) par rapport à $x$, $y$, on obtient les équations

$$x = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}\left[\frac{3}{2}\cos \varphi - \frac{1}{2}\cos 3\varphi + \cos 2\alpha \cos \varphi\right], \tag{3}$$

$$y = \frac{l}{2 \sin 2\alpha}\left[-\frac{3}{2}\sin \varphi - \frac{1}{2}\sin 3\varphi + \cos 2\alpha \sin \varphi\right],$$

qui représentent la courbe dont il s'agit à l'aide du paramètre $\varphi$. Suppo-

(*) D'autres auteurs appelles la même courbe *astroïde* quand les droites $a$, $b$, sont rectangulaires. Au point de vue étymologique, les deux désignations se justifient également bien (P. M.).

sons, en particulier, que l'astéroïde soit *régulière*, c'est-à-dire que $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$; les équations précédentes deviennent :

$$x = \frac{l}{4}(3\cos\varphi - \cos 3\varphi), \quad y = \frac{-l}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi).$$

Différentiant les équations (3) et élevant les résultats au carré, on arrive à l'expression suivante pour la dérivée de l'arc $s$ :

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{l}{2\sin 2\alpha}(\cos 2\alpha - 3\cos 2\varphi)$$

d'où

$$(4) \qquad s = \frac{l}{2\sin 2\alpha}\left(\varphi\cos 2\alpha - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\right) + \textit{constante}.$$

L'équation (2) représente la normale à l'astéroïde ; en la différentiant, on trouve

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{2l}{\sin 2\alpha}\cos 2\varphi,$$

et le rayon de courbure R de l'astéroïde est donné par la formule

$$(5) \qquad R = \frac{l}{2\sin 2\alpha}(\cos 2\alpha - 3\cos 2\varphi).$$

Si on pose maintenant $2\varphi = \omega + \frac{1}{2}\pi$ et si l'on choisit d'une manière convenable l'origine des arcs et le sens positif sur la courbe, on voit la possibilité de remplacer les équations (4), (5) par les suivantes :

$$(6) \quad R = \frac{l}{2\sin 2\alpha}(3\sin\omega + \cos 2\alpha); \; s = \frac{l}{4\sin 2\alpha}(3\cos\omega - \omega\cos 2\alpha).$$

On peut remarquer en passant la relation

$$2\frac{ds}{d\omega} + R = 0.$$

En éliminant $\omega$ entre les équations (6), on aurait l'équation intrinsèque de l'astéroïde ; mais il vaut mieux conserver les deux équations ; si l'on fait $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$, elles deviennent simplement

$$(7) \qquad R = \frac{3l}{2}\sin\omega, \; s = \frac{3l}{4}\cos\omega.$$

En examinant les équations (6), on voit tout de suite qu'elles sont de la forme suivante

$$(8) \qquad R = k\sin\omega + a, \; s = \tfrac{1}{2}(k\cos\omega - a\omega);$$

cela fait naître la question de savoir si tout couple d'équations de cette

forme représente une astéroïde. Pour répondre à cette question, il suffit de chercher si les équations (8) peuvent toujours se réduire à la forme (6) par un choix convenable des constantes $l$, $\alpha$; pour cela, on doit avoir

$$k = \frac{3l}{2\sin 2\alpha}, \quad a = \frac{l}{2\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Or ces équations donnent

$$\cos 2\alpha = \frac{3a}{k}, \quad l = \frac{2\sqrt{k^2 - 9a^2}}{3};$$

par conséquent $\alpha$ et $l$ seront des quantités réelles seulement lorsque

$$|k| > 3|a|. \tag{9}$$

Nous pouvons en conclure que *les équations* (8) *représentent une astéroïde seulement si les constantes* $a$, $k$ *satisfont à la condition* (9). Dans le cas contraire, on n'a plus aucune construction réelle pour la courbe réelle représentée par les équations (8) (on peut l'appeler *para-astéroïde*); mais on peut en obtenir une tout à fait différente par les considérations suivantes.

## II.

On sait (et il est d'ailleurs très-facile de le prouver) que si R, $s$ sont le rayon de courbure et l'arc d'une courbe $\Gamma$, et $R_1$, $s_1$ les éléments analogues de sa développée $\Gamma_1$, on a les relations, $c$ étant une constante,

$$R_1 = R\frac{dR}{ds}, \quad s_1 = R + c.$$

Il s'ensuit que si $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont deux courbes ayant la même développée, on aura les relations suivantes :

$$R\frac{dR}{ds} = R'\frac{dR'}{ds'}, \quad R + c = R' + c';$$

si on fait $c - c' = a$, la seconde de ces relations devient $R' = R + a$ et la première peut s'écrire

$$\frac{ds'}{ds} = 1 + \frac{a}{R}.$$

Comme deux courbes ayant la même développée sont des courbes parallèles, nous pouvons résumer ces observations en disant que *les relations*

$$R' = R + a, \quad s' = s + a\int\frac{ds}{R} \tag{10}$$

*déterminent le rayon de courbure et l'arc d'une courbe parallèle à la courbe dont* R *et* s *sont le rayon de courbure et l'arc.*

Supposons, en particulier, qu'il s'agisse de l'astéroïde représentée par les équations (7). Toute courbe parallèle sera représentée par les équations

$$R = \frac{3l}{2}\sin\omega + a, \quad s = \frac{3l}{4}\cos\omega - \frac{a}{2}; \tag{11}$$

elle *est donc en général une para-astéroïde*; mais elle peut être une astéroïde; la condition pour cela est une conséquence de la condition (9); elle est précisément

$$|a| < \frac{l}{2}.$$

Donc *la courbe parallèle à une astéroïde régulière est une astéroïde seulement lorsque la distance constante entre les deux courbes est plus petite que la moitié du segment rectiligne générateur de la première.* Une proposition établie par M. Salmon(*) a par conséquent une portée moindre que l'on ne le croyait, ce qui d'ailleurs se reconnaît aussi en examinant attentivement le raisonnement par lequel il l'établit.

Ajoutons que la comparaison des équations (8) (11) montre que *toute para-astéroïde (en particulier toute astéroïde) peut être considérée comme la courbe parallèle à une astéroïde régulière.* Et comme toute courbe parallèle à une courbe Γ est elle-même parallèle à Γ, on peut dire que: *toutes les courbes parallèles aux astéroïdes ou aux para-astéroïdes sont des para-astéroïdes ou des astéroïdes.*

Gênes, 26 juillet 1900.

---

## NOTES SUR L'ASTROÏDE ET SES COURBES PARALLÈLES;

par M. Neuberg.

J'appellerai *astroïde* (Voir H. Brocard, *Notes de Bibliographie des courbes géométriques*), l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui se meut entre deux axes rectangulaires; on sait que cette enveloppe est une *hypocycloïde à quatre rebroussements.* Je propose la dénomination d'*astroïdales* pour les courbes parallèles à l'astroïde; comme une astroïde

(*) Salmon-Fiedler. *Anal. Geom. der höheren ebenen Curven* (Leipzig, 1873), p. 119-120 ou *Higher Plane Curves*, n° 117bis. Ex. 2, p. 99, de la 2de édition. Je crois que le même théorème a été proposé par Laguerre dans les *Nouvelles Annales* (question 1391) et démontré en 1883 par M. d'Ocagne.

a pour développée une autre astroïde, les astroïdales sont aussi des développantes d'astroïde. Les unes de ces courbes peuvent être considérées comme l'enveloppe d'une droite de longueur constante se mouvant entre deux droites fixes, les autres n'admettent pas ce mode de génération ; pour distinguer ces deux espèces, j'adopte les expressions de *astroïdales accourcies* (*tétracuspides* de Bellavitis), *astroïdales allongées*. Ces dernières courbes sont les para-astéroïdes de M. Gino Loria. La transition d'une espèce à l'autre est formée par des courbes qui ont été étudiées par M. d'Ocagne, dans son étude sur les coordonnées axiales (§ 50) (Voir aussi les N. A. M., 1884, 556).

Voici quelques développements sur ces courbes; je les emprunte en grande partie à un article très substantiel de M. Mannheim (N. A. M., 1878, p. 321).

Soit AB une droite de longueur constante $l$, dont les extrémités A, B se meuvent sur deux droites fixes $Ox$, $Oy$, faisant entre elles l'angle $2\alpha$ (Le lecteur est prié de faire la figure). Pour un déplacement infiniment petit de AB, on obtient le centre instantané de rotation C en élevant respectivement à $Ox$, $Oy$ les perpendiculaires AC, BC. Les quatre points O, A, C, B sont sur une circonférence Δ dont OC est un diamètre. Comme ce diamètre est égal à $l : \sin 2\alpha$, sa longueur est constante, quelle que soit la position de AB; par suite, pendant le déplacement continu de AB, le point C se meut sur une circonférence Δ′, de centre O.

Appelons P′ le plan $xOy$, supposé fixe, et appelons P un plan qui glisse sur P′, étant entraîné par la droite AB à laquelle il est invariablement lié. Pour définir le mouvement de ce plan P (*mouvement de la Hire*), on peut dire que la circonférence Δ du plan P roule sans glisser sur la circonférence Δ′ du plan P′. Dans ce mouvement, un point quelconque de Δ décrit sur P′ une droite passant par O; un point non situé sur Δ se meut sur une ellipse.

Soient M, N les extrémités du diamètre de Δ parallèle à AB; ces points parcourent deux diamètres rectangulaires $Ox'$, $Oy'$ de Δ′. La droite MN a donc pour enveloppe une *astroïde* U. La droite AB parallèle à MN et située à une distance constante de MN, enveloppe une courbe parallèle à U ou, d'après la terminologie proposée ci-dessus, une astroïdale. Il est clair que tout diamètre de Δ, pendant le mouvement de P sur P′, enveloppe une astroïde, et qu'une droite quelconque de P enveloppe une astroïdale.

Soit $\lambda$ une droite quelconque du plan P; pour plus de facilité, nous la supposons parallèle au diamètre MN de $\Delta$. Elle a pour enveloppe une astroïdale. Il y a lieu de distinguer trois cas :

1° La droite $\lambda$ coupe $\Delta$ en deux points réels $\alpha$, $\beta$; la longueur $\alpha\beta$ étant constante et les points $\alpha$, $\beta$ se déplaçant sur deux diamètres fixes de $\Delta'$, le mouvement de $\lambda$ peut être défini ainsi : une droite de longueur constante se meut entre deux droites fixes, non rectangulaires. L'enveloppe de $\alpha\beta$ est une *astroïdale accourcie*.

2° La droite $\lambda$ est extérieure à $\Delta$. Son mouvement n'est plus susceptible de la définition qui vient d'être donnée. L'enveloppe est maintenant une *astroïdale allongée*.

3° La droite $\lambda$ touche $\Delta$ au point L. Soit L' le point de $\Delta$ diamétralement opposé à L. Le mouvement de $\lambda$ est susceptible de la définition suivante : Une droite LL', de longueur constante, se meut entre deux axes rectangulaires; en L, on élève une perpendiculaire $\lambda$ à LL'. L'enveloppe de $\lambda$ est maintenant une *astroïdale de d'Ocagne* (Comparez Brocard, l. c. I, p. 104, au mot *cubocycloïde*).

---

## ×CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRAPÈZE

par M. Philippin, professeur à l'athénée de Bruges.

Dans le *Traité de Géométrie* de Rouché et de Comberousse, une construction élégante du centre de gravité d'un trapèze est déduite de considérations élémentaires très simples; comme la démonstration me paraît présenter une lacune, je reprendrai ici la question.

Soient $AB = a$, $DC = b$ les bases d'un trapèze ABCD, I et K leurs milieux, G, G', G'' les centres de gravité des aires du trapèze ABCD et des triangles ABD, BCD. Le point G est le centre des distances proportionnelles des points G', G'' affectés de coefficients proportionnels à ABD, BCD, ou ce qui revient au même, des coefficients $3a$, $3b$. Mais on peut remplacer le point G' par le système des trois points A, B, D ayant chacun un coefficient égal à $a$; de même le point G'' peut être remplacé par les points B, C, D affectés chacun du coefficient $b$. On a donc en somme à prendre le centre des distances proportionnelles des quatre points A, B, C, D affectés respectivement des coefficients

$$a, \quad a+b, \quad b, \quad a+b. \tag{1}$$

Si l'on fait le même raisonnement sur le trapèze décomposé en deux

triangles ABC, ACD par la diagonale AC, on trouve que G est le centre des distances proportionnelles des sommets A, B, C, D auxquels on donne les coefficients

$$a+b, \quad a, \quad a+b, \quad b. \tag{2}$$

On peut encore prendre pour coefficients les sommes des nombres correspondants (1) et (2), c'est-à-dire

$$2a+b, \quad 2a+b, \quad a+2b, \quad a+2b.$$

Or les points A et B affectés chacun du coefficient $2a+b$ peuvent être remplacés par le point I ayant pour coefficient $4a+2b$; de même, les points C et D affectés du coefficient $a+2b$ peuvent être remplacés par le point K ayant pour coefficient $2a+4b$. Il en résulta qu'on obtiendra le point G en divisant IK dans le rapport

$$\frac{IG}{GK}=\frac{2a+4b}{4a+2b}=\frac{\frac{1}{2}a+b}{a+\frac{1}{2}b}.$$

Par suite, si on prolonge BA de AE = DC, et DC de CF = AB, la droite EF coupera IK au point demandé G.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

Dr. **F. Amodeo**, libero docente di Geometria projettiva nella R. Universita di Napoli. **Aritmetica particolare e generale.** Napoli, L. Pierro. 1900 (XV-415 p. in 12). Prix : 3 fr.50.

*Sommaire.* 1. Opérations sur les nombres entiers. 2. Propriétés des nombres entiers. 3. Nombres entiers négatifs et positifs. 4. Nombres rationnels entiers ou fractionnaires. 5. Nombres réels, rationnels ou irrationnels, logarithmes. 6. Limites, génératrices, ensembles. 7. Proportions, moyennes, progressions. 8. Mesure des grandeurs. Applications usuelles de l'arithmétique. 9. Nombres complexes et quaternions. 10. Sommaire de logique mathématique.

Exposé systématique, dans un ordre strictement logique, des principes de l'arithmétique ; par suite, il n'est peut-être pas tout à fait approprié aux exigences de l'enseignement élémentaire ; mais il sera très utile aux professeurs qui désirent approfondir les bases de l'arithmétique. (D'après O. Tedone, dans le *Bollettino de Bibliografia* de G. Loria, 1900, t. III, pp. 28-29. Nous ne croyons pas justifiées deux ou trois critiques de détail de M. Tedone. P. M.)

---

**Cours d'Arithmétique élémentaire** par Ad. Mineur, professeur à l'Université libre de Bruxelles. Quatrième édition. Bruxelles. Stevens, 1899 (236 p. in 8°).

*Sommaire.* 1. Numération. 2. Calcul des nombres entiers. 3. Propriétés des nombres. 4. Fractions. 5. Puissances et racines. 6. Nombres incommensurables

(40 pages); approximations numériques (24 pages). 7. Arithmétique pratique. 8. Questions à résoudre (relatives à l'arithmologie; il y en a 180).

On peut recommander ce livre, aux professeurs, un peu moins, et aux élèves, un peu plus que celui de M. AMODEO.

---

**Éléments de la théorie des nombres**, par A. CAHEN, ancien élève de l'Ecole normale supérieure, professeur de mathématiques au collège Rollin. Paris, Gauthier-Villars, 1900 (VIII-403 pages in 8°). Prix : 12 francs.

*Sommaire* : 1. Rappel des théories élémentaires. 2. Compléments : indicateur, fractions continues. 3. Les congruences. 4. Restes quadratiques. Congruences du second ordre. 5. Les nombres incommensurables et les nombres algébriques. 6. Formes quadratiques binaires. Analyse indéterminée du second degré (115 pages). 7. Notes diverses, entre autres sur le nombre des nombres premiers et sur les nombres entiers algébriques. 8. Tables diverses.

Cet ouvrage comble vraiment une lacune dans la littérature mathématique française; il a sa place marquée dans la bibliothèque de tous ceux qui ne possèdent pas la *Zahlentheorie* de Dirichlet et Dedekind, ou le livre analogue de Bachmann. C'est une excellente introduction aux théories les plus élevées de l'arithmétrique supérieure. (D'après CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, dans la *Revue des questions scientifiques*, avril 1900, (2) XVII, pp. 601-604).

---

**M. Nasso.** Algebra elementare ad uso dei licei e degli istituti tecnici (1° biennio, Torino, tipografia e libreria salesiana, 1898 (cartonné de 426 p. in 12). Prix : 3 fr. 50.

*Sommaire. Première partie.* I. Nombres rationnels. 1. Nombres avec un signe. 2-5. Les opérations algébriques. 6. Fractions algébriques. 7-9. Équations à une et à deux inconnues. II. Les nombres irrationnels. 1-2. Classes de nombres et limites. 3. Radicaux. 4. Puissances. 5. Équations du second degré. 6. Équations exponentielles et logarithmes. III. Proportions et progressions. Logarithmes. *Appendice* : 1. Multiplication et division des polynomes. 2. Équations linéaires à plus de deux inconnues. 3. Équations se ramenant aux équations du premier et du second degré. 4. Applications des logarithmes aux questions d'intérêt. 5. Extraction de la racine carrée. *Seconde partie.* Exercices (160 pages, plus du tiers du livre).

Ce manuel d'algèbre élémentaire est presque toujours à la fois clair, simple et rigoureux; il contient de nombreuses notes historiques, des conseils pratiques pour diriger l'élève dans la résolution des problèmes, plus de 2000 exercices à résoudre et environ 400 exercices et problèmes résolus minutieusement (D'après R. BETTAZZI, dans le *Periodico di Matematica*, 1899, XIV, pp. 266-267).

---

F. MÜLLER. Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. Première partie : français-allemand. Leipzig, Teubner; Paris, Gauthier-Villars; 1900 (XII-132 p. gr. in 8 à 2 colonnes). Prix : 8 marcs.

Complément indispensable, pour les mathématiciens, des dictionnaires allemands-français et français-allemands. Voici un spécimen d'une demi-colonne du vocabulaire :

**Homocentre** (de deux courbes concentriques) [géom. an.] *geometrischer Mittelpunkt, Homocentrum.*

**Homocentrique** (sphères) *homocentrisch, mit gemeinsamem Mittelpunkt.*

**Homocyclique** (système, figure, complexe, point) *kreisverwandt, homocyklisch.*

**Homofocal, e** (ou confocal) (complexe, conique, courbe, cyclique, ellipsoïde, quadrique, quartique, surface, système) *homofokal, mit gemeinsamem Brennpunkt.*

**Homogène** (coordonnées, fonction, expression, dilatation, équation, forme, groupe, invariant) *homogen, gleichartig.*

**Homogénéité** (d'une forme, d'une équation) [alg. sup.] *Homogeneität, Gleichartigkeit.*

**Homographie** (ou déformation homographique) (Chasles 1837) [transf. géom.; géom. proj.] *Homographie, Collineation, Collinearität.* — **à deux axes**, *zweiachsige Homographie.* — **à une, deux, trois dimensions**, *Homographie von 1, 2, 3 Dimensionen.* — **sur une droite**, *Homographie auf einer Geraden.* **des espaces**, *Homographie der Räume.* — **des faisceaux de droites et de plans**, *Homographie der Geraden- und Ebenenbüschel.* — **involutive**, *involutorische Homographie.* — **des systèmes de points et de droites**, *Homographie der Punkt- und Geradensysteme.*

**Homographique** (ou collinéaire) (cône, division, élément, faisceaux, figure, invariant, surface, système, transformation) (Chasles 1837) *homographisch, allgemein collinear verwandt, projectivisch.*

Pour donner une idée de la richesse de la nomenclature mathématique, il suffit de faire remarquer avec le savant auteur, qu'il y a 119 expressions commençant par le mot *angle*, 89 par *axe*, 130 par *cercle*, 97 par *coordonnées*, 363 par *courbe*, 189 par *équation*, 220 par *fonction*, 190 par *ligne*, 156 par *nombre*, 220 par *point*, 242 par *surface*, 153 par *système*, 140 par *théorème*, etc.

---

**Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften**, Band II, Heft 4. Leipzig, Teubner (31 juillet) 1900 (pp. 401-560 gr. in 8). Prix : 4 marcs 80.

*Sommaire.* 1. Groupes continus de transformations, par L. Maurer et H. Burkhardt (401-436). 2. Équations différentielles avec conditions aux limites par M. Bôcher (437-463). 3. Théorie du potentiel, par H. Burkhardt et W. F. Meyer (464-503). 4. Équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites (504-560, inachevé), par A. Sommerfeld.

---

**Recueil de problèmes de géométrie analytique** à l'usage des classes de mathématiques spéciales. *Solutions des Problèmes donnés aux Concours d'admission à l'École Polytechnique de* 1860 à 1900, par Fr. Michel, Ancien élève de l'École Polytechnique, Inspecteur de l'Exploitation aux Chemins de fer du Nord. Paris, Gauthier Villars, 1900 (VI-240 pages in-8, avec 60 figures). Prix : 6 fr.

*Préface.* Ce recueil d'exercices de Géométrie analytique comprend les solutions

de toutes les questions qui ont été posées au Concours d'admission à l'École Polytechnique depuis 1860 jusqu'en 1900.

Ces questions étaient jusqu'à présent éparses dans divers journaux ou recueils mathématiques, et il m'a semblé utile, pour éviter des recherches souvent fastidieuses, de les réunir et de donner une solution de chacune d'elles.

J'ai suivi, dans chaque cas, la marche la plus simple, celle qui s'impose pour ainsi dire; mais, tout en conservant la plus large place à la méthode analytique, je me suis appuyé quelquefois sur des considérations géométriques qui évitent des longueurs de calcul et qui rendent la solution à la fois plus courte et plus élégante.

Les Notes bibliographiques qui suivent chaque section permettent au lecteur de se rapporter aux Ouvrages ou périodiques dans lesquels il pourra trouver d'autres solutions; enfin, j'ai porté en regard de chaque énoncé l'indication de la classification du Répertoire bibliographique, qu'il importe de vulgariser.

Ainsi conçu, cet Ouvrage me paraît devoir rendre de nombreux services aux candidats à l'École Polytechnique; il répond, d'ailleurs, à des *desiderata* formulés dans quelques publications mathématiques et notamment dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

---

**Cours théorique et pratique d'Algèbre financière** à l'usage des Ecoles supérieures de Commerce, des Etablissements d'enseignement moyen du premier degré et des personnes s'occupant d'opérations financières, par TH. KLOMPERS, Professeur de Mathématiques et de Physique à l'Athénée Royal d'Anvers. Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique (Prix De Keyn). Anvers, Impr. Ve Jos. Van Ishoven, 1900. Un vol. de XXXIX-364 pages in-8°. Prix : 5 fr.

TABLE DES MATIÈRES. *Première partie.* I. Intérêts simples. II. Intérêts composés. III. Escompte. IV. Annuités certaines et constantes. V. Problèmes généraux relatifs aux emprunts remboursables par annuités constantes. Usage des tables de l'amortissement. — VI. Rentes certaines et constantes. *a*) Rentes perpétuelles. Rentes sur l'État. *b*) Rentes temporaires ou limitées. *c*) Rentes amortissables à échéance déterminée. VII. Rentes certaines à terme variable. *a*) Rentes dont les termes varient en progression arithmétique. *b*) Rentes dont les termes varient en progression géométrique. VIII. Théorie de l'amortissement. *a*) Amortissement des emprunts publics et des rentes sur l'État. Caisse d'amortissement. *b*) Amortissement progressif. *c*) Emprunts par obligations. 1. Tableau d'amortissement. 2. Formules relatives aux emprunts par obligations. 3. Complication dans le service des titres. Emprunts avec lots. Emprunts-loteries à primes variables dont le service est fait par annuités constantes. (Emprunt communal de la ville d'Anvers, de 1887; emprunt de Bruxelles, de 1886; emprunt de Gand, de 1896; emprunt de Liége, de 1897). *d*) Amortissements des emprunts dont le service est fait par des rentes à termes variables (en progression arithmétique ou en progression géométrique).

*Deuxième Partie.* Opérations viagères. Institutions de Prévoyance. I. Rentes viagères sur une seule tête. II. Assurance en cas de décès. Opérations sur une seule

tête. Primes uniques des opérations fondamentales. III. Primes annuelles des opérations viagères sur une seule tête. IV. Assurances payables à une autre époque que la fin de l'année du décès. V. Calcul des chargements (des primes pures). VI. Notions sur la valeur des polices d'assurances et sur les réserves. VII. Institutions de prévoyance. *a*) Caisse de retraite sous la garantie de l'Etat belge. Calcul des tarifs. *b*) Sociétés de secours mutuels. Assurance contre la maladie.

*Complément.* Opérations viagères sur deux têtes. I. Rentes viagères. II. Assurances en cas de décès. III. Assurances conditionnelles ou de survie.

*Principes de la notation universelle* pour les opérations.

*Tables.* I. Conversion des jours en fractions décimales de l'année. II et III. Valeur de 1 franc, placé à intérêt composé après un certain nombre d'années ou de mois. IV. Valeur actuelle de 1 franc payable au bout d'un certain nombre d'années. V. Valeur acquise à la fin de chaque année par le placement annuel de 1 franc. VI Temps nécessaire pour doubler, tripler, etc. un capital. VII. Valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de 1 franc, payables à la fin de chaque année. VIII. Annuité par laquelle on peut amortir un capital de 1 franc au bout d'un certain nombre d'années. IX. Table des quantités servant au calcul des principales opérations viagères. X. Table de mortalité de Quetelet; table de morbidité de Kinkelin; table de commutation servant au calcul des tarifs de la Caisse de retraite.

La table des matières (avec traduction flamande) que nous venons de transcrire, nous dispense d'indiquer plus longuement les questions traitées par M Klompers, et de faire ressortir l'utilité de son ouvrage. En présence du développement extraordinaire que prend en Belgique l'enseignement des sciences commerciales, l'*Algèbre financière* vient à son heure. Ce manuel ne fait pas double emploi avec ceux qui sont déjà publiés; comme il est bien écrit et, parfaitement au courant de la science et des méthodes les plus usitées dans la pratique, il a déjà été accueilli avec faveur, même à l'étranger, et son succès s'affirmera davantage tous les jours.

---

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1900.

Solution par M. KLOMPERS, professeur à l'athénée d'Anvers.

### Première question de Géométrie analytique.

(Voir *Mathesis*, p. 217).

Désignons par $(x', y')$, $(-x'', -y'')$ les coordonnées des sommets A et C, mobiles sur le cercle principal. Les sommets B et D vérifient les équations des couples de tangentes à l'hyperbole issues de ces points :

$$(1)\qquad \left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}-1\right)^2,$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{yy'}{b'}-\frac{xx'}{a^2}-1\right)^2.$$

Si l'on retranche ces équations membre à membre, on obtient l'équation plus simple

$$\frac{xx'}{a^2} = \frac{yy'}{b^2}. \tag{2}$$

Par suite, pour trouver le lieu cherché, il suffit d'éliminer $x'$ et $y'$ entre les équations (1), (2) et l'égalité de condition

$$x'^2 + y'^2 = a^2. \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) donnent

$$x'^2 = \frac{a^6 y^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2}, \quad y'^2 = \frac{a^2 b^4 x^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$(a^2 y^2 - b^2 x^2)(c^2 x^2 - a^4) = 0.$$

L'équation $a^2 y^2 - b^2 x^2 = 0$ représente les asymptotes, solution qui ne convient pas; l'équation $c^2 x^2 - a^4 = 0$ représente les deux directrices.

---

## Seconde question de Géométrie analytique.

(Voir *Mathesis*, p. 219.)

La résultante des deux forces agissant sur $m$ doit être dirigée suivant la normale à la courbe, donc suivant la bissectrice de l'angle FMF', ce qui exige que les deux forces soient égales; par conséquent, si l'on fait $MF = r$, $MF' = r'$, la condition d'équilibre est

$$\frac{mm'}{r^2} = \frac{mm''}{r'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{r'}{r} = \sqrt{\frac{m''}{m'}} = k.$$

D'autre part, on a

$$r + r' = 2a;$$

par suite,

$$r = \frac{2a}{1+k}.$$

On peut donc obtenir le point cherché en coupant l'ellipse par la circonférence lieu des points tels que $r' : r = k$, ou bien par la circonférence de rayon $\frac{2a}{1+k}$ et de centre F. Pour qu'il y ait une solution, ce rayon

doit être compris entre $FA = a - c$ et $FA' = a + c$, de sorte que l'on doit avoir

$$a - c < r < a + c,$$

ou

$$(a - c)(1 + k) < 2a < (a + c)(1 + k)$$

ou enfin

$$\frac{a - c}{a + c} < k < \frac{a + c}{a - c}\ (*).$$

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### ×Question 1195.

(Voir *Mathesis* (2), t. VIII, p. 264.)

***Trouver les projections d'un triangle rectangle*** ABC, ***connaissant les projections de la bissectrice*** BD ***qui est ligne de plus grande pente et sachant que*** C ***est dans le plan horizontal.*** (Soons.)

***Solution par*** MM. Emmerich, Werpin et Deprez. Désignons les projections de divers points sur le plan horizontal et vertical par les indices 1 et 2 respectivement, et soient $E_1$, $F_1$ les points de rencontre de BA et BD avec le plan horizontal. Le point $F_2$ étant à l'intersection de $B_2D_2$ et de la ligne de terre, le point $F_1$ est sur $B_1D_1$ et sur la perpendiculaire $F_2F_1$ à la ligne de terre. Par rabattement, on connaît aussi les vraies longueurs $F_1B$, $F_1D$.

Comme $BF_1$ est perpendiculaire à $CE_1$ et comme l'angle $CBF_1 = E_1BF_1$ le triangle $BCE_1$ est isoscèle. On distinguera maintenant les trois cas suivant que l'angle droit est en A, B ou C respectivement. Dans le second cas, on a $F_1C = F_1B$. Dans les deux autres cas, on conclut des triangles semblables $CF_1D$, $BF_1C$ que $\overline{F_1C}^2 = F_1B \cdot F_1D$ ce qui détermine également $F_1C = F_1E$. Mais $CE_1$ étant perpendiculaire à $B_1F_1$ on connaît ainsi les points $C, E_1$ ; $A_1$ est sur $CD_1$ et $B_1E_1$ ; $C_2$ se détermine par la perpendiculaire $CC_2$ à l'axe ; $A_2$ se trouve à l'intersection de $C_2D_2$ et de la perpendiculaire $A_1A_2$ à l'axe.

---

(*) M. Ploumen supposait $m'' > m'$ ou $k > 1$, en établissant la condition de possibilité du problème. (J. N.)

## Question 1954.

Voir (*Mathesis*, (2), t. X, p. 32).

*La somme des carrés des coefficients des différentes puissances de $x$ dans le développement de*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^m$$

*est le coefficient de $x^{km}$ (coefficient maximum) dans le développement de*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^{2m}.$$ (A. Boutin).

*Solution par* MM. Soons et Emmerich. Le développement de

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^m$$

produit de $m$ facteurs polynomes, peut s'obtenir en faisant, de toutes les manières possibles, un produit de $m$ termes pris dans chacun des facteurs polynomes. Si l'on a obtenu un résultat $x^r$ en prenant $x^\alpha$ dans le premier polynome, $x^\beta$ dans le deuxième etc., en prenant dans le premier polynome $x^{k-\alpha}$, dans le deuxième $x^{k-\beta}$, et ainsi de suite, le second résultat sera $x^{mk-r}$.

Dans le développement total, les termes à égale distance des extrêmes ont donc le même coefficient. Comme la puissance $2m$ est le carré de la puissance $m$, le coefficient de $x^{km}$ contient le carré du coefficient du milieu et les doubles produits des coefficients à égale distance des extrêmes, c.-à.-d. les sommes des carrés de ces coefficients.

---

## Question 1960.

(Voir *Mathesis* (2), t. X, p. 56).

*Etant donnée la chaînette*

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

*on mène l'ordonnée* MP *d'un point quelconque de la courbe. Du pied* P *comme centre avec le rayon a on décrit une circonférence. On sait que la tangente en* M *à la chaînette touche cette circonférence. Quelle est l'enveloppe de la seconde tangente menée de* M *à la circonférence?*

(H. Brocard).

*Plus généralement, en chaque point* M *d'une courbe donnée* $\Sigma$ *on mène la symétrique $t'$ de la tangente $t$ à* $\Sigma$ *par rapport à l'ordonnée de* M; *cette droite enveloppe une nouvelle courbe* $\Sigma'$. *Comment construit-on le point de contact de $t'$ avec* $\Sigma'$? (J. N.).

*Solution par* M. G. Gérard (Liége). Soient, dans la première partie de la question, (C) la chaînette donnée, MP. MT et MN respectivement l'ordonnée, la tangente et la normale, arrêtées à l'axe $xx'$ de la courbe. Imaginons une parabole $(\pi)$ ayant son foyer en M et touchant l'axe $Ox$ au point N; si Q est le symétrique de M par rapport à l'axe $xx'$, QT est la directrice et P appartient à la tangente au sommet; appelons $2p$ le paramètre de la parabole; les distances du point P aux droites MT, QT sont visiblement égales et comme elles ont pour valeurs respectivement $a$ et $\frac{p}{2}$, on a constamment $p = 2a$. Ainsi, la grandeur de la parabole $(\pi)$ ne dépend pas du point M que l'on considère et la chaînette (C) peut être engendrée par le foyer de cette parabole, roulant sans glisser(*) sur l'axe $xx'$.

Ce théorème, bien connu du reste, étant rappelé, soit MT' la droite indiquée dans l'énoncé et dont on propose de chercher l'enveloppe. Il est visible, d'abord, que cette droite est parallèle à TQ et, si on la considère dans la parabole $(\pi)$, c'est la parallèle menée par le foyer M à la directrice; elle est donc invariablement liée à la parabole et entraînée par celle ci dans son mouvement. Comme le déplacement élémentaire de la figure est une rotation instantanée autour du point N, la droite MT' touche son enveloppe au pied R de la perpendiculaire abaissée de N; puisque les droites MT', TQ sont parallèles et que l'angle TQN, égal à TMN, est un angle droit, cette perpendiculaire n'est autre que la droite NQ; NQ est donc une normale commune aux courbes enveloppes des droites MT', TQ. Or, on a constamment $RQ = p = 2a$, et le lieu de Q est évidemment la chaînette (C'), symétrique de (C) par rapport à l'axe $xx'$. On en conclut que l'enveloppe cherchée est une courbe parallèle à cette chaînette, à la distance $2a$.

*Cas général.* Soient, avec les notations indiquées, S et R les points de rencontre des couples de droites $t$ et $t_1$, $t'$ et $t'_1$ correspondant à deux points M et $M_1$ de la courbe $\Sigma$, $\omega$ le point d'intersection des normales en ces points.

Si l'on désigne par $\alpha$ et $\alpha_1$ les inclinaisons respectives des tangentes $t$ et $t_1$ sur l'axe des $x$, on a évidemment

$$\alpha - \alpha_1 = M\omega M_1 = MRM_1;$$

(*) La démonstration nous paraît présenter ici une lacune. (J. N.)

les deux circonférences $SM\omega M_1$ et $MRM_1$ sont donc symétriquement placées par rapport à la corde $MM_1$; si l'on passe à la limite, la première se trouve décrite sur le rayon de courbure $M\omega$ comme diamètre. On en conclut la construction cherchée : prendre le symétrique $\omega'$ du centre de courbure $\omega$ par rapport au point de la courbe M, et projeter ce point en R sur la droite $t'$.

Le point R peut encore être envisagé d'une autre manière. Les angles SMR, $SM_1R$ ont leurs bissectrices parallèles aux axes coordonnés; par suite, les quatre points S, R, M et $M_1$ appartiennent à une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à ces axes et dont SR est un diamètre; cette hyperbole passe par l'orthocentre H du triangle $MSM_1$, lequel se trouve sur la circonférence $MRM_1$. Quand $M_1$ vient coïncider avec M sur la courbe $\Sigma$, le point H, qui est toujours sur la perpendiculaire abaissée de S sur la corde, arrive en $\omega'$. On peut donc énoncer la propriété suivante : *si l'on construit l'hyperbole équilatère tangente en* M *à la courbe* $\Sigma$, *passant par* $\omega'$ *et ayant ses asymptotes parallèles aux axes, la droite* $t'$ *touche son enveloppe sur cette hyperbole, au point diamétralement opposé à* M.

*Solution par* M. Fairon. 1° Soient X, Y les coordonnées courantes, et $x, y$ celles d'un point M mobile sur une courbe donnée $\Sigma$. La symétrique $t'$, par rapport à l'ordonnée MP, de la tangente $t$ au point M de $\Sigma$ a pour équation

$$Y - y = -y'(X - x). \tag{1}$$

Le point de contact de $t'$ avec son enveloppe est défini par l'équation (1) et par la dérivée de cette équation par rapport à $x$, savoir :

$$-y' = -y''(X - x) + y',$$

d'où

$$X - x = \frac{2y'}{y''}. \tag{2}$$

Soient $\alpha$ l'angle de $t$ avec l'axe $Ox$, R le rayon de courbure $M\omega$ au point M de $\Sigma$; nous aurons

$$\operatorname{tg}\alpha = y', \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{1}{y''\cos^3\alpha}.$$

La formule (2) pourra donc s'écrire

$$X - x = 2R\sin\alpha\cos^2\alpha\ (*), \text{ ou } \frac{X-x}{\cos\alpha} = R\sin 2\alpha. \tag{3}$$

---

(*) Nous modifions ici les conclusions que l'auteur tire de cette formule, pour en déduire l'élégante construction de M. Gérard. (J. N.)

Appelons M′ le point de contact de $t'$ avec son enveloppe; alors $X - x$ est la projection de M′M sur $Ox$ et, par suite, $\frac{X-x}{\cos\alpha}$ est égal à MM′. Si l'on prolonge ωM de $M\omega' = \omega M$, l'angle $M'M\omega' = \frac{1}{2}\pi - 2\alpha$; la relation (3) montre donc que M′ est la projection de ω′ sur $t'$.

Lorsqu'il s'agit de la chaînette, ω′ est le point de rencontre de la normale en M avec l'axe $Ox$.

2° Pour trouver l'équation de l'enveloppe de $t'$, il suffit d'éliminer $x$ et $y$ entre les équations (1), (2) et

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{3}$$

Comme on a

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

les formules (1) et (2) prennent la forme

$$Y - y = -\frac{2y'^2}{y''} = -a\frac{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}, \tag{4}$$

$$X - x = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}; \tag{5}$$

si on remplace $y$ par la valeur (3), on peut les considérer comme les équations paramétriques de la courbe, le paramètre étant $x$. D'ailleurs l'élimination de $x$ entre (4) et (5) ne présente pas de difficulté.

*Solution par* M. V. Retali. 1° En chaque point M d'une courbe donnée Σ menons la droite $t'$ conjuguée harmonique de la tangente $t$ à Σ, par rapport aux droites MI, MJ qui vont à deux points fixes I, J et cherchons le point de contact de $t'$ avec son enveloppe.

Si I, J sont les points circulaires du plan de la courbe donnée, le point de contact cherché est le centre de courbure de Σ en M; dans le cas général, il est donc le pôle de la droite IJ par rapport à la conique passant par les deux points I, J et ayant un contact du deuxième ordre avec Σ au point M. Lorsque I, J sont les points à l'infini des axes coordonnés rectangulaires, le point cherché est donc le centre de l'hyperbole équilatère ayant un contact du second ordre avec Σ en M et ayant ses asymptotes parallèles aux axes coordonnés.

2° Si $y = f(x)$ est l'équation de $\Sigma$, on trouve aisément que les coordonnées $\xi$, $\eta$ du centre de l'hyperbole équilatère, correspondant au point $(x, y)$ de $\Sigma$, sont

$$\xi = x + \frac{2\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \eta = y - \frac{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

et éliminant $x$ et $y$ entre ces deux équations et $y = f(x)$, on obtient celle du lieu cherché. Dans le cas particulier de la chaînette

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{y^2 - a^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{a^2},$$

$$x = a \log \frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

et par conséquent

$$\xi = a \log \frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a} + \frac{2a}{y}\sqrt{y^2 - a^2}, \quad \eta = \frac{2a^2 - y^2}{y},$$

que l'on peut regarder comme équations paramétriques du lieu cherché. L'élimination de $y$, que l'on peut d'ailleurs faire sans peine, conduit à une équation assez compliquée.

Note. La considération de la parabole $(\pi)$ n'est pas nécessaire pour établir la nature de l'enveloppe de la droite $t'$ dans le cas de la chaînette. Q étant le symétrique de M par rapport à $Ox$, le lieu de Q est une chaînette (C'), tangente à QT et normale à QN. Or, $t'$ est parallèle à QT, et la distance des droites TQ et $t'$ est égale à $2a$. Donc $t'$ enveloppe une courbe parallèle à la chaînette (C'); la normale à cette enveloppe étant QN, le point de contact de $t'$ est sur QN, ou est la projection de N sur $t'$. (J. N.)

---

***Question 1981.**

(Voir *Mathesis*, (2) t. X, p. 215.)

*Soient* J, $J_a$, $J_b$, $J_c$ *les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle* ABC, *et* J', J''; $J'_a$, $J''_a$;... *les projections de ces points sur la base* BC *et sur la médiatrice de* BC. *Si la base* BC *est fixe et si l'angle opposé* A *est constant, les cercles* J'J''A, $J'_aJ''_aA$, *passent par un même point fixe; les cercles* $J'_bJ''_bA$, $J'_cJ''_cA$ *passent par un second point fixe.* (J. Deprez)

*Solution par* M. EMMERICH. Soient D, E les points de rencontre de AJ et BC, et de JJ' et $AJ'_a$. En projetant le groupe harmonique A. D, J, $J_a$ de $J'_a$ sur JJ' on voit que JJ' = JE. Comme J' et $J'_a$ sont équidistants du milieu M de BC, le point J'' est situé sur $AJ'_a$. Si l'on projette les quatre points de J' sur $J_aJ'_a$ on trouve que les points A, J', $J''_a$ sont en ligne droite.

Supposons que le cercle J'J''A coupe la médiatrice de BC en P. On a *angle* $APJ''_a = J''J'J''_a = AJ'_aJ''_a$, ce qui montre que les cercles J'J''A, $J'_aJ''_a$A se coupent en P. Comme *angle* $J''J''_aJ' = J''J''_aJ'_a = J''AP = J''J'P$, J'P touche le cercle $J''J''_aJ'$; d'où $\overline{PJ'}^2 = PJ''.PJ''_a = \overline{PF}^2 - \overline{J''F}^2$, F désignant le milieu de $J''J''_a$ et de $JJ_a$. Mais $\overline{PJ'}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{MJ'}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{JF}^2 - \overline{J''F}^2$; donc $\overline{PF}^2 - \overline{PM}^2 = JF^2 = \overline{BF}^2 =$ const. comme F est le milieu de l'arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC. Le point P est fixe. Je dis que P est le milieu de MF', si F' désigne le second point de rencontre de la médiatrice et du cercle circonscrit au triangle ABC. Cela résulte de $\overline{PF}^2 - \overline{PM}^2 = MF(PF + PM)$, $BF^2 = MF(PF + PF')$.

La seconde partie du théorème se démontre d'une manière analogue. Après avoir fait voir que les droites $J'_bJ''_c$, $J'_cJ'_b$ passent par A on montre que les cercles $J'_bJ''_b$A, $J'_cJ''_c$A se coupent en un point Q de la médiatrice de BC, et que ce point est le milieu de MF.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**968**. Si $p$ est un nombre premier, le seul carré entier dont la différence avec $p$ soit un carré entier est $\frac{1}{4}(p+1)^2$. (*J. de Vuibert.*)

**969**. On a

$$\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)} + \frac{a+y}{y(y-x)(y-z)} + \frac{a-z}{z(z-x)(z-y)} = \frac{a}{xyz}.$$

(*J. de Vuibert.*)

**970**. On fait tourner une ellipse autour de l'un de ses foyers; dans chacune de ces positions on lui mène une tangente parallèle à une direction donnée. Trouver en coordonnées polaires le lieu du point de contact (*Examen oral à l'École Polytechnique de Paris*, 1898).

Prenons pour pôle le foyer F fixe et pour axe polaire la parallèle $Fx$ menée par F à la direction donnée. Soient M le point de contact d'une tangente parallèle à $Fx$, P et P' les projections des foyers F et F' sur cette tangente.

Posons $MF = r$, $MF' = r'$ *angle* $MFx = \theta = PMF' = P'MF'$. On sait que $PF.\ P'F' = b^2$. Or $PF = r \sin\theta$, $PF' = r' \sin\theta$. Donc $rr' \sin^2\theta = b^2$, et comme $r + r' = 2a$, $r' = 2a - r$, l'équation polaire du lieu est donc $r\ (2a - r) \sin\theta = b^2$. L'équation cartésienne de la courbe est du sixième degré.

(E. N. Barisien.)

**971.** Soient $pq$, $p'q'$ deux cordes variables d'un même cercle. On suppose que $pq$ passe par un point fixe $a$, et que les droites $pp'$, $qq'$ sont parallèles à une même droite donnée. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point $a$ sur $p'q'$.

(*École normale de Fontenay-aux-Roses*).

Soit AB le diamètre du cercle donné, perpendiculaire à la dixection $pp'$; ce diamètre est fixe. Les cordes $pq$, $p'q'$ étant symétriques par rapport à AB, $p'q'$ passe par le symétrique $a'$ de $a$ par rapport à AB. Le lieu demandé est donc la circonférence décrite sur $aa'$ comme d amètre.

**972.** Construire un triangle ABC, connaissant le côté $BC = a$, la somme $m$ des longueurs des médianes issues des sommets B et C, et une hauteur $h$. (*École normale de Saint-Cloud.*)

1° Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Si l'on connaît la hauteur issue de A, on placera le côté BC; après avoir mené une parallèle à BC à la distance $\frac{1}{3}h$, on cherchera sur cette parallèle un point G dont la somme des distances aux points B et $C = \frac{2}{3}m$.

2° Si $h$ est la hauteur issue de C, la parallèle à AB par G rencontre BC en un point I qui résulte de $BI = \frac{1}{3}BC$; comme sa distance à $AB = \frac{h}{3}$, la droite GI s'obtient en menant par I une tangente au cercle de centre B et de rayon $\frac{1}{3}h$. Il reste à trouver sur cette droite le point dont la somme des distances aux points B et $C = \frac{2}{3}m$.

**973.** $n$ étant un nombre entier, trouver : 1° pour quelles valeurs de $n$ la fraction $\frac{n+8}{2n-5}$ est un nombre entier; 2° pour quelles valeurs de $n$ cette fraction est irréductible; 3° si la fraction n'est pas irréductible, quels peuvent être les facteurs communs aux deux termes de la fraction. (*Ecole normale de Saint-Cloud*).

1° $2n - 5$ étant impair, il suffit d'examiner la fraction

$$\frac{2n+16}{2n-5} = 1 + \frac{21}{2n-5}.$$

Pour que cette expression soit entière, il faut que $2n - 5$ soit égal à l'un des nombres 1, 3, 7, 21, ou $n$ égal à 3, 4, 6, 13.

2° et 3°. Les facteurs communs à $2n + 16$ et $2n - 5$ sont communs à leur différence 21 ; donc les seuls facteurs communs à $n + 8$ et $2n - 5$ peuvent être 3 et 7. Pour que la fraction proposée soit irréductible, il faut et il suffit que $n + 8$ soit premier avec 21 ; on pourrait encore dire que $n + 2$ ne doit pas être divisible par 3 ni $n + 1$ par 7.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1293.** Soient A un point quelconque d'une ellipse, B et C les pieds des deux autres normales abaissées du centre de courbure relatif à A, D un des points de l'ellipse, conjugués de A. Montrer que la distance du centre de l'ellipse à la normale en D est dans un rapport constant avec la distance du point A à la droite BC. (E. N. Barisien.)

×**1294.** Chercher quelques propriétés particulières du triangle ABC dont la médiane issue de A est moyenne proportionnelle entre les côtés AB et AC. (J. N.)

×**1295.** Résoudre par des formules sans dénominateurs les équations

$$\frac{y}{x-1} = \frac{b-b'}{a-a'} = \frac{a+a'}{b+b'} = \frac{x+1}{y},$$

où l'on a

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 = 1.$$ (G. Fontené.)

**1296.** On a, dans un sac, $nk$ boules formant $n$ séries numérotées de 1 à $k$ ; on distribue au hasard, $k$ boules à chacune de $n$ personnes ; quelle est la probabilité pour que chacune des $n$ personnes ait en mains la série complète des $k$ numéros? (A. Boutin).

**Rectifications.** Page 230, lire ligne 13 en remontant $(\Sigma A_3)^2$ ; l. 7 en rem., $\Sigma a^2(b'^2c''^2 - b''^2c'^2) = \Delta_1$ ; l. 5 et 6 en rem., $A'\alpha'' + A''\alpha' =$ ; l. 3 en rem., $A'\alpha''$.

## FORMULE DE STIRLING.

Des inégalités logarithmiques démontrées antérieurement (*Mathesis*, pp. 222-224) et de la formule de Wallis, on déduit la formule de Stirling (1696-1770) :

$$1.2.3...n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}, \quad 0<\theta<1$$

par un procédé dû à Glaisher (*Quarterly Journal of Mathematics*, 1877, XV, pp. 57-63) et à Cayley (Ib., pp. 63-64), exposé par nous avec plus de rigueur (N. C. M., 1879, V, pp. 44-51), simplifié par E. Cesàro (Ib., 1880. VI, pp. 354-357, *Algebra*, 1894, pp. 270-271) et par Rouché (C. R., 1890, CX, pp. 513-515).

1. *Formule de Stirling, la constante n'étant pas déterminée.* Posons

$$\varphi(n) = \frac{1.2.3...n}{n^{n+\frac{1}{2}}}e^n, \quad \varphi(n+1) = \frac{1.2.3...(n+1)}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}e^{n+1}, \quad \varphi(n+2) = \text{etc.}$$

On trouve immédiatement

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

et, en prenant les logarithmes népériens,

$$\log\varphi(n) - \log\varphi(n+1) = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

Des inégalités logarithmiques

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

on déduit

$$0 < -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Par suite, on a, d'après (1),

$$\log\varphi(n) - \log\varphi(n+1) > 0, \quad (2)$$

$$\log\varphi(n) - \log\varphi(n+1) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

c'est-à-dire

$$\log \varphi(n) - \frac{1}{12n} < \log \varphi(n+1) - \frac{1}{12(n+1)}. \qquad (3)$$

En passant des logarithmes aux nombres, les inégalités (2) et (3) deviennent

$$\varphi(n) > \varphi(n+1),$$

$$\varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}} < \varphi(n+1) e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

La fonction $\varphi(n)$, qui est positive et décroissante, pour $n$ indéfiniment croissant, tend vers une limite C, inférieure à $\varphi(n)$.

La fonction $\varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}}$, qui est positive et croissante, pour $n$ indéfiniment croissant tend vers la même limite C, supérieure d'ailleurs à $\varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}}$. On a donc

$$\varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}} < C < \varphi(n),$$

ou

$$C < \varphi(n) < C e^{\frac{1}{12n}}.$$

Donc enfin, $\theta$ étant compris entre 0 et 1,

$$\frac{1.2.3...n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^n = \varphi(n) = C e^{\frac{\theta}{12n}},$$

$$1.2.3...n = C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}. \qquad (4)$$

2. *Détermination de la constante.* En changeant $n$ en $2n$, dans la formule (4), il vient

$$1.2.3...2n = C(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n+\frac{\theta'}{24n}},$$

$\theta'$ étant encore compris entre 0 et 1. Divisant par cette dernière relation la relation (4) dont les deux membres ont été élevés au carré, il vient

$$\frac{(1.2.3...n)^2}{1.2.3...(2n)} = C \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}\sqrt{2}} e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}}.$$

On tire de là

$$C = \frac{2.4.6...2n}{1.3.5...(2n-1)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} e^{\frac{\theta'-4\theta}{24n}},$$

$$C^2 = \frac{2.2.4.4...2n.2n}{1.3.3.5...(2n-1).2n} \cdot 4e^{\frac{\theta'-4\theta}{12n}}.$$

Faisant croître $n$ indéfiniment, on trouve à la limite, d'après la formule de Wallis,

$$C^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi, \quad C = \sqrt{2\pi}.$$

On a donc enfin

$$1.2.3.... n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$$

comme nous l'avions annoncé. (P. M.).

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

×**17**. *Paradoxe mathématique*. Si l'on élimine $\theta$ entre les deux équations

$$y = (x-a)\operatorname{tg}\theta, \quad y = -(x-a)\cot\theta, \tag{1}$$

en multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$y^2 + (x-a)^2 = 0. \tag{2}$$

Mais si l'on écrit les équations (1) ainsi :

$$x\sin\theta - y\cos\theta = a\sin\theta, \quad x\cos\theta + y\sin\theta = a\cos\theta, \tag{3}$$

et qu'on en fasse la somme des carrés, on obtient

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{4}$$

Expliquer le paradoxe. (E. N. Barisien.)

Les équations (1) représentent, lorsque $\theta$ varie, deux droites rectangulaires mobiles autour du point $(a, 0)$. Si l'on reste dans le domaine réel, le lieu de l'intersection de ces droites se réduit au point $(a, 0)$. Mais chacune des droites isotropes (de coefficient angulaire $\pm\sqrt{-1}$) menées par le point $(a, 0)$ étant perpendiculaire à elle-même, on peut aussi dire que le lieu considéré se compose de l'ensemble de ces droites, représenté par l'équation (2).

Si l'on élève les équations (3) au carré et qu'on les ajoute ensuite membre à membre, on combine deux droites parallèles $m$ et $n$, menées par les points $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, avec deux droites $m'$ et $n'$ menées par les mêmes points dans des directions respectivement perpendiculaires aux droites $m$ et $n$. Les droites $m$ et $n'$, de même que les droites $n$ et $m'$, se coupent sur le cercle (4). (J. N.)

**18**. *Sur les triangles trihomologiques*. A l'égard de l'article de M. Ripert sur les triangles trihomologiques (*Mathesis*, (2) X, p. 226), je remarque que tous les centres d'homologie, appartenant à un groupe de triangles trihomologiques deux à deux, inscrits à une même conique,

sont situés sur une même droite, et que les tangentes à la conique menées par les sommets de chaque triangle du groupe coupent les côtés opposés sur cette droite.

Il est évident que les centres d'homologie $S_1$, $S_2$, $S_3$ de deux triangles trihomologiques $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ forment un triangle trihomologique à $A_1A_2A_3$, les centres d'homologie étant $B_1$, $B_2$, $B_3$, et aussi à $B_1B_2B_3$, les centres étant $A_1$, $A_2$, $A_3$. Quand les triangles A et B sont inscrits à une même conique O, M. Ripert a trouvé que les coordonnées de $S_1$, $S_2$, $S_3$ par rapport à A sont

$$S_1\,(\alpha_1\lambda_1,\ \alpha_2\lambda_3,\ \alpha_3\lambda_2),\quad S_2\,(\alpha_1\lambda_3,\ \alpha_2\lambda_2,\ \alpha_3\lambda_1),\quad S_3\,(\alpha_1\lambda_2,\ \alpha_2\lambda_1,\ \alpha_3\lambda_3),$$

avec la condition $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. On déduit de là facilement au moyen de ces coordonnées que $S_1$, $S_2$, $S_3$ se trouvent sur une droite. En se servant du théorème B de mon article (***Mathesis*** (2) X, p. 154) et en remplaçant A, B, C, $S_1$, $S_2$, $S_3$, A′, B′, C′, Σ de ce théorème par $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $S_1$, $S_2$, $S_3$, O respectivement, on voit que les tangentes à O menées par les sommets de A et de B coupent les côtés opposés sur la droite $S_1S_2S_3$. Cette droite est évidemment la même pour tout couple du groupe de triangles inscrits à O, trihomologiques deux à deux, dont A et B font partie. (J. A. Third.)

***Autrement.*** Les couples $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ appartiennent à une involution $(S_1)$ sur la conique. Dans cette involution, aux éléments doubles $\alpha_1$, $\alpha_2$ de la projectivité cyclique $(A_1A_2A_3)$ correspondent les éléments doubles $\beta_1$, $\beta_2$ de la projectivité cyclique $(B_1B_2B_3)$. Les sens correspondants $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ permettent de distinguer les couples de points conjugués $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, de l'involution $(S_1)$. De même, les couples $A_1B_2$, $A_2B_3$, $A_3B_1$ appartiennent à l'involution $(S_2)$ sur la conique et les couples $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ sont conjugués dans cette involution, car les sens $B_2B_3B_1$ et $B_1B_2B_3$ sont identiques. Les involutions $(S_1)$ et $(S_2)$ étant distinctes, les couples $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ sont identiques; par suite, $\alpha_1\equiv\beta_2$, $\beta_1\equiv\alpha_2$. Ainsi les ternes $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ appartiennent à une même projectivité cyclique dont les éléments doubles $\alpha_1$, $\alpha_2$ sont situés sur la droite $S_1S_2$. Ce qui démontre le théorème de M. Third.

Dans la projectivité $(A_1B_3,\ A_3B_1,\ A_2B_2)$ les éléments imaginaires conjugués $\alpha_1$, $\alpha_2$ sont correspondants; par suite, les ponctuelles sont involutives et les droites $A_1B_2$, $A_2B_1$, $A_3B_2$ concourent en un point $S_3$ de la droite $\alpha_1\alpha_2$ ou $S_1S_2$. Ainsi les points $S_1$, $S_2$, $S_3$ sont en ligne droite. (Servais.)

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 760.

(Voir *Mathesis* (2) II, 80 et 125.)

I. *La série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \quad \text{où} \quad \sqrt[n]{u_n} = 1 - k(\log n : n)$$

*est convergente si $k$ est supérieur à* 1, *divergente si $k$ est inférieur ou égal à* 1 (*Les logarithmes sont supposés népériens*).

II. *Si $\alpha_n$ tend vers zéro avec* $(1 : n)$, *la série*

$$\Sigma(1 - \alpha_n)^n,$$

*sera convergente si le rapport* $(n\,\alpha_n : \log n)$ *tend vers une limite supérieure à* 1, *quand $n$ est de plus en plus grand, divergente si ce rapport tend vers une limite inférieure à* 1, *ou s'il tend vers l'unité, en lui restant sans cesse inférieur.* (V. Jamet.)

*Seconde solution par* M. A. G. Joachimescu. Remarquons d'abord que les deux questions peuvent être ramenées à une seule. En effet, soit

$$k(\log n : n) = \alpha_n.$$

$\alpha_n$ tend vers zéro avec $(1 : n)$, car

$$\lim \alpha_n = \lim \frac{k \log n}{n} = 0.$$

Donc

$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - \alpha_n \quad \Sigma u_n = \Sigma(1 - \alpha_n)^n.$$

Pour prouver la convergence ou la divergence de cette dernière série, observons qu'on a :

$$(1) \qquad (1 - \alpha_n)^n = \left[(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{n\alpha_n}, \quad \lim (1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{e}.$$

Donc nous pouvons écrire

$$(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{e} + \varepsilon.$$

Par suite, $\varepsilon$ tendant vers zéro avec $\alpha_n$ ou $(1 : n)$, la relation (1) devient

$$(1 - \alpha_n)^n = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{n\alpha_n}.$$

Posons, $\eta$ étant nulle ou ayant une limite nulle avec $(1 : n)$,

$$n\alpha_n = k \log n + \eta.$$

Alors,

$$(1 - \alpha_n)^n = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{k \log n} \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{\eta},$$

$$\Sigma(1 - \alpha_n)^n = \Sigma \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{k \log n} \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{\eta}. \qquad (2)$$

Comparons entre elles les séries :

$$(3) \qquad \Sigma \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^{k \log n}, \quad \Sigma \frac{1}{n^k} = \Sigma \left(\frac{1}{e}\right)^{k \log n}. \qquad (4)$$

On a

$$\lim \left( \frac{\frac{1}{e} + \varepsilon}{\frac{1}{e}} \right)^{k \log n} = \lim (1 + e\varepsilon)^{k \log n} = \lim \left[ (1 + e\varepsilon)^{\frac{1}{e\varepsilon}} \right]^{ke\varepsilon \log n} = \lim e^{ke\varepsilon \log n}.$$

Or

$$e^{ke\varepsilon \log n} = n^{ke\varepsilon} = n^{k\left[e(1-\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1\right]} = \left[ \frac{n^{e(1-\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}}}{n} \right]^k.$$

Comme $(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}$ a pour limite $\frac{1}{e}$, on a

$$\lim e^{ke\varepsilon \log n} = 1.$$

Les deux séries (3), (4) sont en même temps convergentes ou divergentes; il en est de même, d'après un théorème bien connu, de la série (2) car le facteur $\left(\frac{1}{e} + \eta\right)^{\eta}$ a toujours une valeur finie et pour $n = \infty$ tend vers 1.

Bucharest, 13 avril 1892.

Notes. I. Les séries qui ont respectivement pour termes généraux

$$\frac{1}{n^k}, \left(1 - k\frac{\log n}{n}\right)^n$$

sont convergentes et divergentes ensemble, car le rapport $r$ de ces

termes généraux, $n^k\left(1-k\frac{\log n}{n}\right)^n$, tend vers l'unité En effet, on a

$$\log r = k\log n + n\log\left(1-k\frac{\log n}{n}\right) =$$

$$k\log n + n\left[-k\frac{\log n}{n} - \frac{k^2(\log n)^2}{n^2} - \text{etc.}\right]$$

$$= -k^2\frac{(\log n)^2}{n} - \text{etc.}$$

expression qui a pour limite 0. (V. Jamet).

II. La solution de la question 760, due à M. E. Cesàro (*Mathesis*, 1892, p. 125), se trouve aussi dans son remarquable *Corso di Analisi algebrica* (Torino, Bocca, 1894) pp. 489-491.

---

## ×Question 1248.

(Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 280.)

*Trouver le maximum de l'expression* $\sin 2x \sin 2y$, *sachant que* $\sin y = m \sin x$. (A. C.)

*Solution par* M. Soons. Posons $\mu = \sin 2x \sin 2y$; nous aurons

$$\mu^2 = 16m^2(\sin^2 x)^2(1-\sin^2 x)(1-m^2\sin^2 x).$$

Le maximum de $\mu^2$ a lieu en même temps que celui de la quantité

$$\frac{\sin^2 x}{\alpha}\cdot\frac{\sin^2 x}{\alpha}\cdot\frac{1-\sin^2 x}{\beta}\cdot\frac{1-m^2\sin^2 x}{\gamma}. \qquad (1)$$

Il suffit maintenant de choisir les indéterminées $\alpha, \beta, \gamma$ de manière que la somme des facteurs du produit (1) soit constante et que ces facteurs soient égaux entre eux ; ce qui donne

$$\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{m^2}{\gamma} = 0,$$

$$\frac{\sin^2 x}{\alpha} = \frac{1-\sin^2 x}{\beta} = \frac{1-m^2\sin^2 x}{\gamma}.$$

De là on déduit

$$\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\sin^2 x} - \frac{m^2}{1-m^2\sin^2 x} = 0,$$

ou
$$4m^2\sin^4 x - 3(m^2+1)\sin^2 x + 2 = 0. \qquad (2)$$

Cette équation donne

$$\sin^2 x = \frac{3(m^2+1) \pm \sqrt{9m^4 - 14m^2 + 9}}{8m^2}. \qquad (3)$$

Appelons $\alpha$ et $\beta$ ces deux valeurs de $\sin^2 x$. La quantité sous le radical, égale à $9(m^2-1)^2 + 4m^2$, est toujours positive; de plus, des signes de $\alpha + \beta$ et de $\alpha\beta$ on conclut que $\sin^2 x$ a deux valeurs positives.

L'hypothèse $m^2 = 1$ se discute immédiatement. Nous supposons $m^2 < 1$; s'il en était autrement on exprimerait $\mu^2$ en fonction de $\sin^2 y$ après avoir posé $\sin x = m' \sin y$ où $m' = 1 : m$. Le premier membre de l'équation (2) prenant une valeur positive pour $\sin^2 x = 0$ et la valeur négative $m^2 - 1$ pour $\sin^2 x = 1$, l'équation a une racine comprise entre 0 et 1, et une autre supérieure à 1. Il résulte de là que le maximum de $\mu^2$ a lieu pour $\sin^2 x = \beta$.

Dans la solution qui précède, $\sin^2 x$ est la variable et $\mu^2$ la fonction; la discussion devient plus compliquée si l'on prend $x$ pour variable indépendante et $\mu$ pour la fonction.

M. Barisien a résolu la même question en égalant à zéro la dérivée de

$$\mu = 4m \sin^2 x \cos x \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}.$$

---

## ×Question 1272.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 132.)

*Un triangle indéterminé* ABC *a son sommet* A *sur une circonférence* (A), *son sommet* B *sur une autre circonférence* (B), *et son sommet* C *sur une troisième circonférence* (C). *Trouver la courbe ou les courbes qui limitent les régions du plan où se trouve le barycentre* G *d'un de ces triangles.*

*Question analogue pour le barycentre d'un tétraèdre indéterminé dont les sommets appartiennent à quatre sphères données.* (E. Lemoine).

*Solution par* MM. H. Brocard et Ripert. Soient $O_a$, $O_b$, $O_c$, les centres, et $a$, $b$, $c$ les rayons des trois cercles donnés (A), (B), (C).

Supposons d'abord le point A fixe. Le lieu du milieu M de AB sera un cercle (B') de rayon $\frac{b}{2}$.

Si maintenant on suppose qu'à son tour le point A décrive le cercle (A), les centres des cercles (B') de rayon constant égal à $\frac{b}{2}$ se déplaceront sur

une circonférence (A') de rayon $\frac{a}{2}$, $O_b$ étant le centre d'homothétie. Donc la région des points M est un cercle (M) de rayon $\frac{a+b}{2}$, dont le centre est au milieu de $O_aO_b$.

Le barycentre G est au tiers des droites telles que MC. Si l'on suppose C fixe, on a pour lieu de G un cercle de rayon $\frac{2}{3}\cdot\frac{a+b}{2}$ ou $\frac{a+b}{3}$. Mais si l'on fait décrire au point C le cercle (C), on voit qu'à son tour le barycentre G se trouvera dans un cercle limite, enveloppe d'un cercle de rayon $\frac{c}{3}$ dont le centre décrit le cercle de rayon $\frac{a+b}{3}$. Par conséquent, le cercle-enveloppe a pour rayon $\frac{a+b+c}{3}$ et l'on voit, en outre, que son centre est le barycentre du triangle $O_aO_bO_c$ des centres des trois cercles donnés.

Note. Par analogie, l'extension au tétraèdre n'offre aucune difficulté, et fait prévoir pour résultat une sphère à la place d'un cercle.

*Autre solution.* Soit ω le barycentre du triangle $O_aO_bO_c$. Pour passer de ω à G, il suffit de construire une ligne brisée ωDEG dont les côtés ωD, DE, EG sont parallèles aux rayons $O_aA$, $O_bB$, $O_cC$ et égaux à $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}c$. La distance ωG est donc en général plus petite que $\frac{1}{3}(a+b+c)$; elle atteint cette valeur lorsque les rayons $O_aA$, $O_bB$, $O_cC$ sont parallèles et de même sens. On en conclut que la région des points G est limitée par la circonférence $\left(\omega, \frac{a+b+c}{3}\right)$.

Si l'on peut former un triangle $\alpha\beta\gamma$ avec les rayons $a$, $b$, $c$, la distance ωG peut devenir nulle; il suffit pour cela que les rayons $O_aA$, $O_bB$, $O_cC$ fassent des angles égaux avec les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ ou qu'ils aient des directions symétriques de ces droites par rapport à une droite quelconque.

Supposons $a = b + c$. Alors le point G coïncide encore avec ω lorsque les rayons $O_aA$, $O_bB$, $O_cC$ sont parallèles entre eux, les deux derniers étant dirigés en sens contraire du premier.

Ainsi, quand on a $a < b + c$ ou $= b + c$, le point G peut occuper une position quelconque à l'intérieur de la circonférence limite $\left(\omega, \frac{a+b+c}{3}\right)$.

Considérons maintenant le cas où $a > b + c$. Prenons sur Dω la longueur $DI = \frac{1}{2}(b + c)$; de

$$\omega D < DE + EG + G\omega, \quad \text{ou} \quad \omega D - DE - EG < G\omega,$$

on conclut $\omega I < \omega G$. Par suite, la circonférence $\left(\omega, \frac{x - b - c}{3}\right)$ constitue une seconde limite des points G : aucun de ces points ne peut tomber à l'intérieur de la circonférence. (J. N.).

---

## ×Question 1292.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 250.)

*Dans un triangle sphérique* ABC, *rectangle en* A, *on porte sur* AC *l'arc* AD *égal au complément de l'arc de grand cercle qui mesure l'angle* B, *et du point* D *comme pôle, on décrit l'arc de petit cercle* BE *rencontrant le prolongement de* DA *en* E; *l'arc* AE *mesure la surface du triangle proposé.* (C. E. W.)

*Solution par* M. E. Pire, *étudiant à l'École des arts et manufactures.*

La surface du triangle sphérique rectangle ABC est égale à B + C — 1$^{dr}$ — ou bien à C — (1$^{dr}$ — B) ou encore à C — AD.

La question revient donc à prouver que

$$C - AD = AE \text{ ou } C = BD.$$

Or dans le triangle rectangle ABD, on a :

$$\cos AD = \sin B \frac{\cos BD}{\cos AB},$$

et dans le triangle ABC, on a également

$$\sin B = \frac{\cos C}{\cos AB}.$$

De ces deux égalités il résulte que

$$\cos BD = \cos C$$

et par suite, que BD = C.

Solution analogue par M. Déprez.

---

## ×QUESTIONS D'EXAMEN.

**274.** Le produit des rayons des trois cercles qui passent par deux sommets d'un triangle ABC et par un même point de BROCARD est égal au cube du rayon du cercle ABC. (E. N. BARISIEN.)

**275.** Le produit des rayons des deux cercles qui passent par A et touchent BC, l'un en B, l'autre en C, est égal au carré du rayon du cercle ABC. (E. N. BARISIEN.)

**276.** $a$, $b$, $c$, $d$, étant quatre nombres inégaux, trouver la condition nécessaire pour que les équations.

$$x + ay + a^2z + a^4 = 0, \quad x + by + b^2z + b^4 = 0,$$
$$x + cy + c^2z + c^4 = 0, \quad x + dy + d^2z + d^4 = 0$$

soient compatibles.

Réponse : $a + b + c + d = 0$.

**277.** Exprimer que les équations

$$x\sqrt{3} - y = a, \quad x + y\sqrt{3} = b, \quad x^2 + y^2 = c^2$$

sont compatibles.

**278.** Dans tout triangle ABC, on a

$$4b^2 + a^2 - 4ab\cos C = 4c^2 + a^2 - 4ac\cos B = b^2 + c^2 + 2bc\cos C.$$

On obtient ces relations en prolongeant CA de AD = CA, et BA de AE = BA, et en calculant $BD^2$ dans les triangles CBD, EBD et ABD.

(E. N. BARISIEN.)

**279.** Résoudre le système

$$\frac{x + x^2}{y + y^2} = a, \quad \frac{x + y^2}{x^2 + y} = b.$$

Ce système donne

$$\frac{x + y + x^2 + y^2}{x - y + x^2 - y^2} = \frac{a + 1}{a - 1}, \quad \frac{x + y + x^2 + y^2}{x - y - (x^2 - y^2)} = \frac{b + 1}{b - 1},$$

d'où, par division,

$$\frac{1 - x - y}{1 + x + y} = \frac{(a + 1)(b - 1)}{(a - 1)(b + 1)}$$

ou $$\frac{2}{x+y}=\frac{(a+1)(b-1)+(a-1)(b+1)}{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}=\frac{ab-1}{a-b};$$ etc.

**980**. On considère deux droites rectangulaires $Ox$, $Oy$, un point fixe A sur $Oy$ et deux points variables B et C sur $Ox$, tels que $OB \times OC =$ constante. Le lieu des points de rencontre de la médiane AM du triangle ABC avec le cercle des neuf points de ce triangle se compose de la droite $Ox$ et d'un cercle. (E. N. Barisien.)

Si l'on fait $OA = k$, $OB, OC = k^2$, on trouve

$$2k(x^2+y^2)-(3k^2-k^2)y+k(k^2-k^2)=0.$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1297**. On donne dans un même plan deux droites AB, A'B'. Soient M, M' deux points mobiles sur ces droites sous la condition

$$MA.MB = M'A'.M'B';$$

quelle est l'enveloppe de la droite MM'? Trouver géométriquement le point de contact de MM' avec l'enveloppe. (J. Neuberg.)

**1298**. Si M est un point mobile sur une ellipse de foyers F, F', démontrer que les points de contact des côtés MF, MF' avec le cercle inscrit au triangle MFF' et avec le cercle exinscrit dans l'angle M décrivent des conchoïdes d'ellipse; les points de contact des mêmes côtés avec les deux autres cercles exinscrits décrivent des circonférences. (J. Déprez.)

**1299**. Construire une hyperbole équilatère, connaissant un point ou une tangente, un sommet et la tangente en ce sommet.

×**1300**. Résoudre le système d'équations

$$x^2+y^2=1, \qquad k^2x^2+z^2=1,$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ a & b-1 & c-1 \\ a' & b'-1 & c'-1 \end{vmatrix} = 0,$$

en écartant la solution évidente $x=0$, $y=1$, $z=1$ et les deux solutions $(x=a, y=b, z=c)$, $(x=a', y=b', z=c')$ que l'on suppose exister; on admettra d'ailleurs que $1-k^2a^2a'^2$ est différent de zéro.

(G. Fontené.)

# TABLE DES MATIÈRES(*).

## ARITHMÉTIQUE ; ANALYSE INDÉTERMINÉE.


Pages.

×Questions de théorie des nombres; par S. Realis. . . . . 177
×Questions 1234; solutions par MM. Déprez et Emmerich . . . . . 161


## ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.


×Sur une réussite; par M. Stuyvaert. . . . . 13
×Substitutions monocycliques (J. N.) . . . . . 14
×Formules combinatoires; par M. Stuyvaert . . . . . 15
Notre supplément (J. N.) . . . . . 150
Sur les permutations carrées de base 6; par M. G. Tarry. Supplément, pp. 23-30
×Sur une formule combinatoire (P. M.) Solution de la question 1203. . . 159
×Question d'algèbre du concours général de 1900; solution par M. Plouman. 220
×Combinaisons; par M. Stuyvaert . . . . . 224
Théorème de l'addition des fonctions hyperboliques; par M. G. Fontené. . 241
Paradoxe mathématique; par MM. Barisien et J. Neuberg . . . . . 267
×Question 889; solutions par MM. Emmerich, Gillet, etc. . . . . 19
×Question 1198; solution par M. Barisien . . . . . 27
×Question 1219; solution par M. Goldenberg . . . . . 49
×Sur la représentation proportionnelle; par M. J. Wasteels . . . . . 81
×Problème de maximum et de minimum (*J. de Vuibert*) . . . . . 86
×Question 1241; solutions par Mlle Wendt, Listray, etc. . . . . 100
×Question 1221; solution par MM. Rose, Delahaye, etc. . . . . 121
Questions 1215 et 1231; solutions par MM. Emmerich et Gob . . . . . 199
×Question 1139; solution par M. Emmerich . . . . . 229
Question 1234; solution par MM. Soons et Emmerich . . . . . 257
Question 1248; solution par M. Soons . . . . . 271


## ×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. MÉTAGÉOMÉTRIE.


Une application de la théorie de l'inversion; par M. Orlando . . . . . 17
Aire d'un quadrilatère; par MM. J. Neuberg et Droz-Farny . . . . 43, 225
Sur le quadrilatère inscriptible (A. C.) . . . . . 87
Sur l'hexagone de Pascal, d'après L. Gérard . . . . . 88
Sur le triangle pseudo-isoscèle; par M. A. Emmerich . . . . . 129
Propriétés d'un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, par M. C. Couturier . . . . . 135
Problème par M. E. N. Barisien. . . . . 136
Division d'un angle en $n$ parties égales. . . . . 156
Sur la composition des forces; par M. C. Wasteels . . . . . 220


(*) Rectifications, pp. 104, 128, 152. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.
Centre de gravité d'un trapèze; par M. Philippin . . . . . 249
Question 1230; solutions par MM. Emmerich, Déprez, etc. . . . . 74
Question 1236; solution par M. Déprez . . . . . 77
Question 1242; solution par M Emmerich . . . . . 101
Question 1243; solution par M. G. Gérard . . . . . 123
Question 1224; solutions par MM. Barisien, Clavero y Guervos . . . . 28
Question 1217; solution par M J. Déprez . . . . . 48
Question 1237; solutions par MM. Emmerich et J Neuberg . . . . . 49
Question 1250; solution par M Fairon . . . . . 142
Question 1071; solutions par MM. Droz-Farny et Déprez . . . . . 142
Question 1258; solutions par MM. Rose, Emmerich, etc. . . . . 150
Question 1253; solutions par MM. Soons et Emmerich . . . . . 171
Question 1256; solution par MM Soons, Emmerich, etc. . . . . 173
Question 1238; solution par M. Neuberg . . . . . 202
Question 1268; solution par M. Verniory . . . . . 211
Question 1250; solution par M. J. Déprez . . . . . 236
Question 1277; solution par MM. François, Plakhovo, etc. . . . . 238
Question 1195; solution par MM. Emmerich, Werpin, etc. . . . . 256
Question 1281; solution par M. Emmerich . . . . . 261
Question 1272; solution par MM. Brocard et Ripert . . . . . 272
Question 1292; solution par M. E. Pire . . . . . 274

## COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Question de géométrie analytique posée au concours général de 1899; solution géométrique par M. Gob; note historique par M. Neuberg. . 17, 195
Sur trois hyperboles associées à un triangle; par M. Droz-Farny . . . . 11
Sur trois paraboles associées à un triangle; par M. Droz-Farny . . . . 63
Sur le théorème de Maclaurin et Braikenridge; par M. Pirondini . . . . 64
Note de géométrie; par M. Gob . . . . . 65
Sur les triangles inscrits à une ellipse et circonscrits à un cercle concentrique; par M. E. Barisien . . . . . 81, 113, 136
Sur le point de Fagnano; par M. Andrien . . . . . 105
Sur les triangles trihomologiques; par MM. J.-A. Third, Ripert et Servais 153, 227, 267
Théorème de l'addition des fonctions hyperboliques; par M. G. Fontené. . 241
Question 1166; solution par M. Emmerich . . . . . 26
Question 1245; solution par M Emmerich . . . . . 52
Question 1069; solutions par MM. Colart, Retali, etc. . . . . 73
Question 1075; solution par MM. Déprez, Soons, etc. . . . . 91
Question 1098; solution par M. Barisien . . . . . 118
Sur la question 1222, par M. Neuberg . . . . . 134
Question 1002; solution par M. V. Retali . . . . . 141
Question 1092; solution par M. V. Cristesco . . . . . 144
Question 1216; solution par M. Soons . . . . . 149
Question 1085; solution par M. Mandart . . . . . 163
Question 1251; solutions par MM. Couturier, Déprez, etc. . . . . 168, 225
Questions de géométrie analytique du concours général de 1900; solutions par MM. Ploumen et Klompers . . . . . 217, 254
Question 1173; solution par M. Droz Farny . . . . . 231
Question 1266; solution par M. H. Descans. . . . . 237

## COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Pages.

Sur la développante de cercle et la spirale logarithmique; par L. Orlando . 110
Le théorème de Chasles relatif aux cubiques gauches; par M. Stuyvaert . 181
Sur les astéroïdes ou astroïdes; par MM. G. Loria et J. Neuberg . . . . 244
Question 939; par M. J. Neuberg . . . . . 21
Question 1096; solutions par MM. Hacken, Jerabek . . . . . 23
Question 785; solution par MM. Emmerich, Neuberg, Espanet . . . 44, 90
Question 1066; solution par MM. Droz-Farny, Barisien, etc. . . . . 71
Question 1150; solution pur M. Droz-Farny . . . . . 92
Question 1235; solutions par MM. Cordoso-Laynes, Gob . . . . . 96
Question 1214 (ou 1234); solution par M. V. Retali . . . . . 121
Question 1249; solutions par MM. G. Gérard et E. N. Barisien . . . 166
Question 1259; solution par M. V. Retali . . . . . 208
Question 1183; solution par M. J. Neuberg . . . . . 231
Question 1197; solution par M. Emmerich. . . . . 232
Question 1239; solution par M. J. Deprez . . . . . 234
Question 1260; solutions par MM. Gérard, Fairon, etc. . . . . 257

## CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Remarques sur certaines questions de géométrie intrinsèque par M. E. Cesáro . . . . . 5, 37, 57
Aire des sinusoïdes et formules de Wallis (P. M.) . . . . . 183
Inégalités logarithmiques et formule de Stirling (P. M.) . . . . . 222, 265
Question 784; solution par M. J. Neuberg . . . . . 69
Question 387 (2e partie), solution par M. Emmerich. . . . . 116
Question 760; solution par M. Joachimescu . . . . . 269

## BIBLIOGRAPHIE ET BIOGRAPHIE; PUBLICATIONS RÉCENTES; VARIÉTÉS.

W. W. Beman and D. E. Smith. Geometry . . . . . 66
M. Schuster. Geometrische Aufgaben . . . . . 67
S. Pincherle Geometria metrica e Trigonometria . . . . . 67
C. Alasia. Geometria e Trigonometria della sfera . . . . . 67
I Ghersi. Metodi per risolvere i problemi di Geometria . . . . . 67
Esquisses biographiques. Tchebychef, Brioschi, Lie (P. M.). . . . 67, 112, 228
Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften (P. M.) . . . 83, 193, 252
E. Duporcq. Principes de géométrie moderne (J. N.) . . . . . 89
M. Cantor. Geschichte der Mathematik, B. II, Hb 2. (P. M.) . . . . 139
Cantor's Festschrift. (P. M.). . . . . 139
Formules de la théorie des fonctions elliptiques (P. M.). . . . . 140
Rebière. Pages choisies des savants modernes (J. N.). . . . . 141
Ganter und Rudio. Analytische Geometrie (J. N.) . . . . . 161
R. Sturm. Darstellende Geometrie (J. N.). . . . . 161
J. Boyer. Histoire des mathématiques (P. M.) . . . . . 162
E. Lebon. Histoire de l'astronomie (P. M.) . . . . . 162
J. Thirion. L'astronomie chez les Grecs (P. M.) . . . . . 162
E. Gelin. Précis d'arithmétique élémentaire (P. M.). . . . . 188
B. Niewenglowski et L. Gérard. Cours de Géométrie élémentaire (J. N.). 189

Pages.

Ed. v. Weber. Das Pfaff'sche Problem. etc. . . . . 194
O. Hölder. Anschauung und Denken in der Geometrie. . . . . 194
R. Fricke. Vorlesungen über höh. Mathematik . . . . . 194
P. Amodeo. Aritmetica (d'après O. Tedone) . . . . . 250
Ad. Mineur. Arithmétique élémentaire . . . . . 250
A. Cahen. Théorie des nombres (d'après de la Vallée Poussin) . . . . 251
M. Nasso. Algebra elementare . . . . . 251
F. Müller. Vocabulaire mathématique. . . . . 251
Th. Klompers. Algèbre financière . . . . . 253

## QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 922-925; 926-934; 935-937; 938-941; 942-949; 950-951; 952-955; 956-961; 962-967; 968-973; 974-980;
pp. 30, 53, 79, 102, 126, 151, 175, 213, 238, 260, 274
École polytechnique de Paris, concours de 1900 . . . . . 151

## SUPPLÉMENTS (30 pages).

Sur une transformation géométrique, par V. Retali . . . . . 1-22
Les permutations carrées de base 6, par G. Tarry . . . . . 23-30

## QUESTIONS(*).

| POSÉE | RÉSOL | POSÉE | RÉSOL | POSÉE | RÉSOL |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) I ou (2) I | (2) X | (2) III | | (2) V | (2) X |
| 95 . . 206 (28) | | 825 . . 80 . . | NR | 1048 . . 280 . . | NR |
| (1) IV ou (2) I | | 876 . . 216 . . | NR | 1050 . . 280 . . | 142 |
| 353 . . 159 | | 882 . . 240 | | (2) VI | |
| ×357 . . 159 | | ×886 . . 240 | | 1066 . . 104 . . | 71 |
| 387, 2e p. 231 (29) | 116 | ×889 . . 264 . . | 19 | 1069 . . 128 . . | 73 |
| (1) V ou (2) I | | 892 . . 264 | | 1071 . . 128 . . | 142 |
| 415 . . 46 . . | NR | 892bis . 280 | | 1074 . . 142 | |
| (1) VI ou (2) I | | (2) IV | | 1075 . . 142 . . | 91 |
| ×513 . . 71 (30) | NR | 905 . . 32 . . | NR | 1079 . . 192 | |
| (1) VII ou (2) I | | 939 . . 127 . . | 21 | 1082 . . 215 | |
| 597 . . 280 | | 953 . . 152 | | 1085 . . 216 . . | 163 |
| 598 . . 280 (31) | NR | ×973 . . 216 | | 1088 . . 216 | |
| (1) X | | ×986 . . 263 | | 1090 . . 210 | |
| 699 . . 279 | | ×989 . . 264 | | 1092 . . 240, 280 | 144 |
| (2) II | | (2) V | | 1096 . . 264 . . | 23 |
| 760 . . 80 . . | 269 | ×1002 . . 32 . . | 141 | 1098 . . 280 . . | 118 |
| 767 . . 128 | | 1030 . . 176 | | (2) VII | |
| 778 . . 176 . . | NR | 1033 . . 215 | | 1101 . . 31, 51 . | |
| 784 . . 216 . . | 69 | ×1044 . . 246 | | 1107 . . 51 | |
| 785 . . 216 . | 44, 90 | 1046 . . 246 | | 1138 . . 214 . . | NR |

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions qui ne sont pas marquées des lettres NR (non résolues); elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur celles-ci.

| | POSÉE | RÉSOL |
|---|---|---|
| | (2) VII. | (2) X |
| ×1138. | 215 | |
| ×1139. | 237. | 229 |
| 1140. | 237. | NR |
| 1144. | 261. | NR |
| 1150. | 279. | 92 |
| | (2) VIII. | |
| 1160. | 56 | |
| 1162. | 78 | |
| 1166. | 104. | 26 |
| 1167. | 104 | |
| 1173. | 152. | 231 |
| 1177. | 176 | |
| 1179. | 176. | NR |
| 1183. | 216. | 231 |
| ×1184. | 216 | |
| 1188 | 216, 239 | |
| 1190. | 240 | |
| ×1194 | 263 | |
| ×1195. | 264. | 256 |
| 1197. | 280. | 233 |
| 1198. | 280. | 27 |
| | (2) IX | |
| 1203. | 32 | 159 |
| 1214. | 80. | 121 |
| 1215. | 104. | 199 |
| 1216 | 104. | 149 |
| ×1217. | 104. | 48 |
| ×1219. | 128. | 49 |
| 1220. | 128. | NR |
| ×1221. | 128. | 121 |
| 1222. | 238. | 133 |
| ×1224 | 152. | 28 |
| 1225. | 152. | NR |
| ×1227. | 176 | |
| 1228. | 176. | NR |
| 1229. | 176 | |
| ×1230. | 176. | 74 |

| | POSÉE | RÉSOL |
|---|---|---|
| | (2) IX | (2) X |
| ×1231. | 215. | 199 |
| ×1232. | 215 | |
| 1233. | 215. | NR |
| 1234-1214, 80: | | |
| | 215, 264, | 121 |
| ×1234(nouv.) | 264. | 164 |
| 1235. | 215. | 96 |
| ×1236. | 216. | 77 |
| ×1237. | 216. | 49 |
| ×1238. | 216. | 202 |
| 1239. | 240. | 234 |
| 1240. | 240. | NR |
| ×1241. | 240. | 100 |
| ×1242. | 240. | 101 |
| ×1243. | 264. | 123 |
| 1244. | 264 | |
| 1245. | 264. | 52 |
| 1246. | 264, 280 | NR |
| 1247. | 280. | NR |
| ×1248. | 280 | 272 |
| 1249. | 280. | 166 |
| 1250. | 280. | 236 |
| | (2) X. | |
| 1251. | 32. | 168 |
| ×1252. | 32 | |
| ×1253. | 32. | 171 |
| 1254. | 32. | 257 |
| 1255. | 32 | |
| ×1256. | 32. | 173 |
| 1257. | 56 | |
| ×1258. | 56. | 150 |
| 1259. | 56. | 208 |
| 1260. | 56. | 257 |
| 1261. | 80 | |
| 1262. | 80 | |
| 1263. | 80 | |
| ×1264. | 80 | |

| | POSÉE | RÉSOL |
|---|---|---|
| | (2) IX | (2) X |
| 11265. | 104 | |
| 266. | 104. | 237 |
| 1267. | 104 | |
| ×1268. | 104. | 211 |
| 1269. | 128 | |
| 1270. | 128. | NR |
| 1271. | 128. | NR |
| ×1272. | 128. | 275 |
| 1273. | 152 | |
| ×1274. | 152 | |
| 1275. | 152. | NR |
| 1276. | 152 | |
| ×1277. | 176. | 238 |
| 1278. | 176 | |
| 1279. | 176 | |
| 1280. | 176 | |
| ×1281. | 215. | 261 |
| 1282. | 215 | |
| 1283. | 215 | |
| 1284. | 216. | NR |
| ×1285. | 216. | NR |
| ×1286. | 216. | NR |
| 1287. | 216 | |
| ×1288. | 216 | |
| 1289. | 240. | 277 |
| 1290. | 240 | |
| 1291. | 240. | NR |
| 1292. | 240. | 278 |
| 1293. | 264. | NR |
| ×1294. | 264 | |
| ×1295. | 264 | |
| 1296. | 264 | |
| 1297. | 276. | NR |
| 1298. | 276. | NR |
| 1299. | 276. | NR |
| ×1300. | 276. | NR |

# TABLE DES NOMS.


Absolonne, 196, 198
Alasia, 67.
Alauda, 129.
Amodeo, 250, 251.
Andrien, 73, 105, 120, 150.
Appell, 62.
Arago, 163.
Archimède, 110, 222.
Aristarque, 163.
Arnoux, 168.
Bachman, 193, 251.
Baehr, 93.
Barbette, 159.
Barisien, 26, 27, 28, 52, 73, 80, 84, 95, 100, 102, 104, 105, 113, 118, 128, 136, 144, 149, 150, 167, 172, 173, 234, 235, 237, 240, 263, 264, 266, 272.
Bellavitis, 248.
Beman, 66.
Bernoulli, 95.
Bertrand (J.), 39.
Bettazzi, 251.
Biddle, 31.
Birkmore, 32.
Bobynine, 140.
Böcher, 252.
Böklen, 105.
Bombelli, 139.
Boutin, 32, 80, 128, 170, 257, 264.
Bouniakofsky, 68.
Boyer, 162.
Braikenridge, 64.
Braunmühl (von), 140.
Breton de Champ, 19.
Brianchon, 12, 90.
Brioschi, 112.

Brocard, 49, 56, 91, 110, 128, 152, 155, 158, 209. 247, 257, 272, 275, 276, 285.
Brunel, 89, 193.
Burckhardt, 88. 193, 252.
Bürgi, 139.
C.(A.),80,88,216.193,252, 271.
Cahen, 251.
Cajori, 140.
Cantor (M.), 139, 162.
Cardan, 139.
Cardoso-Laynes, 52, 56, 98, 104, 168, 208, 237.
Carnot, 162.
Catalan, 180.
Cataldi, 150.
Cauchy, 162, 188, 194.
Cayley, 113, 265.
Cesáro (E.), 5,37,57,111, 116, 134, 152, 240, 265, 271.
Chasles, 105, 109, 181, 196, 197.
Chatelet (Mad. du), 162.
Clairaut, 110.
Clavero y Guervos,29,30.
Clavius, 139.
Colart, 73, 142.
Comberousse (de), 249.
Copernic, 162.
Couturier, 135, 150, 168, 202, 211.
Cox, 102.
Critesco, 144, 202.
Curtze, 139, 140.
Darboux, 223.
Davis, 152.
Dedekind, 89, 25'.
Delahaye, 20, 28,78,102, 122, 150.
Delannoy, 159.
Delassus, 194.
Demoulin, 176.
Déprez, 17, 23, 28, 44, 48, 49,73,74,76, 77, 91,92, 93,96,118,121,122,125, 128, 143, 149, 164, 168, 169, 195, 215, 232, 234, 235, 236, 240, 256, 261, 274, 276.
Desargues, 90.
Descans, 150, 257.
Descartes, 162, 166.
Dickstein, 140.
Dinostrate, 157.
Dioclès, 120.
Dirichlet, 251.
Dixon, 182.
Dostor, 44, 202.
Droz-Farny,11,12,56, 63, 71, 73, 77, 92, 93, 95, 102, 104, 105, 121, 143, 149 150, 164, 225, 226, 231.
Dupin, 60.
Duporcq, 71, 89, 91, 143, 171.
Eneström, 140, 162.
Engel, 228.
Espanet, 91.
Eudoxe, 163
Euler. 68, 77, 158, 162, 177, 179.
Fagnano 105.
Fairon, 142,150,211, 259.
Faure, 90.
Favaro, 140.
Faye, 163.
Feisthamel, 139
Fermat, 162, 222.
Fibonacci, 128.
Fontené, 32.241,264,276.
Forcadel, 136.
Forsyth, 194.
Fourier, 194.
François, 150, 238.
Fricke, 194.
Fuchs, 195.
Galilée, 163.
Galdeano (de), 285.
Galois, 89, 162, 193.
Ganter 161.
Gauss, 89.
Gelcich, 140.
Gelin, 188.
Gérard (Gust.), 124, 166, 237, 258.
Gérard (Louis), 88, 189.
Gerono, 19.
Ghersi, 67.
Gillet, 20.
Glaisher, 265.
Gob, 17, 65, 98, 121, 195, 199, 201.
Goldenberg, 49.
Goursat, 194.
Graeber, 164.
Graf, 140.
Graindorge, 194.
Guldin, 212.
Günther, 139, 140.
Hacken, 21, 23.
Halphen, 120.
Heath, 140.
Heiberg, 140.
Heffter, 159.
Heller, 140.
Héraclite de Pont, 163.
Herschell, 163.
Hermite, 113.
Hesse, 90.
Hilbert, 89, 193.
Hipparque, 163.
Hippias, 157.
Hire (de la), 248.
Hoffmann, 129.
Hölder, 89, 193, 194.
Hüber, 159.
Hultsch, 140.
Huygens, 139.
Jamet, 269, 271.
Janssen, 163.
Jacobi, 113, 140, 228.
Jeřábek, 24, 121.
Joachimescu, 269.
Joachimsthal, 90.
Jordan, 228.
Kelvin, 195.
Kepler, 139, 188, 195.
Klein (F.), 194, 195, 228.
Klompers, 48, 253, 254.
Kovalewsky (S.) 163.
Krahé, 169.
Kronecker, 89, 113.
Lafontaine, 150.
Lagrange, 162.
Laguerre, 247.
Laisant, 285.
Lampe, 157.
Landsberg, 89.
Laplace, 162, 163, 188.
Laugel, 158.
Lebon, 162.
Leboucq, 150, 237.
Lecointe, 19.
Leibnitz, 162.
Lemoine, 13, 32, 44, 56, 78, 80, 127, 128, 135, 168, 190, 225, 236, 272.
Leverrier, 163.
Lie (S.), 194, 228.
Listray, 71, 100, 101.
Lobatschefsky, 162, 163.
Loewy, 163.
Longchamps (G. de), 55, 167, 195, 209.
Lorent, 216.
Loria (Gino), 69, 140, 162, 228, 244, 248, 250.
Lucas (Ed.), 159.
Maclaurin, 64, 95, 192.
Maillet, 158.
Malo, 79.
Mandart, 33, 92, 163, 196, 199.

Mannheim, 248.
Mansion, 19, 69, 89, 140, 157, 160, 162, 163, 180, 188, 189, 194, 195, 224, 229, 244, 250, 267.
Markof, 69.
Maurer, 252.
Meurice, 20.
Meyer (F. W.), 88, 89, 140, 193, 252.
Meyniel, 159,
Michel (Fr.), 252.
Mineur, 250.
Mister, 19.
Monge, 44, 162,
Müller (Félix) 140, 251.
Nagl, 140.
Nanson, 69.
Nasso, 251.
Neper, 139.
Netto, 88.
Neuberg, 11, 12, 15, 19, 23, 27, 32, 44, 48, 49, 52, 58, 69, 71, 74, 77, 80, 88, 89, 90, 91, 101, 104, 121, 123, 126, 128, 129, 135, 141, 143, 152, 155, 159, 161, 163, 166, 174, 176, 191, 199, 202, 208, 211, 213, 225, 233, 247, 257, 261, 264, 267, 274, 276.
Newcomb, 163.
Newton, 13, 162.
Niewenglowsky, 180.
Ocagne (d'), 247, 248, 249.
Orlando, 17, 32, 102, 110 121, 171.
Painlevé, 193.
Pascal, 88, 90, 162.
Perrier, 163.
Pfaff, 194.
Philippin, 249.
Philolaus, 168.
Picquet, 90
Pincherlé, 67.
Pire (E.), 274.
Pirondini, 61.
Piakhowo, 76, 102, 165, 202, 212, 238.
Platon, 163.
Ploumen, 217, 256.
Plücker, 228.
Poincaré, 163, 195.
Poncelet, 195.
Pringsheim, 89.
Ptolémée, 163.
Pythagore, 151, 163.
Realis, 177.
Rebière, 141.
Retali, 74, 120, 141, 152, 158, 168, 209, 216, 231, 260.
Riemann, 188 195.
Ripert, 171, 226, 234. 267, 272.
Rocquigny (De), 151, 176.
Rose, 48, 53, 102, 103, 122, 150, 211, 235.
Rosenberger, 140.
Rouché, 249, 265.
Rudio, 161.
Ruex, 19.
Runge, 89.
Salmon, 247.
Saunderson, 162.
Schröter, 181, 196, 197.
Schuster, 67.
Schwartz. 195.
Segre, 228.
Serret (A)., 19, 188.
Servais (C.). 72, 268.
Simson, 236.
Sintzof, 28, 119, 234.
Smith, 66.
Somerfeld, 252.
Sonine, 69.
Soons, 48, 78 91, 92, 129, 149, 165, 171, 172, 173, 233, 256, 257, 271.
Sporer, 152.
Stäckel, 140.
Stalgmuller, 140.
Staudt (von), 181.
Stegeman, 132.
Steiner, 94, 154, 155.
Steinschneider, 140.
Stirling, 188, 263.
Stewart, 190.
Sturm (A.), 140.
Sturm (Ch.), 66, 90, 113.
Sturm (R.), 161.
Stuyvaert, 14, 17, 181, 225.
Suter, 140.
Sylvester, 113.
Tannery (P.), 140.
Tarry (G.), 158, 236.
Tartaglia, 139.
Taylor, 89.
Tchebychef, 67.
Tedone, 250.
Third, 153, 215, 226, 268.
Thirion, 162.
Thiry (Cl.), 150.
Thomé, 195.
Tilly (De), 194.
Tisserand. 163.
Tonneau, 175.
Tortolini, 112.
Unger, 140.
Vahlen, 89.
Vallée-Poussin (Ch. de la), 251.
Van Dorsten, 28, 234.
Vasilief, 69.
Vessiot, 193.
Viète, 16.
Vignery, 102, 212.
Viviani, 120.
Voss, 89.
Vuibert, 31, 81, 215, 239, 262.
Wallis, 183, 187, 188, 265.
Wappler, 140.
Watt, 68.
Wasteels, 81, 220, 240, 274.
Weber (H.), 89, 193.
Weber (von), 193, 194.
Weierstrass, 89, 140, 162.
Wendt, 100.
Werpin, 256.
Wertheim, 140.
Wilkinson, 27.
Wiman, 193.
Wohlwill, 140.
Wölfling, 105.

## QUESTIONS DE LA NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE
### (1875-1880)
reproduites ou résolues dans *Mathesis*.

| N. C. M. TOME. | MATHESIS. ÉNONCÉ. | MATHESIS. SOLUTION. |
|---|---|---|
| **II. 1876.** | | |
| 80 | 458 | VII. 200 |
| 81 | 459 | VIII. 91 |
| 98 | 221 | IV. 92 |
| 102 | 200 | VII. 191 |
| 104 | » | XIII. 124 |
| 107 | 228 | IV. 158 |
| 108 | 223 | IX. 82 |
| 119 | » | (2) III. 159 |
| 121 | » | (2) III. 211 |
| 122 | » | (2) V. 101 |
| 123 | » | (2) V. 102 |
| 129 | » | (2) V. 21 |
| 161 | 353 | » |
| 166 | 397 | » |
| 167 | 231 | IV. 155 |
| 169 | 232 | VII. 230 |
| 170 | 244 | VI. 86 |
| 182 | » | (2) VII. 50 |
| [illegible] | 239 | IV. 189 |
| 210 | » | II. 248 |
| [illegible] | » | (2) V. 213 |
| **[illegible] 1877.** | | |
| [illegible] | » | (2) VI. 54 |
| [illegible] | [illegible] | IV. 189 |
| [illegible] | » | » |
| [illegible] | [illegible] | VI. 135 |
| [illegible] | [illegible] | VI. 43 |
| [illegible] | [illegible] | V. 279 |
| [illegible] | [illegible] | VIII. 273 |
| [illegible] | [illegible] | X. [illegible] |
| [illegible] | [illegible] | VII. 197 |
| [illegible] | [illegible] | VII. 195 |
| [illegible] | [illegible] | IX. 252 |
| [illegible] | » | (2) [illegible]. 126 |
| [illegible] | » | (2) V. 175 |
| [illegible] | | (2) VI. 76 |
| **III. 1877.** | | |
| 315 | » | (2) VI. 101 |
| 316 | » | (2) VI. 127 |
| **IV. 1878.** | | |
| 3?3 | 266 | VI. 87 |
| 338 | » | (2) III. 125 |
| 339 | » | (2) III. 259 |
| 362 | » | (2) VI. 140 |
| 374 | 313 | » |
| 399 | 292 | V. 36 |
| 410 | 461 | VII. 25 |
| 411 | » | (2) III. 75 |
| 414 | » | (2) III. 98 |
| 423 | » | (2) III. 173 |
| 430 | » | (2) V. 88 |
| 431 | » | (2) V. 88 |
| **V. 1879.** | | |
| 510 | 294 | III. 116, 191<br>V. 227 |
| 511 | 296 | IX. 118 |
| 513 | 299 | VIII. 167 |
| **VI. 1880.** | | |
| 5?? | » | (2) III. 100 |
| 553 | » | (2) VI. 210 |
| 554 | » | (2) VI. 212 |
| 569 | 309 | IV. 198 |
| 580 | 600 | VIII. 165 |
| 581 | 468 | VII. 163 |
| 582 | 490 | IX. 192 |
| 583 | 460 | VI. 189 |
| 590 | » | V. 128 |
| 59? | » | (2) VII. 27 |
| 599 | » | (2) VI. 191 |
| 601 | 671 | X. 91 |
| 602 | 671 | X. 91 |
| 614 | 493 | VIII. 172 |

La question 614 est la dernière de la N. C. M.

La question 166 de la N. C. M. est reproduite sous le n° 1532 dans les N. A. M. On trouve aussi dans ce dernier recueil, en 1843, p. 87, la solution des questions 57 et 222 de la N. C. M.; en 1876, p. 550. sous le n° 1207, celle de la question 83; en 1878, p. 253, celle de la question 141; en 1885, p. 38, celle de la question 343; enfin en 1881, p. 231, celle de la queston 404.

D'autre part, la collection du journal *El Progreso matematico* (publié à Saragosse par M. Z. G. de Galdeano de 1891 à 1895 et repris en 1899) renferme 39 questions empruntées à la N. C. M. où elles portaient les numéros 42, 115, 119, 121, 122, 123, 172, 189, 207, 241, 245, 266, 321, 323, 337, 338, 339, 381, 383, 385, 389, 393, 400, 401, 402, 408, 421, 423, 431, 436, 545, 555, 562, 606, 607, 608, 609, 610, 611.

Plusieurs de ces questions ainsi rééditées ont été résolues dans le recueil susmentionné, ce qui a réduit très sensiblement le nombre des questions proposées dans la N. C. M., et demeurées non résolues. La vérification que j'ai faite à ce sujet me permet d'affirmer que ce nombre, difficile à préciser, doit être un peu moindre que 140. Il ne faut pas désespérer de le voir se réduire, si l'on continue la réimpression éventuelle des questions non résolues ou si nos lecteurs veulent bien consulter la collection des volumes du recueil publié par M. C. A. Laisant où toutes les questions (résolues ou non), ont été réimprimées à l'exception cependant de celles d'Analyse infinitésimale, de Mécanique et d'Astronomie.

H. Brocard.

M. H. Brocard a bien voulu se charger de la statistique des questions et solutions publiées dans les vingt volumes de la collection de *Mathesis*. Ce tableau vient s'ajouter à celui que notre dévoué collaborateur a donné, il y a dix ans, à la fin de la première série du journal.

Nous prions notre zélé confrère M. Z. G. de Galdeano d'agréer nos remercîments pour la gracieuse insertion, dans son Bulletin, des énoncés de la N. C. M. que M. H. Brocard a pris l'initiative de lui adresser. (P. M. et J. N.)

## RÉPARTITION DES SOLUTIONS DES QUESTIONS PR

| Tomes et Années. | Questions. | SOLUTIONS INSERÉ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PREMIÈRE SÉRIE. | | | | | | | | |
| | | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. | VIII. | I |
| **1re Série.** | | | | | | | | | | |
| I. 1881 | 100 | 45 | 27 | 12 | 7 | 5 | 3 | 2 | 2 | |
| II. 1882 | 100 | . | 36 | 38 | 9 | 6 | 4 | 4 | . | |
| III. 1883 | 100 | . | . | 8 | 39 | 20 | 19 | 3 | 2 | |
| IV 1884 | 100 | . | . | . | 20 | 18 | 19 | 17 | 4 | |
| V. 1885 | 100 | . | . | . | . | 17 | 28 | 20 | 22 | |
| VI. 1886 | 50 | . | . | . | . | . | 14 | 16 | 7 | |
| VII. 1887 | 50 | . | . | . | . | . | . | 9 | 18 | |
| VIII. 1888 | 40 | . | . | . | . | . | . | . | 8 | |
| IX. 1889 | 30 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| X. 1890 | 30 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| **2me Série.** | | | | | | | | | | |
| I. 1891 | 50 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| II. 1892 | 50 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| III. 1893 | 100 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| IV. 1894 | 100 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| V. 1895 | 50 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| VI. 1896 | 50 | . | . | | . | . | . | . | . | |
| VII. 1897 | 50 | | . | . | . | . | . | . | . | |
| VIII. 1898 | 50 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| IX. 1899 | 50 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| X. 1900 | 50 | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| Totaux | 1300 | 45 | 63 | 58 | 75 | 76 | 87 | 71 | 63 | 6 |
| Moyennes approximatives par mois | | 3 à 4 | 5 à 6 | 4 à 5 | 6 à 7 | 6 à 7 | 7 à 8 | 5 à 6 | 5 à 6 | 5 à |

Le nombre de solutions publiées dépasse généralement celui des questions énonc
que certaines solutions ont paru à diverses reprises, signées d'auteurs différents.

VINGT PREMIERS VOLUMES DE « MATHESIS ».

| ERENTS VOLUMES. DEUXIÈME SÉRIE. III. | IV. | V. | VI. | VII. | VIII. | IX. | X. | Solutions publiées. | Questions non résolues. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | . | . | . | . | . | . | . | 106 | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | 103 | . |
| . | . | . | . | 2 | . | . | . | 103 | . |
| . | . | . | 1 | 1 | . | . | 1 | 102 | . |
| . | . | . | . | 1 | . | . | . | 104 | 1 |
| . | . | . | 1 | . | . | . | . | 52 | 1 |
| 1 | . | . | . | . | . | 1 | . | 48 | 1 |
| . | 1 | 1 | . | . | . | . | . | 40 | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | 30 | . |
| . | . | 2 | . | . | . | . | . | 31 | . |
| 1 | . | . | . | . | . | . | . | 52 | . |
| 21 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | . | 3 | 49 | 1 |
| 28 | 47 | 16 | 1 | 1 | 2 | . | 1 | 96 | 2 |
| . | 4 | 35 | 40 | 13 | 4 | 2 | 1 | 99 | 1 |
| . | . | . | 11 | 23 | 4 | 7 | 2 | 47 | 1 |
| . | . | . | 1 | 12 | 13 | 10 | 8 | 44 | . |
| . | . | . | . | 10 | 28 | 4 | 2 | 44 | 3 |
| . | . | . | . | . | 11 | 25 | 3 | 39 | 1 |
| . | . | . | . | . | . | 17 | 25 | 42 | 7 |
| . | . | . | . | . | . | . | 14 | 14 | 12 |
| 52 | 54 | 55 | 56 | 64 | 63 | 66 | 60 | 1245 | 31 |
| 5 | 4 à 5 | 4 à 5 | 4 à 5 | 4 à 5 | 5 à 6 | 5 à 6 | 5 à 6 | 5 à 6 | 5 à 6 | » |

our le premier volume, le nombre de solutions publiées a toujours atteint son
durant l'année suivante, pour décroître ensuite assez régulièrement.

IMPRIMERIE A. HOSTE, RUE DU CALVAIRE, 23, GAND

SUR

# UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

PAR

**V. RETALI,**

PROFESSEUR A MILAN.

(Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 3e série, t. II, 1900.)

Dans sa dissertation inaugurale (*), le Dr Henkel a étudié deux transformations que l'on peut définir comme il suit : « Étant donnée une courbe C rapportée à deux axes rectangulaires OX, OY, on mène par l'origine une parallèle OP' à la tangente PT au point P de la courbe, et une parallèle OP'' à la normale en P : trouver les lieux des points d'intersection P' et P'' de ces droites OP', OP'' avec la parallèle à OY menée par le point P. » Après avoir établi quelques propriétés générales des transformations

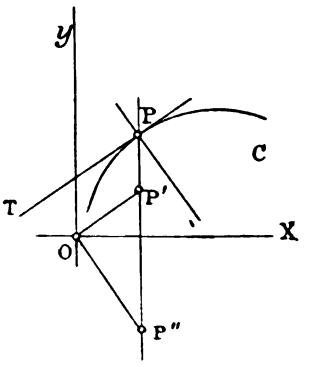


Fig. 1.

(*) *Ueber die aus einer Curve* $y = f(x)$ *abgeleiteten Curven* $y_1 = xf'(x)$ (*Tangentencurve*) *und* $y_2 = -x : f'(x)$ (*Normalcurve*), *mit specieller Anwendung auf die Parabel*, Marburg, 1882. Pour la première de ces transformations, M. Neuberg a proposé la désignation de *transformation pseudo-newtonienne*. Comme publications antérieures se rattachant à la même question, on peut citer : Hochheim, *Die Differentialcurven der Kegelschnitte* (Halle, 1874); Völker, *Ueber eine abgeleitete Curve*, u. s. w. (Inaugural Diss., Marburg, 1880). Je suis redevable de ces renseignements au Dr Henkel, actuellement professeur à Pforta.

indiquées, M. Henkel examine avec détail le cas où C est la parabole

$$y^2 = 4m(x - \alpha),$$

et les transformées sont respectivement

$$y^2(x - \alpha) - mx^2 = 0,$$

et

$$my^2 + \alpha x^2 - x^3 = 0,$$

dont la première, si $\alpha = m$, devient la *cubique mixte* de M. De Longchamps (*). En voulant étendre aux courbes planes algébriques les transformations imaginées par M. Henkel, dont la première présente une analogie évidente avec la construction donnée par Leibnitz pour les Robervalliennes (**), j'ai été conduit, il y a quelques années, à des résultats assez généraux et en particulier à des générations, que je crois nouvelles, pour la plupart des cubiques ayant reçu un nom et pour quelques quartiques unicursales; mais, distrait par d'autres occupations, j'avais presque oublié ces recherches, lorsque mon attention y a été rappelée récemment par un mémoire de M. Brocard (***). Ce géomètre, prenant son point de départ dans une question posée par M. Petit-Bois dans *Mathesis* (année 1898, p. 215), applique

(*) *Journal de Math. spéciales,* année 1886, pp. 245-247. De même si $\alpha = m$, la *Normalcurve* devient la cubique duplicatrice $m(x^2 + y^2) = x^3$ de M. De Longchamps (*ibid.*, pp. 136-138).

(**) Voir Aubry, *De l'usage des figures de l'espace,* etc. (*ibid.*, année 1896, pp. 179-180). La Robervallienne de cercle dont parle M. Aubry n'est pas la cubique d'Agnesi, mais on peut obtenir cette cubique en appliquant la construction de Leibnitz à l'ellipse $4x^2 + y^2 = 4a^2$ (voir le n° 6 de cette note). La deuxième transformation de M. Henkel est le produit de la première avec une inversion (spéciale) de Hirst.

(***) *Sur une transformation géométrique* (*transformation pseudo-newtonienne*). Ce mémoire a paru dans les publications de la Société royale des sciences de Liége et a été joint comme supplément à la livraison de mars 1898 de *Mathesis*. La transformation indiquée dans la note de M. Petit-Bois, faisant suite au mémoire de M Brocard, est le deuxième du Dr Henkel, qui a aussi donné la relation entre les aires (*loc. cit.*, § 5).

d'abord la première des transformations indiquées au cercle, à la parabole $y^2 = 4mx$, à la courbe en *huit* et au *folium de Descartes;* mais c'est dans les applications qu'il en fait aux courbes transcendantes que M. Brocard trouve les résultats plus intéressants et curieux, par exemple : les transformées de la logarithmique, de la cycloïde, de la sinusoïde, de la tangentoïde, de la chaînette, de la tractrice sont respectivement la droite, la cissoïde, la *Kohlenspitzencurve*, l'*anguinea* (serpentine), la *Kreuzcurve* et la circonférence.

Quoique ces relations inattendues entre des courbes algébriques et des courbes transcendantes forment le côté le plus intéressant de la transformation, nous croyons qu'il n'est pas inutile de l'approfondir aussi pour les courbes algébriques, et tel est le but de cette note.

Si, dans la transformation que je désigne ci-après par le symbole [Y, O, *s*], nous prenons la droite *s* (*axe*) à l'infini, et pour *premier pôle* Y le point à l'infini de | OY |, nous avons la transformée *pseudo-newtonienne* (X) de M. Brocard; si, en conservant le *deuxième pôle* en O, le premier pôle est le point à l'infini de | OX |, nous avons (Y); si *s* est une droite propre, Y son point à l'infini et O le point à l'infini sur la perpendiculaire, on tombe sur la construction donnée par Leibnitz pour la Robervallienne. Dans les deux premiers numéros, utilisant la théorie des correspondances (*m*, *n*) et quelques résultats obtenus par MM. Schoute (*) et Zeuthen (**), je détermine les caractéristiques pluckériennes de la transformée d'une courbe algébrique n'ayant pas de relations particulières de position avec l'axe et les pôles de la transformation; le numéro suivant contient les modifications que les résultats obtenus subissent lorsque certaines de ces relations ont lieu; les cinq derniers numéros appliquent la transformation aux coniques, aux cubiques et à la quartique de la troisième classe.

(*) *Sur un problème de Steiner.* (Bull. des Sc. mathém., 2e série, t. X, p. 242.)

(**) *Id.*, ibid., t. XI, avril 1887.

1. Dans le plan d'une courbe générale $C_m^n$, du degré $n$, de la classe $m = n(n-1)$ et du genre

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

on donne une droite fixe $s$ (fig. 2) et deux points fixes Y et O n'ayant aucune relation particulière de position ni entre eux ni avec $C_m^n$ : si $t$ est la tangente au point variable P de la courbe et P' la projection faite de O sur le rayon | YP |, du point $(ts)$, lorsque P décrit $C_m^n$, le point P' engendre une certaine courbe que nous nous proposons de déterminer (*). D'abord, comme le lieu cherché et $C_m^n$ se correspondent point à point, ils sont du même genre ; on reconnaît ensuite aisément que le lieu de P' est le produit de deux faisceaux Y et O de rayons en correspondance $(m, n)$ : en effet, à un rayon $y$, du faisceau Y, coupant $C_m^n$ aux points $P_1, \ldots P_n$, correspondent dans le faisceau O les $n$ rayons qui projettent les points $(t_1 s) \ldots (t_n s)$ ; à un rayon $o$ du faisceau O correspondent dans le faisceau Y les $m$ rayons qui projettent du point Y les points de contact des tangentes à $C_m^n$ issues du point $(os)$. *Le lieu cherché est donc* (**) *une courbe de l'ordre* n + m *ayant un point* n *-uple en* O *et un point* m *-uple en* Y ; nous

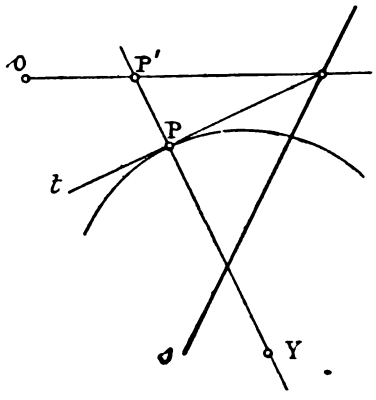


Fig. 2.

(*) En prenant pour $s$ la droite à l'infini, on tombe sur la transformation considérée par M. d'Ocagne dans les six derniers numéros de son mémoire *Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales.* (*Journal de Sc. Math.* de M. Gomes Teixeira, n° XLVIII, 1888.) L'autre transformation formant l'objet de ce mémoire en est le *produit* avec une inversion (spéciale) de Hirst.

(**) Weyr (Emil), *Beiträge zur Curvenlehre*, § 49 (Wien, 1880.)

le désignerons par $C_{2m}^{n+m}$, car nous verrons bientôt que sa classe est $3m$.

De la définition de la transformation il s'ensuit que $C_{2m}^{n+m}$ passe par les $n$ points où $C_m^n$ est coupée par l'axe $s$, et par les $m$ points de contact des tangentes à $C_m^n$ issues de O. Les tangentes au point $m$-uple $y$ sont les rayons du faisceau Y qui correspondent au rayon (OY) considéré comme appartenant au faisceau O, c'est-à-dire les tangentes à $C_m^n$ issues de Y; de même, les tangentes au point $n$-uple O sont les rayons qui projettent du point O les points où $s$ est coupée par les tangentes menées à $C_m^n$ aux points où cette courbe est coupée par la droite $|OY|$.

Outre les deux points multiples Y et O, la courbe possède d'autres points doubles ordinaires que nous allons déterminer. Lorsque le rayon $y$ varie dans le faisceau Y, les $\frac{1}{2}n(n-1)$ intersections mutuelles des tangentes $t_1, t_2, \ldots, t_n$ engendrent une courbe $C^\nu$ dont l'ordre est

$$\nu = \frac{1}{2}(2n-3)m;$$

les points $D_1, \ldots, D_\nu$ où cette courbe est coupée par $s$ sont des points simples formés chacun par l'intersection d'une couple de tangentes homologues, c'est-à-dire dont les points de contact sont alignés avec Y sur une droite $y_\nu$. Cela posé, au rayon $y_\nu$ du faisceau Y correspondent, dans le faisceau O, $n$ rayons parmi lesquels deux vont coïncider en la droite $o_\nu \equiv |OD|$; autrement dit, les droites $y_\nu$ sont des rayons de diramation du faisceau Y. Au rayon $o_\nu$ de O correspondent en Y, $m$ rayons dont deux coïncident en $y_\nu$; donc les $\nu$ rayons $o_\nu$ sont des rayons de diramation du faisceau O, mais ils doivent, aussi bien que les $\nu$ rayons $y_\nu$, être comptés doubles et les points $(y_\nu o_\nu)$ donnent lieu sur $C_{2m}^{n+m}$ à $\nu$ points doubles ordinaires. La courbe n'a pas d'autres points

(*) Schoute, *loc. cit.*

multiples, outre ceux que nous avons trouvés et qui équivalent ensemble à

$$\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}(2n-3)m=\frac{1}{2}[(m+n)^2-4m-n]$$

points doubles ordinaires, car elle est du genre

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

et l'on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)-\frac{1}{2}(n-1)(n-2=\frac{1}{2}[(m+n)^2-4m-n].$$

Les deux faisceaux Y et O ont respectivement $2m(n-1)$ et $2n(m-1)$ rayons de diramation (*), $(2n-3)m$ desquels, pour chacun des deux faisceaux, sont absorbés par les rayons projetant les points doubles ordinaires; à une tangente $t$ de $C_m^n$ issue de Y correspond dans le faisceau O un groupe de $n$ rayons parmi lesquels deux sont réunis en le rayon qui joint O à $(st)$, donc les $m$ tangentes de $C_m^n$ issues de Y sont des rayons de diramation du faisceau $m$-uple et touchent $C_{m}^{n+m}$ sur la droite $s$; comme

$$(2n-3)m+m=2m(n-1),$$

le faisceau Y ne peut posséder d'autres rayons de diramation. Dans le faisceau O, les droites qui projettent les points où $C_m^n$ est coupée par $s$ sont évidemment des rayons de diramation et touchent $C_{m}^{n+m}$ sur la droite $s$; des $m+n=n^2$ points du lieu placés sur $s$, $m$ sont donc les points de contact des tangentes qui lui arrivent du point $m$-uple, et les autres sont les points de contact des tangentes issues du point $n$-uple. Il y a encore $3m-3n$ autres tangentes issues de O, qui forment les rayons de diramation restants du faisceeu O. Si la tangente T au point d'inflexion I de $C_m^n$ coupe $s$ au point $\eta$, au rayon $|O\eta|$ du fais-

(*) Weyr, *loc. cit.*, § 6.

ceau O en correspondent $m$ du faisceau Y parmi lesquels deux coïncident dans le rayon double |YI|, car la tangente stationnaire $t$ compte pour deux tangentes de $C^n$ issues de $\eta$; $|O\eta|$ est donc un rayon de diramation du faisceau O et le point $I' \equiv (|O\eta|, |YI|)$ est le point de contact de la tangente $|O\eta|$ à la transformée. Ces rayons de diramation sont en même nombre que les points stationnaires de $C^n_m$, à savoir, puisqu'il n'y a pas de rebroussements (*), $3(m - n)$ et, comme

$$(2n - 3)m + n + 3(m - n) = 2n(m - 1),$$

le faisceau $n$-uple O ne possède pas d'autres rayons de diramation.

2. Supposons maintenant que Y tombe sur la droite $s$ (fig. 3). Les résultats précédents subsistent encore, mais il faut remarquer que dans ce cas les tangentes au point $m$-uple Y coïncident avec les autres $m$ tangentes que l'on peut mener à $C^{n+m}_{2n}$ du point Y, c'est-à-dire avec les tangentes menées par ce point à la courbe primitive $C^n_m$; sur chaque branche de la courbe passant par Y la tangente en Y a avec la courbe une rencontre triponctuelle et par suite Y est un *point* m *-uple d'inflexion.* Nous avons donc le théorème :

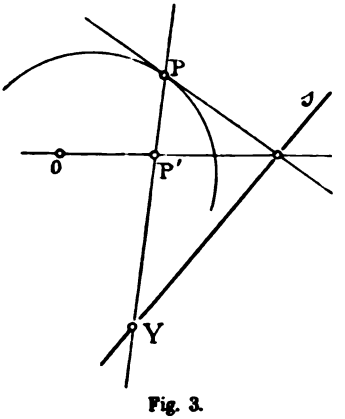


Fig. 3.

« *Étant donnés dans un plan une courbe générale, de l'ordre* n *et de la classe* m, *deux points fixes* Y, O *et une droite fixe* s, *passant par* Y : *si l'on fait correspondre à un point variable* P *de* $C^n_m$ *l'intersection* P' *du rayon* |Y P| *avec celui qui projette de* O *la trace sur la droite* s *de la tangente* P, *le lieu de* P' *est une courbe* $C^{(n^2)}_{nm}$ *du même genre que* $C^n_m$, *de l'ordre* $n^2$ *et de*

(*) Salmon, *Courbes planes*, p. 93, formule (7) de l'édition française.

*la classe* 3m ; *il a un point* n -uple *ordinaire en* O, *un point* m -uple *d'inflexion en* Y *et*

$$\frac{1}{2}m(2n-3)$$

*points doubles ordinaires ; il passe par les points de contact des tangentes à* $C_m^n$ *issues de* O *et par les points où* $C_m^n$ *est coupée par* s ; *les tangentes en ces derniers points vont se couper en* O. »

Nous désignerons la transformation indiquée par le symbole [Y, O, s], et appellerons Y *premier pôle*, O *deuxième pôle*, s *axe* de la transformation ; si $s$ est à l'infini, nous avons la transformation *pseudo-newtonienne*. Si $s$ est une droite propre et si les deux pôles sont à l'infini sur deux droites rectangulaires, la transformée de $C_m^n$ en est la Robervallienne.

Lorsque $C_m^n$ a $\varkappa$ rebroussements de la première espèce, et pas d'autres singularités, son genre est

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\varkappa$$

et sa classe

$$n(n-1)-3\varkappa;$$

sa transformée est toujours du degré $n+m$, le premier pôle est un point $m$ -uple ordinaire, mais comme la courbe C' considérée dans le numéro 1 est maintenant du degré

$$\frac{1}{2}[(2n-3)m-\varkappa],$$

les autres points doubles sont aussi au nombre de

$$\frac{1}{2}[(2n-3)m-\varkappa],$$

et l'on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)-\frac{1}{2}m(m-1)-\frac{1}{2}n(n-1)$$
$$-\frac{1}{2}[(2n-3)m-\varkappa]=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\varkappa,$$

ce qui revient à dire qu'il n'y a pas d'autres points multiples. Pour déterminer la classe de la transformée, il suffit d'observer que parmi les points doubles fournis par la courbe $C^n$, il y en a $\varkappa$ qui sont des rebroussements, tandis que les autres

$$\frac{1}{2}[(n-3)m-3\varkappa]$$

sont des points doubles ordinaires : la classe est donc

$$(m+n)(m+n-1)-m(m-1)-n(n-1)$$
$$-[(2n-3)m-3\varkappa]-3\varkappa=3m.$$

Nous en concluons que, *même lorsque la courbe primitive* $C^n_m$ *a* $\varkappa$ *rebroussements de la première espèce, la transformée est toujours du degré* n + m *et de la classe* 3m.

**3.** Si $C^n_m$ a des relations particulières de position avec les pôles ou avec l'axe de la transformation, ou bien si elle possède d'autres singularités que des rebroussements, les résultats qui précèdent subissent des modifications que l'on doit établir dans chaque cas déterminé; néanmoins, pour traiter des cas même relativement simples, il est nécessaire d'indiquer ces modifications lorsque les pôles sont des points multiples ou bien si les droites $s$ et $|YO|$ sont des tangentes multiples de la courbe primitive.

*a*) Lorsque le premier pôle est un point simple de $C^n_m$, à chaque rayon $o$ du faisceau O correspondent dans le faisceau Y les $m$ rayons qui projettent les points de contact avec $C^n_m$ des tangentes issues du point $(os)$; mais à un rayon de Y en correspondent $n-1$ du faisceau O, et la droite $|OY|$ se sépare une fois du lieu. De même si Y est un point $\mu$-uple ordinaire sur $C^n_m$, la droite $|OY|$ se détache $\mu$ fois de la transformée qui est le produit de deux faisceaux Y et O en correspondance $(m, n-\mu)$ et par suite de l'ordre $m+n-\mu$.

Si Y est un point simple de $C^n_m$, deux des $m$ rayons correspondant en Y au rayon $|OY|$ vont se confondre en la tangente de $C^n_m$ au point Y : de même, chaque passage de $C^n_m$ par le premier pôle donne naissance à une coïncidence de deux tangentes

au point $m$ uple d'inflexion. Si Y est un point d'inflexion (simple) de $C_m^n$, avec la tangente stationnaire correspondante vont se confondre trois des $m$ tangentes en Y, etc.

*b*) Le degré de la transformée n'est pas altéré si le deuxième pôle O est sur $C_m^n$ un point multiple de l'ordre $\omega$ ($\geqslant 1$); mais dans ce cas, parmi les tangentes à $C_{n+m}^{n+m}$ en O, il y en a $\omega$ qui coïncident avec celles de $C_m^n$ au même point.

*c*) Lorsque l'axe $s$ est une tangente multiple ordinaire de l'ordre $\sigma$ de $C_m^n$, il se détache $\sigma$ fois de la transformée, et la courbe résiduelle, de l'ordre $m + n - \sigma$, est le produit de deux faisceaux Y et O en correspondance $(m - \sigma, n)$. Y est un point $(m - \sigma)$ uple d'inflexion, etc.

Si $s$ est une tangente stationnaire de $C_m^n$, elle se détache deux fois de la transformée, etc.

*d*) Lorsque la droite |OY| qui joint les deux pôles est une tangente simple de la courbe primitive, considérée comme rayon du faisceau O il lui correspond, dans le faisceau Y, $m$ rayons dont un est |YO|, et comme ce dernier rayon est un rayon de diramation du faisceau Y, les deux faisceaux Y et O sont en position réduite du premier ordre (*); la droite |YO| se détache de leur produit, et la courbe résiduelle a un point $(m-1)$ -uple ordinaire en O, et touche en ce point la droite |OY| : de même, si la droite |YO| est tangente $\rho$ -uple de $C_m^n$, les deux faisceaux Y et O sont en position réduite de l'ordre $\rho$, et leur produit est une courbe de l'ordre $m + n - \rho$ ayant un point $(m - \rho)$ -uple d'inflexion en Y et un point $(n - \rho)$ -uple ordinaire en O (**).

**4.** Nous allons maintenant appliquer la transformation à une conique $C_2^2$ en position générale par rapport à l'axe et aux pôles (fig. 4) : la transformée est une quartique $C_4^4$ de la sixième classe ayant un (seul) point d'inflexion au premier pôle et un point double ordinaire au deuxième pôle. Pour

(*) Weyr, *loc. cit.*, § 50.

(**) Id., *loc. cit.*, § 52.

déterminer le troisième point double V, je mène par Y la droite $s'$ conjuguée de $s$ par rapport à $C_4^2$; la droite qui joint O au pôle de $s'$ par rapport à $C_4^2$ va couper $s'$ au point cherché, car dans le cas actuel la courbe $C^7$ (voir n° 1) se réduit à la polaire de Y par rapport à $C^2$. Comme du point O arrivent à la quartique deux autres tangentes, savoir les rayons qui projettent les points où $C_4^2$ est coupée par $s$, aucune des tangentes au point double O n'est stationnaire, et, d'après un théorème d'Ameseder (*), le troisième point double non plus n'a de tangentes stationnaires.

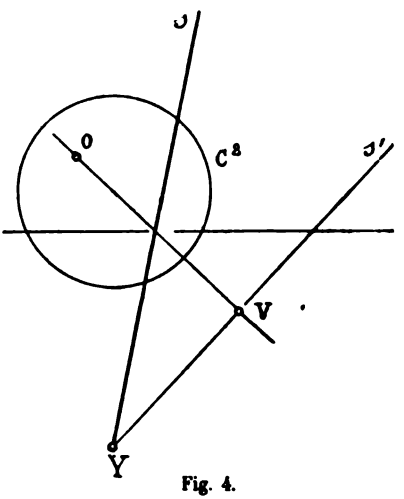


Fig. 4.

La propriété caractéristique de ces quartiques, qui ont un point double d'inflexion et deux points doubles ordinaires, est la suivante : « Les points de contact de la courbe avec ses deux tangentes issues d'un point double ordinaire sont alignés avec le point double d'inflexion Y, sur la droite séparée harmoniquement par les tangentes d'inflexion en Y de celle qui joint Y avec le troisième point double (**). »

(*) Si dans une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe, il y a plus de deux tangentes aux points doubles qui sont stationnaires, les autres tangentes aux points doubles sont aussi stationnaires. (*Sitzber. d. Wiener Akad. d. Wiss.*, Bd 85, S. 881.)

(**) En prenant les points doubles pour sommets du triangle de référence, et si Z est le point double d'inflexion, l'équation de la quartique peut se mettre sous la forme

$$(ay^2 + 2hxy + bx^2)z^2 + cx^2y^2 = 0,$$

la cubique polaire du sommet Y est

$$(az^2 + cx^2)y + hxz^2 = 0$$

et la droite conjuguée harmonique du côté $y = 0$ par rapport aux tangentes

Il découle immédiatement de la génération indiquée de la quartique que « deux points de la courbe alignés avec le point double d'inflexion sont séparés harmoniquement de ce dernier par la droite qui joint les deux autres points doubles », et que les tangentes en deux points alignés avec le point double d'inflexion vont se couper sur la droite qui joint les deux autres points doubles; on peut réunir ces deux théorèmes connus (*) en l'énoncé unique : « Une quartique rationnelle ayant trois points doubles, dont l'un est d'inflexion, est homologique-harmonique lorsque l'on prend le point double d'inflexion pour centre et la droite qui joint les deux autres points doubles pour axe d'homologie. »

Réciproquement, étant donnée une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe $C_6^4$ ayant un seul de ses trois points doubles d'inflexion, si $C^2$ est une conique inscrite dans l'angle des tangentes au point double d'inflexion Y, et passant par les points de contact $O_1$, $O_2$ des tangentes menées à $C_6^4$ par l'un des autres points doubles, par exemple de O : la transformée de $C^2$ est $C_6^4$ lorsque l'on prend $|O_1O_2| \equiv s$ pour axe, Y pour premier pôle et O pour deuxième pôle. En effet, $C_6^4$ et cette transformée ont en commun le point double Y avec les mêmes tangentes d'inflexion, le point double O avec les mêmes tangentes et les deux points simples $O_1$, $O_2$ aussi avec les mêmes tangentes, ce qui équivaut à dix-huit (8 + 6 + 4) points communs.

5. Le cas où le deuxième pôle et l'axe sont pôle et polaire par rapport à $C^2$ doit être considéré à part : en ce cas, le troi-

d'inflexion en Z est $hy + bx = 0$; cela posé, nous avons identiquement

$$[(ay^2 + 2hxy + bx^2)z^2 + cx^2y^2] - xz^2(hy + bx) = y[(az^2 + cx^2)y + hxz^2]$$

et le théorème est démontré. L'absence du terme linéaire en $z$ dans l'équation de la quartique montre immédiatement que la courbe est *homologique-harmonique*, $x = y = 0$ étant le centre et $z = 0$ l'axe d'homologie.

(*) Amessoda, *Ueber rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten zum Theil oder ganz in Inflexionstangenten übergehen.* (Sitzber. der W. Ak., Bd 79.)

sième point double V se réunit au point double O formant un tacnode en O; la polaire du point double d'inflexion par rapport à $C^2$ est la tangente tacnodale. La transformée est donc une quartique de sixième classe ayant un tacnode en O et un point double d'inflexion en Y : on pourrait l'appeler *cappa projectif*, car si $C^2$ est un cercle ayant son centre en O, elle devient la courbe appelée *cappa* (*).

Les points de contact des tangentes menées à un cappa projectif par son tacnode sont donc alignés avec le point double d'inflexion et séparés harmoniquement par ce point et la tangente tacnodale.

Le *cappa* (proprement dit) est donc une quartique circulaire de la sixième classe ayant un tacnode en son centre et un point double d'inflexion à l'infini sur la perpendiculaire à la tangente tacnodale; les deux tangentes qui arrivent au cappa du tacnode sont les droites isotropes issues de ce point, autrement dit, le tacnode est aussi le foyer singulier de la courbe. Les tangentes d'inflexion au point double à l'infini touchent $C^2$ sur la tangente tacnodale; le cercle $C^2$ et le *cappa*, ayant entre eux double contact aux points circulaires à l'infini, ont quatre autres points communs qui, par la définition même de la transformation, sont sur les bissectrices des angles des axes. Observons aussi que le *cappa* n'a pas de tangentes doubles proprement dites, car les quatre de ces tangentes, possédées en général par une quartique de la sixième classe, sont absorbées par les deux tangentes au point double d'inflexion et par la tangente tacnodale; quant aux points d'inflexion, deux tombent en le point double à l'infini et les quatre autres sont absorbés par le tacnode.

**6.** Par la transformation qui nous occupe, on peut obtenir les cubiques de la quatrième classe, comme transformées de coniques de deux manières différentes :

*a*) en prenant les deux pôles sur une tangente à $C^2$;

*b*) en prenant pour axe une tangente à $C^2$.

(*) Brocard, *loc. cit.*, p. 8.

Dans le premier cas, la transformée est une $C_4^3$ ayant un point d'inflexion au premier pôle Y, touchant | YO | au deuxième pôle O, et passant par les deux points $O_1$, $O_2$ de rencontre de $C^2$ avec $s$; ces deux points sont les antitangentiels de O; la tangente stationnaire en Y et l'autre tangente, outre | Y O |, de $C^2$ issue de Y; le point double est l'intersection de la droite menée par Y et conjuguée à $s$, avec celle qui unit O au conjugué harmonique de Y par rapport à $O_1$, $O_2$.

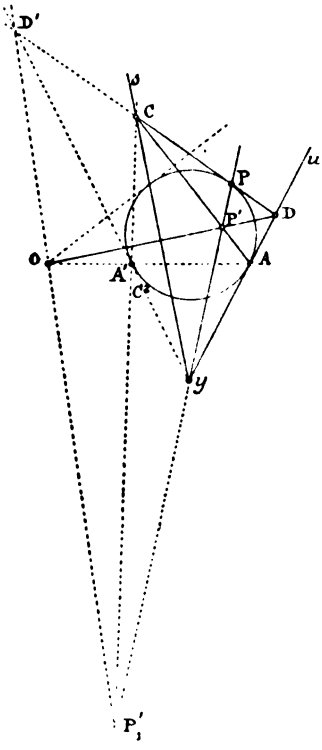


Fig. 5.

Réciproquement, étant donnée une $C_4^3$, si O est l'antitangentiel d'un point réel d'inflexion Y, et si $O_1$, $O_2$ sont les deux antitangentiels de O, $t$ la tangente (stationnaire) en Y : à chaque conique $C^2$ passant par les deux points $O_1$ $O_2$ et tangente aux droites | Y O |, $t$, correspond $C_4^3$ par la transformation [Y, O, | $O_1$ $O_2$ |].

Quand l'axe $s$ touche $C^2$ au point O, la transformée est une $C_4^3$ ayant un point d'inflexion au premier pôle Y, et touchant $C^2$ en O; le point double V se confond avec le deuxième pôle, la tangente stationnaire en Y est l'autre tangente de $C^2$ issue de Y, les deux antitangentiels $O_1$, $O_2$ de O sont alignés avec Y sur la droite $s$ harmoniquement séparée de | Y V | par $C^2$. Réciproquement, étant donnée une $C_4^3$, si O est l'antitangentiel d'un point d'inflexion Y et si $O_1$ et $O_2$ sont les antitangentiel de O, V le point double et $t$ la tangente en Y : la transformée de la conique $C^2$, passant par $O_1$ et $O_2$, touchant | Y O | $\equiv u$ en O et tangente à $t$, au moyen de [Y, V, $u$], est $C_4^3$.

7. Supposons maintenant que les deux pôles Y et O de la transformation soient conjugués par rapport à $C^2$, et soit $s$ la polaire de O par rapport à $C^2$ et A le point de contact d'une tangente à $C^2$ issue de Y. Si une tangente variable touche $C^2$ au point P et coupe respectivement $s$ et | Y A | aux points C et D, on reconnaît aisément que les droites | OD | et | AC | vont se couper en un point P' du rayon | YP | (*); il s'ensuit que la transformée de $C^2$ par [Y, O, | YA | ] est aussi sa transformée au moyen de [Y, A | Y C | ].

En choisissant convenablement la conique à transformer, ses pôles et l'axe de la transformation, on obtient de nouvelles générations pour la plupart des cubiques ayant reçu un nom, et l'on peut établir aisément pour ces courbes, non seulement les propriétés connues, mais aussi d'autres que je crois nouvelles.

*Conchoïde Slusienne générale.* — Si $C^2$ est une ellipse, prenons pour le pôle Y le point à l'infini dans la direction du petit axe, et soit $u$ la tangente au sommet A du grand axe. Prenons le deuxième pôle O sur le grand axe AA' à une distance $\overline{OA}$ de A égale en valeur absolue au demi petit axe; la transformée de $C^2$ au moyen de [Y, O, $u$] sera une conchoïde Slusienne (**) ayant le point double en O, le sommet en A, et pour asymptote d'inflexion la tangente à l'ellipse en A'.

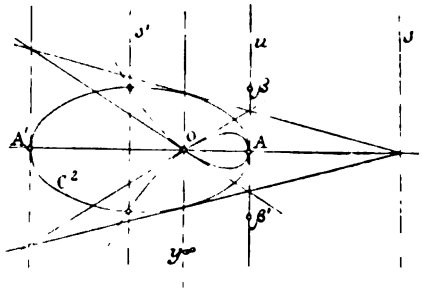


Fig. 6.

(*) En rejetant à l'infini la tangente | YA |, on tombe sur une propriété évidente de la parabole.

(**) La droite à l'infini coupe l'ellipse $C^2$ en deux points dont les tangentes, savoir les asymptotes imaginaires, vont couper $u$ aux points doubles de l'involution (A, $\infty$ ; $\beta$, $\beta'$), où $\overline{\beta' A} = \overline{A\beta} =$ à la moitié du petit axe; lorsque l'angle $\beta O \beta'$ est droit, $OA = A\beta$ et les points à l'infini outre Y, de la transformée sont les points circulaires.

Elle coupe $C^2$ sur la polaire $s$ de l'O, et sur la droite $s'$ harmoniquement séparée de $s$ par le point double et l'asymptote d'inflexion; les deux points antitangentiels du sommet A sont les intersections de $C^2$ avec la polaire de O; les tangentes au point double sont les diagonales du quadrilatère simple formé par les deux tangentes à l'ellipse en AA′ et par celles qui la touchent sur | YO |, etc.

On obtient la même conchoïde en appliquant à la même ellipse $C^2$ la transformation [Y, A, $s$].

*Strophoïde droite.* — Lorsque $C^2$ est un cercle ayant O pour centre, si Y est à l'infini et $\overline{A'A}$ un diamètre perpendiculaire à la direction Y, la transformée de $C^2$ par [Y, O, $u$] est la strophoïde droite ayant le nœud en O et le sommet en A; la tangente au cercle en A′ est l'asymptote d'inflexion, les tangentes en O sont rectangulaires. La droite des points d'inflexion est symétrique de l'asymptote d'inflexion par rapport au centre du segment $\overline{OA}$; la médiatrice du segment $\overline{A'O}$ coupe la cubique sur le cercle $C^2$; les tangentes de la strophoïde aux points circulaires à l'infini vont se couper au sommet A, etc. On obtient la même strophoïde en appliquant au cercle $C^2$ la transformation pseudo-newtonienne [Y, O, $\infty$] (*).

*Trisectrice de Maclaurin.* — $C^2$ est une ellipse dont le petit axe $\overline{A'A}$ est les $\frac{2}{3}$ du grand axe, $u$ sa tangente au sommet A, le premier pôle Y est à l'infini de $u$, $A'O = \frac{1}{3}OA$; la polaire $s$ du deuxième pôle O par rapport à $C^2$ est symétrique de $u$ par rapport à O; cela posé, en appliquant à $C^2$ soit la transformation [Y, O, $u$], soit la [Y, A, $s$], on obtient la trisectrice de Maclaurin ayant le sommet en A, le nœud en O et la tangente à l'ellipse en A′ par asymptote d'inflexion. La cubique est circulaire; les tangentes au nœud forment l'angle $\frac{\pi}{3}$; la distance $\overline{OA'}$ du nœud à l'asymptote d'inflexion est $\frac{1}{3}$ de celle du nœud au sommet. La droite des points d'inflexion est à l'infini et *les deux*

(*) Dans la transformation pseudo-newtonienne, une translation de la courbe primitive dans la direction du premier pôle n'altère pas la transformée, comme il est évident soit géométriquement, soit par l'analyse. (Cf. Henkel, *loc. cit.*, § 4.)

*points d'inflexion imaginaires de la courbe sont les deux points circulaires à l'infini.* Observons encore que la cubique coupe $C^2$, d'abord en deux points réunis en A sur $u$, ensuite sur la polaire $s$ de O et sur la droite $s'$, harmoniquement séparée de $s$ par l'asymptote d'inflexion et le point double (*).

*Folium de Descartes.* — Prenons maintenant pour $C^2$ une ellipse dont l'excentricité $e = \frac{1}{2}$. Soit O un foyer (à gauche), A' le sommet le plus proche de O, et A l'autre sommet; nous avons $2\overline{AO} = OA$ et la distance de la directrice $s$ (polaire de O) au sommet A' est égale au demi grand axe. En dénotant comme auparavant par $u$ la tangente en A et par Y le point à l'infini de $u$, nous avons pour transformées de $C^2$, soit au moyen de [Y, O, $u$], soit au moyen de [Y, A, $s$], le *folium de Descartes* ayant le sommet en A et le nœud en O; la tangente à l'ellipse en A' et l'asymptote d'inflexion et les tangentes en O sont rectangulaires. La droite des points d'inflexion est à l'infini, et si nous prenons sur la tangente $u$ du sommet A les segments $AB = -AC = OA : \sqrt{3}$ (égaux à la moitié du petit axe de $C^2$), les rayons doubles de l'involution quadratique $O(A, \infty ; B, C)$ marquent sur la droite à l'infini les deux points d'inflexion imaginaires du *folium*.

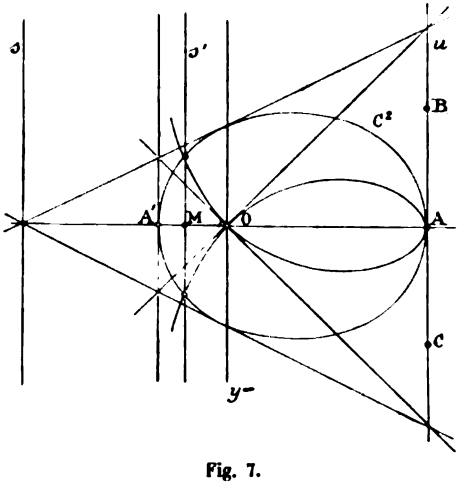



Fig. 7.

(*) En prenant pour $C^2$ une ellipse dont le petit axe A'A est $\frac{1}{2}$ du grand axe, on obtient la cubique circulaire considérée par M. Jerabek (*Mathesis*, octobre 1898). Voir aussi ma note sur la même cubique. (*Ibid.*, t. IX, pp. 87-89.)

**

Les points antitangentiels du sommet A sont les intersections de $C^2$ avec la directrice $s$, et les deux autres points communs au *folium* et à l'ellipse $C^2$ peuvent se construire en observant que la droite $s'$, séparée harmoniquement de $s$ par le nœud et l'asymptote d'inflexion, coupe $|A'A|$ en un point M tel que $A'M = \frac{2}{5} A'O$.

*Folium parabolique droit.* — $C^2$ est une parabole ayant son foyer en O et son sommet en A, $s$ est la directrice, $u$ la tangente au sommet, $s'$ la symétrique de $s$ par rapport à O : la transformée de $C^2$ par les deux transformations indiquées est le folium parabolique droit ayant le sommet en A et le nœud en O. Les tangentes en O sont rectangulaires et la droite à l'infini est tangente stationnaire; les deux antitangentiels de A sont les points où la parabole est coupée par sa directrice, et les deux autres intersections du *folium* avec la parabole sont sur $s'$. Les deux points d'inflexion imaginaires sont sur la parallèle à $u$ dont les distances à $u$ et à $s$ sont entre elles dans le rapport 1 : 2.

*Cubique mixte.* — $C^2$ est une parabole, A son point à l'infini, $u$ la droite à l'infini, Y le point à l'infini, de la tangente au sommet, O sur l'axe de la parabole : la cubique dérivée de $C^2$ par la transformation pseudo-newtonienne [Y, O, $u$] touche la parabole en son point à l'infini A, a un point double en O et la tangente au sommet A' de la parabole pour asymptote d'inflexion. Elle passe par les deux points où $C^2$ est coupée par la polaire $s$ de O, et ses tangentes en ces points sont parallèles à l'axe de symétrie; la droite des points d'inflexion est parallèle à $s$ et à une distance de cette droite égale à celle du point O. Cette cubique a été étudiée par M. Henkel sous le nom de *Tangentencurve* de la parabole (*); en particulier, si O est sur la directrice de la parabole $C^2$, nous avons la cubique appelée *mixte* par M. De Longchamps. En appliquant à la parabole $C^2$ la transformation [Y, $A^\infty$, $s$], on obtient la cubique de M. Henkel et celle de M. De Longchamps comme Roberval-liennes.

(*) *Inaugural Dissert.*, citée.

*Cubique d'Agnesi.* — $C^2$ est une ellipse dont le petit axe A'A est la moitié du grand axe; O et Y sont à l'infini dans les directions respectivement du petit et du grand axe, $u$ est la tangente

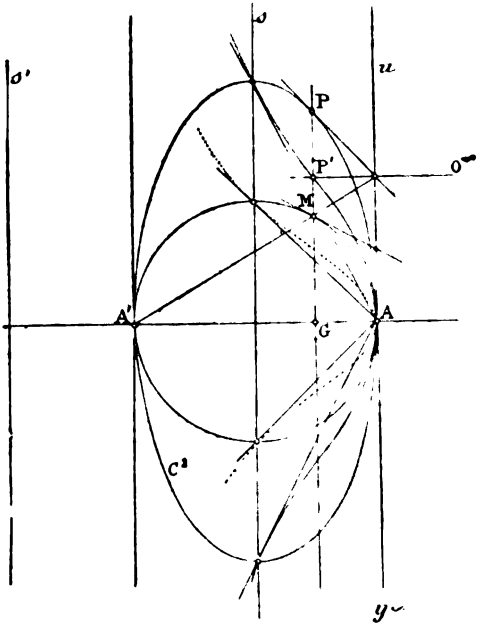



Fig. 8.

au sommet A, $s$ la droite du grand axe, $s'$ la droite symétrique de $s$ par rapport à la tangente au sommet A' : la transformée de $C^2$ soit par [Y, O∞ , $u$], soit par [Y, A, $s$] est la *versiera* d'Agnesi (*), et la première de ces générations montre qu'elle

(*) Si G est le pied de l'ordonnée du point P de l'ellipse, et $\omega$ l'intersection de la tangente en P avec l'axe |AY|, la droite |A'$\omega$| coupe le cercle décrit sur le diamètre $\overline{A'A}$ au centre M du segment $\overline{PG}$ : cela posé, les triangles semblables A'MG et A'$\omega$A donnent A'G : GM = A'A : A$\omega$, ou bien A'G : GM = A'A : GP', et cette proportion montre que le lieu de P' est bien celui défini par Agnesi. (*Instituzioni analitiche*, t. I, p. 381. Milano, 1748.)

est une Robervallienne de l'ellipse $C^2$. La *versiera* passe par les sommets de $C^2$ sur le grand axe, touche $C^2$ au sommet A, a un point double isolé à l'infini en O; la tangente à $C^2$ au sommet A' est asymptote d'inflexion. Les deux autres points d'inflexion réels de la cubique tombent sur la médiatrice du segment qui joint le centre de l'ellipse au sommet A, et on les construit par suite aisément; les antitangentiels du sommet A sont les points extrêmes du grand axe de $C^2$. Nous pouvons construire aussi les tangentes, imaginaires conjuguées, au point double comme il suit : le sommet A de la cubique, considéré comme cercle-point, marque sur l'asymptote d'inflexion deux points imaginaires conjugués qui sont projetés du point double suivant les deux tangentes cherchées.

Du cercle $C_1^2$ décrit sur le diamètre $\overline{A'A}$, on déduit, par les deux transformations indiquées, une cubique ayant même sommet A, même asymptote d'inflexion (la tangente en A') et les ordonnées perpendiculaires à $|A'A|$ moitiés de celles de la *versiera*; c'est la courbe que l'on a quelquefois confondue avec l'*Agnesienne* et que M. Loria appelle *pseudo-versiera* (*).

**8.** Nous allons traiter des cas relativement assez simples où la courbe primitive $C_n^n$ est d'un degré supérieur à 2. Supposons d'abord que $C_n^n$ soit une cubique cuspidale en position générale : nous avons $m = n = 3$, la transformée est du sixième ordre et du genre zéro, a un point triple d'inflexion au premier pôle Y, un point triple ordinaire au deuxième pôle O et $\frac{1}{2}[(2 \times 3 - 3)3 - 1] = 4$ points doubles dont un est un rebroussement de la première espèce, dû au rebroussement de la courbe primitive; on en conclut $\delta = 9$, $\varkappa = 1$ et la classe de la transformée est 9.

Si la courbe primitive $C_n^3$ a un point simple au premier

(*) *Versiera, Visiera e Pseudo-versiera*. (*Bibliotheca mathematica* de M. G. Enestrœm, Stockholm, 1897, pp. 7-12.) Voir aussi les notes de MM. D'Arcais, Peano et Rébière dans l'*Interméd. des Mathém.*, année 1895, p. 83.

pôle Y, sa transformée (voir le n° 5, *a*) est une quintique unicursale ayant en Y un point triple d'inflexion avec une coïncidence (deux des tangentes stationnaires vont tomber sur la tangente de $C_4^3$ en Y), un point double au deuxième pôle, et deux autres points doubles que l'on détermine sans peine en observant que dans le cas actuel la courbe C' est une conique (*); comme le point triple est équivalent à deux points doubles ordinaires et un rebroussement de première espèce, nous avons $\delta = 3 + 2 = 5$, $\varkappa = 1$ et la transformée est de la classe 7.

Si la courbe primitive est une cubique $C_4^3$ de la quatrième classe ayant un point d'inflexion au premier pôle Y et son point double au deuxième pôle O, sa transformée est le produit d'un faisceau quadruple Y et d'un faisceau double O; cette dernière courbe est donc unicursale et du sixième degré, et a en O un point double avec les mêmes tangentes de $C_4^3$ (voir § 5 *b*); Y est un point quadruple spécial d'inflexion, trois des tangentes stationnaires en ce point coïncident avec la tangente stationnaire de $C_4^3$ et l'autre est la tangente à $C_4^3$ issue de Y; la sextique possède encore trois autres points doubles (**).

Considérons encore la transformée pseudo-newtonienne du *folium parabolique droit* en prenant le sommet A du folium pour deuxième pôle. La droite | AY | se détache une première fois de la transformée, car elle est tangente à la primitive (n° 3, *d*), et une deuxième fois, car Y est un point simple (n° 3, *a*); la droite à l'infini s'en détache deux fois, car elle est tangente stationnaire en Y (n° 3, *c*). La courbe résiduelle est donc une cubique parabolique ayant un point d'inflexion en Y et un point isolé en A (***).

Si la courbe donnée est une quartique tricuspidale, $C_3^4$ en

(*) Salmon, *Courbes planes*, p. 259 de l'édition française.

(**) On ne connaît pas, je crois, l'abaissement de la classe dû à la singularité extraordinaire rencontrée au point quadruple Y. Pour le cas du *folium de Descartes*, comparez Brocard, *loc. cit.*, p. 10.

(***) Si l'équation du folium parabolique, rapporté à l'axe de symétrie et à la tangente au sommet, est $x(x + a^1) = ay^2$, celle de sa transformée pseudo-newtonienne est $9x^5 = a(3x^2 + 4y^2)$.

position générale, sa transformée est unicursale et du degré 7, a un point triple d'inflexion au premier pôle et un point quadruple ordinaire au second pôle; comme la courbe C' dans le cas actuel est du degré $\frac{1}{2}[(2.4 - 3)3 - 3] = 6$, et que des six points doubles auxquels elle donne lieu il y en a trois qui sont des rebroussements de première espèce, correspondant aux trois rebroussements de la courbe primitive, nous avons $\delta = 6 + 3 + 3 = 12$, $\varkappa = 3$, et la transformée est de la classe 9.

Milan, le 20 mai 1899.

LES

# PERMUTATIONS CARRÉES

## DE BASE 6

par Gaston TARRY

(Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 3e série, t. II, 1900.)

Les écussons. — Dans les 36 cases d'un échiquier de base 6, répartissons les 6 premiers chiffres, répétés chacun 6 fois, de manière que dans chaque rangée et dans chaque colonne on trouve les 6 chiffres.

L'abaque ainsi obtenu sera une *permutation carrée* de base 6.

Considérons les permutations d'un couple de rangées ou de colonnes.

La substitution qui a pour effet de remplacer l'une des permutations par l'autre est circulaire, ou composée de plusieurs substitutions circulaires.

Nous représenterons la relation existant entre ces deux permutations :

1° Par $\alpha$, quand la substitution qui les identifie est composée de trois transpositions;

2° Par $\beta$, quand la substitution est composée d'une transposition et d'un cycle de 4 chiffres;

3° Par $\gamma$, quand la substitution est composée de deux cycles de 3 chiffres;

4° Par $\delta$, quand la substitution est circulaire.

Il n'y a pas d'autres combinaisons.

Construisons une permutation carrée quelconque :

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 3 6 5 2 1
5 6 2 1 3 4
6 4 5 2 1 3

Les relations entre la première rangée et chacune des cinq autres sont respectivement $\alpha$, $\beta$, $\delta$, $\delta$, $\beta$.

La suite $\alpha$, $\beta$, $\delta$, $\delta$, $\beta$ figure la relation de la première rangée avec les autres.

A chaque rangée correspond de la sorte une suite.

Plaçons ces suites les unes au-dessous des autres. Pour la permutation considérée, nous aurons le tableau suivant :

$\alpha$ $\beta$ $\delta$ $\delta$ $\beta$
$\alpha$ $\delta$ $\gamma$ $\gamma$ $\delta$
$\beta$ $\delta$ $\delta$ $\delta$ $\gamma$
$\delta$ $\gamma$ $\delta$ $\gamma$ $\delta$
$\delta$ $\gamma$ $\delta$ $\gamma$ $\delta$
$\beta$ $\delta$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$

Dans ce tableau des cycles, écrivons les lettres par ordre alphabétique dans chaque rangée, puis disposons aussi les rangées dans l'ordre alphabétique.

Le nouveau tableau sera le *schéma* des rangées.

En opérant de même pour les colonnes, leurs suites étant placées en rangées, nous obtiendrons le schéma des colonnes

J'appelle *écusson* ce couple de schémas.

Pour la permutation qui nous occupe, on a cet écusson :

| | |
|---|---|
| $\alpha$ $\beta$ $\beta$ $\delta$ $\delta$ | $\beta$ $\beta$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$ |
| $\alpha$ $\gamma$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$ | $\beta$ $\beta$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$ |
| $\beta$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$ $\delta$ | $\beta$ $\beta$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$ |
| $\beta$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$ $\delta$ | $\beta$ $\beta$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$ |
| $\gamma$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$ $\delta$ | $\beta$ $\delta$ $\delta$ $\delta$ $\delta$ |
| $\gamma$ $\gamma$ $\delta$ $\delta$ $\delta$ | $\beta$ $\delta$ $\delta$ $\delta$ $\delta$ |

Chaque permutation carrée se trouve ainsi caractérisée par un écusson.

Une question se pose immédiatement.

Combien existe-t-il de schémas et d'écussons dans les permutations carrées de base 6 ?

Il y a 16 schémas. Les voici :

**I**

α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ

**II**

α α β γ δ
α α β γ δ
α α β γ δ
α α β γ δ
α β β δ δ
α β β δ δ

**III**

α α α α α
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ

**IV**

α α α δ δ
α β β γ γ
α β β γ γ
α β β γ γ
β β β γ δ
β β β γ δ

**V**

α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ

**VI**

α α α γ γ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ

**VII**

α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ

**VIII**

α β β β β
α δ δ δ δ
β β β γ δ
β β β γ δ
β β β γ δ
β β β γ δ

**IX**

α β β β β
α δ δ δ δ
β γ γ γ δ
β γ γ γ δ
β γ γ γ δ
β γ γ γ δ

**X**

α β β δ δ
α γ γ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ

**XI**

β β β β β
β β β β β
β β β β β
β β β β β
β β β β β
β β β β β

**XII**

β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ

**XIII**

β β β δ δ
β β β δ δ
β β β δ δ
β β β δ δ
β δ δ δ δ
β δ δ δ δ

**XIV**

β β γ δ δ
β β γ δ δ
β β γ δ δ
β β γ δ δ
β δ δ δ δ
β δ δ δ δ

**XV**

β β δ δ δ
β β δ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ

**XVI**

γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ

Il y a 16 écussons, qu'il suffit de représenter par leurs couples de schémas :

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| I + I | II + II | III + XI. | IV + V |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| V + V | VI + XII | VII + VII | VIII + VIII |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| IX + XIII | X + XIV | XI + XI | XII + XII |
| 13 | 14 | 15 | 16 |
| XIII + XIII | XIV + XIV | XV + XV | XVI + XVI |

Quand les deux schémas d'un écusson sont différents, on peut les alterner, puisque cette transposition revient à déplacer le spectateur de manière que les rangées lui paraissent des colonnes et réciproquement.

Les permutations types. — Nous disons que deux permutations carrées sont *semblables*, lorsqu'elles peuvent se transformer l'une en l'autre par des permutations de rangées, de colonnes et de chiffres.

Réunissons dans une même famille toutes les permutations carrées semblables et choisissons-en une qui sera le *type* de cette famille.

Avec l'aide des écussons, j'ai trouvé rapidement que le nombre de familles était égal à 17, et j'ai choisi pour les représenter les 17 types suivants :

| 1 Écusson 1 | 2 Écusson 2 | 3 Écusson 3 | 4 Écusson 4 |
|---|---|---|---|
| 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6 |
| 2 1 4 3 6 5 | 2 1 4 3 6 5 | 2 1 4 3 6 5 | 2 1 4 3 6 5 |
| 3 5 1 6 2 4 | 3 5 1 6 2 4 | 3 5 1 6 2 4 | 3 5 1 6 2 4 |
| 4 6 2 5 1 3 | 4 6 2 5 1 3 | 4 6 5 1 3 2 | 4 6 5 1 3 2 |
| 5 3 6 1 4 2 | 5 4 6 1 3 2 | 5 4 6 2 1 3 | 5 3 6 2 4 1 |
| 6 4 5 2 3 1 | 6 3 5 2 4 1 | 6 3 2 5 4 1 | 6 4 2 5 1 3 |

**5** Écusson 5

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 6 5 2 1 3
5 3 6 1 2 4
6 4 2 5 3 1

**6** Écusson 6

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 5 6 1 2 3
5 6 1 2 3 4
6 3 2 5 4 1

**7** Écusson 7

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 3 6 5 2 1
5 6 1 2 3 4
6 5 2 1 4 3

**7bis** Écusson 7

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 3 6 5 2 1
5 6 1 2 4 3
6 5 2 1 3 4

**8** Écusson 8

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 6 5 1 2 3
5 3 6 2 1 4
6 4 2 5 3 1

**9** Écusson 9

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 6 5 1 2 3
5 4 6 2 3 1
6 3 2 5 1 4

**10** Écusson 10

1 2 3 4 5 6
2 1 4 5 6 3
3 4 5 6 1 2
4 6 1 5 2 3
5 3 6 2 4 1
6 5 2 1 3 4

**11** Écusson 11

1 2 3 4 5 6
2 1 4 5 6 3
3 4 1 6 2 5
4 5 6 1 3 2
5 6 2 3 1 4
6 3 5 2 4 1

**12** Écusson 12

1 2 3 4 5 6
2 3 1 5 6 4
3 1 2 6 4 5
4 5 6 1 3 2
5 6 4 3 2 1
6 4 5 2 1 3

**13** Écusson 13

1 2 3 4 5 6
2 1 4 5 6 3
3 4 1 6 2 5
4 5 6 1 3 2
5 6 2 3 4 1
6 3 5 2 1 4

**14** Écusson 14

1 2 3 4 3 6
2 1 4 5 6 3
3 4 2 6 1 5
4 5 6 3 2 1
5 6 1 2 3 4
6 3 5 1 4 2

**15** Écusson 15

1 2 3 4 3 6
2 1 4 5 6 3
3 4 2 6 1 5
4 6 5 2 3 1
5 3 6 1 2 4
6 5 1 3 4 2

**16** Écusson 16

1 2 3 4 5 6
2 3 1 5 6 4
3 1 2 6 4 5
4 6 5 2 1 3
5 4 6 3 2 1
6 5 4 1 3 2

Comme on le voit, chaque famille possède son écusson propre, à l'exception des familles 7 et 7*bis*, qui ont le même écusson.

La considération des écussons permet de résoudre facilement le problème suivant :

Étant donnée une permutation carrée quelconque, trouver sa famille et effectuer les changements nécessaires pour l'identifier au type de cette famille.

On forme son écusson qui désigne la famille. Les deux tableaux de ses cycles serviront de guides pour les changements des rangées et des colonnes, puisque les tableaux cycliques doivent être amenés à être identiques à ceux du type. Les changements indiqués étant opérés, il suffira le plus souvent de permuter les chiffres de manière à remplacer la première rangée de la nouvelle permutation carrée par celle du type. Dans le cas particulier où l'écusson porte le n° 7, on verra aisément auquel des types 7 ou 7$^{bis}$ la permutation carrée doit être identifiée.

Comme exemple, prenons la permutation déjà examinée :

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 3 6 5 2 1
5 6 2 1 3 4
6 4 5 2 1 3

Son écusson X + XIV la place dans la famille 10.
Elle peut donc être identifiée au type 10 :

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 6 1 5 2 3
5 3 6 2 4 1
6 5 2 1 3 4

Nous obtiendrons, en changeant l'ordre des rangées,

2 1 4 3 6 5
1 2 3 4 5 6
4 3 6 5 2 1
6 4 5 2 1 3
3 5 1 6 4 2
5 6 2 1 3 4

puis l'ordre des colonnes :

6 5 2 1 4 3
5 6 1 2 3 4
2 1 4 3 6 5
1 3 6 4 5 2
4 2 3 5 1 6
3 4 5 6 2 1

Enfin, multiplions toutes les permutations des rangées par la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, et nous tomberons sur le type 10.

Si l'écusson s'était présenté sous la forme alternée XIV + X, il aurait fallu commencer par transformer les rangées en colonnes et réciproquement.

Application au problème des 36 officiers. — Pour résoudre ce problème, il faudrait pouvoir superposer case à case deux permutations carrées de base 6, de telle manière que chaque chiffre de l'une d'elles soit superposé aux 6 chiffres de l'autre.

Dans les recherches, il sera toujours permis de changer l'ordre des rangées et des colonnes d'une superposition, puis de permuter isolément les chiffres dans chacune des permutations carrées. En effet, si la superposition résout le problème, toutes celles obtenues par les changements indiqués fourniront des solutions, et réciproquement, si la superposition ne résout pas le problème, il en sera de même des transformées.

Le problème ne peut donc être résolu que si l'on parvient à superposer à l'un des 17 types une seconde permutation carrée, de manière à satisfaire aux conditions exigées, et cela suffit.

Dans la seconde permutation carrée, nous ne pouvons plus changer l'ordre des rangées et des colonnes, mais on demeure libre de permuter les chiffres. En conséquence, on pourra toujours représenter sa première rangée par 1, 2, 3, 4, 5, 6.

En employant cette méthode, j'ai constaté que le problème ne comportait pas de solution.

Il faut moins de 24 heures de calculs bien dirigés pour obtenir ce résultat. La démonstration de l'impossibilité de résoudre le problème des 36 officiers, nécessite moins de temps que la recherche du nombre des dispositions rectilignes des dés d'un jeu de dominos allant jusqu'au double-huit.

# MATHESIS

# MATHESIS

## RECUEIL MATHÉMATIQUE

## A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

## ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

**P. MANSION** ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége,
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

*Ut pictura mathesis*
PH. BEKTON.

---

*TROISIÈME SÉRIE.*

**TOME I. — ANNÉE 1901.**

(TOME XXI DE LA COLLECTION).

---

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
23, RUE DU CALVAIRE, 23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1901

## ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME., (ou JME.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué d'abord par G. DE LONGCHAMPS, ensuite par G. MARIAUD.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(3), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

# PRÉFACE.

Le modeste recueil mathématique que nous avons fondé en 1881 est entré dans la vingt-et-unième année de son existence. Grâce au nombre toujours croissant de nos abonnés, nous avons pu considérablement augmenter le nombre de pages que nous avions promis de publier annuellement (*) et par suite, il nous a été possible de réaliser, mieux que nous ne l'avions espéré, les promesses de notre programme.

Ce programme correspond essentiellement à la partie élémentaire des mathématiques supérieures et à la partie supérieure des mathématiques élémentaires. Il comporte la publication 1° d'articles originaux; 2° de discussions relatives à des points controversés de méthodologie mathématique; 3° de solutions de questions choisies; 4° d'articles bibliographiques et biographiques et d'extraits analytiques.

Les articles ou mémoires originaux n'ont pas manqué de 1881 à 1900. On peut trouver dans *Mathesis* de nombreuses recherches sur les sujets les plus variés : la géométrie récente (avec un exposé méthodique de cette branche nouvelle de la science), les aires approchées, les équations différentielles linéaires, les transformations linéaires et quadratiques, le

(*) En 1880, nous avions annoncé que nous publierions annuellement 192 pages grand in-8°, soit en vingt ans 3840 pages. Nous en avons publié en réalité 6940, soit 347 en moyenne par année, c'est-à-dire, 80 p. °/₀ de plus.

calcul symbolique, les nombres parfaits, divers systèmes de coordonnées, la théorie élémentaire des fonctions d'une variable imaginaire, la géométrie intrinsèque, la courbure et la torsion en géométrie projective, un précis et des articles nombreux de géométrie non euclidienne, etc. Sur plusieurs des sujets que nous venons d'énumérer, nous osons dire qu'il y a dans *Mathesis*, des travaux dont l'équivalent ne se trouve nulle part.

Les questions controversées de méthodologie mathématique ne peuvent guère être traitées dans les manuels élémentaires. C'est pourquoi nous y avons attaché une importance spéciale. Il a paru, dans *Mathesis*, des études concernant la théorie élémentaire des maxima et des minima, l'homogénéité, les fractions périodiques, les fractions continues, les radicaux, la théorie des limites, les infiniment petits, le postulatum d'Euclide, les figures équivalentes, la notion de longueur d'une courbe et d'aire d'une surface courbe, divers principes du calcul différentiel et de géométrie projective, etc. Nous avons touché incidemment, à propos d'articles bibliographiques, à un grand nombre d'autres points; nous y reviendrons encore. En particulier, toutes les questions qui tiennent de près ou de loin à l'emploi de l'infini en mathématiques, continueront à être examinées avec soin, afin de provoquer les réflexions de nos lecteurs et surtout de prémunir les jeunes gens contre des conceptions fausses, obscures ou arbitraires.

La moitié de chaque numéro du journal est consacrée aux solutions de *questions proposées* dans les livraisons antérieures. Ces questions sont extrêmement utiles aux élèves et aux professeurs. Les exercices contenus dans beaucoup de manuels sont insuffisants, trop peu variés et si l'on peut ainsi dire, trop connus; on les rencontre, en effet, dans tous les recueils. En proposant de nombreuses questions nouvelles, nous avons voulu exciter l'émulation dans la jeunesse des écoles, développer le goût des recherches originales et vulgariser les *procédés particuliers de solution* qui ne se prêtent pas toujours à un enseignement régulier. Nous avons fait tout notre possible pour publier dans *Mathesis* des solutions *vraiment complètes* des questions proposées, en comparant attentivement les réponses données par nos différents collaborateurs et en les accompagnant de commentaires à la fois pédagogiques, scientifiques et bibliographiques.

Les *questions d'examen* permettent aux aspirants-élèves des écoles

spéciales de juger par eux-mêmes de leurs connaissances mathématiques, de se familiariser avec les épreuves qu'ils doivent subir et de s'y préparer convenablement en abordant des problèmes peu connus. Nous insérons aussi, parmi les questions d'examen, les propositions nouvelles, suffisamment intéressantes, que nous envoient nos jeunes abonnés.

Dans la *bibliographie*, nous avons jusqu'ici pu faire connaître à nos lecteurs, à la fois, de bons manuels destinés aux élèves, et des ouvrages dépassant le cadre des programmes officiels, mais indispensables à ceux qui veulent posséder une instruction mathématique sérieuse. Nous avons aussi publié assez d'extraits analytiques de mémoires ou d'articles pouvant intéresser nos abonnés (méthode des isopérimètres; théorie des fonctions hyperboliques, etc.). Nous continuerons à signaler les meilleurs ouvrages mathématiques paraissant en France, en Belgique et ailleurs, et à analyser les articles les plus remarquables des revues analogues à la nôtre.

L'*histoire des mathématiques* n'a pas été négligée dans notre recueil; nous y avons publié des biographies plus ou moins détaillées de beaucoup de géomètres : Weierstrass, Smith, Sylvester, Cayley, Lie, Tchebychef, Kronecker, Kummer, Ribaucour, Brioschi, Catalan, Gilbert, etc., et en outre, diverses notices historiques sur des questions spéciales.

Un grand nombre de collaborateurs belges et étrangers, parmi lesquels nous devons signaler tout spécialement M. Brocard, ont bien voulu nous accorder leur concours le plus bienveillant. Citons MM. Barbarin, Barisien, Bergmans, Boutin, Ph. Breton, Cardoso-Laynes, Casey, Catalan, Cavallin, E. Cesáro, Chomé, Cristesco, Dauge, Demoulin, Dépres, De Tilly, Dewulf, Droz-Farny, Duran-Loriga, Emmerich, Fauquembergue, Fontené, Geiin, Gilbert, Gob, Goedseels, S. Günther, Habich, Hermite, Jamet, Jeřabek, Laisant, Lampe, Lemoine, Le Paige, de Longchamps, G. Loria, Ed. Lucas, Mandart, Mister, d'Ocagne, Poulain, Peano, Pirondini, Realis, Retali, Ripert, de Rocquigny, Schoentjes, Schoute, Servais, Stuyvaert, Sylvester, G. Tarry, Teixeira, de la Vallée Poussin, H. Van Aubel, Verstraeten, Vigarié, Wasteels, Weill, etc.

Le programme très varié de *Mathesis* ne peut être réalisé dans les limites d'une seule année; mais nous comptons sur la confiance persévérante de nos abonnés. Jusqu'ici le succès n'a pas fait défaut à notre entreprise, comme le prouvent les noms de nos collaborateurs et l'accueil

fait, à l'étranger, à nos articles et à nos questions. Mais il faut que ce succès soit durable, pour que nous puissions apporter à notre revue toutes les améliorations désirables. Nous faisons donc appel au zèle de ceux qui nous ont aidés jusqu'ici et de tous ceux qui ont à cœur les progrès de l'enseignement des mathématiques.

Un mot sur le nom et la devise de notre journal, pour nos nouveaux abonnés.

Μάθησις, en grec classique, signifie *science*, *doctrine;* en latin ancien, *mathesis* = astrologie et, quelquefois, *mathématiques;* en latin moderne, le dernier sens a prévalu, comme si les mathématiques formaient la science par excellence. Le spirituel Terquem, à propos de ce nom de *Mathesis* donné aux mathématiques par les modernes, cite le passage si connu de la Bible : « Dieu a tout arrangé avec nombre, poids et mesure (*Sap.*, XI, 21), » puis il fait cette remarque : « Si, dans les temps modernes, les sciences physiques ont fait des progrès si considérables, c'est qu'on a suivi, *salva venia*, la voie divine » (N. A. M., 1861, *Bull. bibl.*, p. 58).

Quant à notre devise : *Ut pictura Mathesis!* (Que les mathématiques deviennent une peinture!) imitée d'Horace, elle exprime, sous une forme un peu paradoxale, la haute utilité d'une étroite alliance entre les abstractions de l'analyse et les intuitions de la géométrie. Tandis qu'au point de vue philosophique, les mathématiques tendent à se réduire à l'arithmétique pure, au point de vue de l'enseignement et de l'invention, elles prennent de plus en plus un caractère intuitif et graphique. Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler la géométrie descriptive de Monge, la géométrie projective de Poncelet, la théorie de la rotation des corps de Poinsot, la statique graphique de Culmann, la théorie géométrique des imaginaires d'Argand, celle des vecteurs et des quaternions de Hamilton, la théorie des abéliennes de Riemann et même, en analyse pure, la terminologie géométrique de Lie relative aux espaces à $n$ dimensions. *Ut pictura Mathesis* exprime donc l'une des tendances les plus caractéristiques des mathématiques modernes et ces mots peuvent être acceptés comme devise par les jeunes géomètres.

1er janvier 1901. P. Mansion, J. Neuberg.

# MATHESIS

## DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DU PLAN,

par C. J. Kool, ancien ingénieur des Ponts et Chaussées des Pays-Bas.

Pour démontrer le théorème fondamental du plan, théorème d'après lequel le plan contient la droite menée par deux de ses points, sur toute sa longueur, il suffit évidemment qu'on établisse la possibilité de construire une surface qui se distingue par la propriété remarquable que je viens d'indiquer. Or, dans la présente note je me propose d'établir qu'une telle surface est, entre autres, celle, je la désignerai par S, qui se trouve engendrée lorsqu'une droite OA (fig. 1 et 2) tourne autour d'un de ses points O de manière à atteindre une autre position déterminée OB le plus promptement possible, dans des conditions de vitesse données. Je me propose d'établir, pour parler un langage plus nettement géométrique d'où la notion de « vitesse » soit exclue, que la propriété remarquable du plan dont il a été parlé ci-dessus se rencontre chez la surface S qui est engendrée quand une droite OA se meut autour d'un de ses points de façon qu'une partie quelconque de sa longueur, prise à partir du point O, décrive une aire minima entre les positions initiale et terminale de la droite : OA et OB.

Afin d'atteindre ce but, je relie deux points C et D, choisis à volonté dans la surface S, par une ligne CE'D, ligne d'une forme quelconque, située pourtant en dehors de cette surface, sinon entièrement, au moins en partie. Puis je construis une surface conique S' ayant cette ligne pour directrice et pour sommet le point O, et je développe cette surface sur la surface S à partir de la droite OG qui passe par les points O et C. Menant alors une droite OH par les points O et D, je commencerai par démontrer qu'après le développement dont il vient d'être parlé, la génératrice OH de la surface S' tombera au-delà de la droite OH de la surface S, par exemple suivant la droite OH'.

A cet effet, je ferai d'abord voir que si, après ce développement, cette génératrice OH de la surface S' tombait en deçà de la droite OH de la surface S, disons suivant OF, la droite OG pourrait être transportée

*dans la position OH plus promptement par la surface S' que par la surface S.*

*En effet, la somme de tous les déplacements infiniment petits, dont l'ensemble constitue le transport de la droite OG à la position OH par la surface S, a pour mesure l'étendue de l'aire Ω qui, dans cette surface est circonscrite 1° par une partie quelconque Oc de la droite OG, partie prise à partir du point O, 2° par la partie Od de la droite OH, de même longueur que Oc, et 3° par la courbe ced qui, dans la surface S, relie tous les points dont l'éloignement du point O est égal à Oc.*

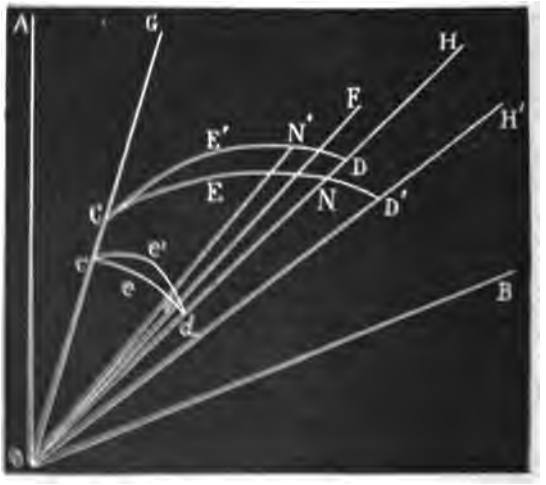



Fig. 1.

De même, la somme de tous les déplacements infiniment petits, dont la succession constitue le transport de la droite OG à la position OH par la surface S', a pour mesure l'étendue de l'aire Ω' qui, dans cette dernière surface, se trouve circonscrite 1° par la même partie susdite Oc de la droite OG, 2° par la droite Od et 3° par la courbe *a'd* passant par tous les points de la surface S' dont l'éloignement du point O est égal à la même distance Oc.

Et bien, dans la supposition faite ci-dessus, qu'après le développement de la surface conique S' sur la surface S la génératrice OH de la première surface coïncidait suivant OF, c'est-à-dire entre les droites OG et OH de la surface S l'aire Ω dont il vient d'être parlé, il évidemment la même étendue que celle qui, dans la surface S est limitée par le péri-

mètre O*cef*O, composé 1° de la droite O*c*, 2° de la droite O*f*, partie de OF égale à O*c*, et 3° de la développée *cef* de la courbe *ce'd* sur la surface S. Or, comme l'aire que j'ai désignée ci-dessus par Ω, est celle qui dans la surface S se trouve limitée par la figure O*ced*O, et que la courbe *cef*, qui, à partir du point *c*, coïncide évidemment avec la courbe *ced*, est moins longue que celle-ci, on serait, dans la supposition dont il s'agit, obligé d'attribuer à l'aire Ω′ moins d'étendue qu'à l'aire Ω, et, cela étant, de conclure que le transport de la droite OG à la position OH en suivant la surface S′ est moins long que celui qu'on opère en suivant la surface S.

Mais il est facile de se convaincre que si une telle conclusion était exacte, il y aurait moyen de conduire la droite OA à la position OB plus rapidement qu'en suivant la surface S d'une manière continue. On n'aurait, en effet, qu'à amener ladite droite, d'abord, de la position OA à la position OG en suivant cette dernière surface, puis de la position OG à la position OH en suivant la surface S′, enfin, de la position OH à la position OB en suivant de nouveau la surface S ; transport qui se trouverait être moins long que celui dans lequel on suivrait continuellement la surface S. Or un tel transport, moins long que ce dernier, est impossible, attendu que la surface S a précisément par construction cette propriété que le transport de la droite OA à la position OB ne puisse s'opérer plus vite qu'en suivant cette surface sans interruption.

Ainsi se trouve donc établi le fait, affirmé ci-dessus, qu'après le développement de la surface S′ sur la surface S, la génératrice OH de la première surface tombera au-delà de la droite OH qui appartient à la surface S.

Désignons sa nouvelle position par OH′.

Évidemment, le fait dont je viens de parler, implique cet autre fait que la développée CED′ de la courbe CE′D sur la surface S rencontre la droite OH ou son prolongement.

Supposons d'abord que le point de rencontre N se trouve sur la droite OD elle-même (fig. 1), et comparons alors, sous le rapport de leur longueur, les deux chemins suivants, chemins qui, l'un et l'autre, unissent les points C et D :

Le chemin I, qui se compose de la ligne CEN et de la droite ND;

Le chemin II, qui se compose des deux parties CN′ et N′D de la ligne

dans la position OH plus promptement par la surface S′ que par la surface S.

En effet, la somme de tous les déplacements infiniment petits, dont l'ensemble constitue le transport de la droite OG à la position OH par la surface S, a pour mesure l'étendue de l'aire Ω qui, dans cette surface est circonscrite 1° par une partie quelconque O*c* de la droite OG, partie prise à partir du point O, 2° par la partie O*d* de la droite OH, de même longueur que O*c*, et 3° par la courbe *ced* qui, dans la surface S, relie tous les points dont l'éloignement du point O est égal à O*c*.

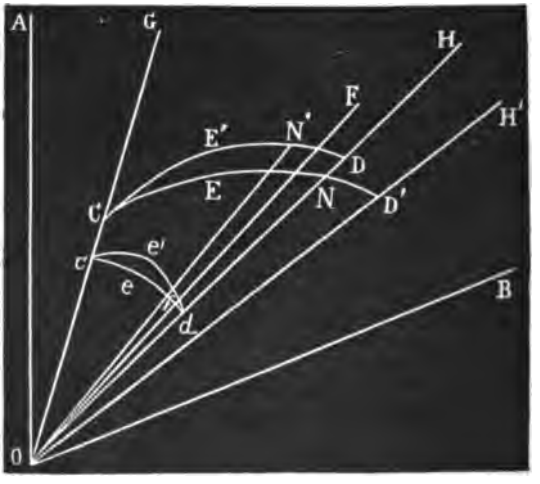



Fig. 1.

De même, la somme de tous les déplacements infiniment petits, dont la succession constitue le transport de la droite OG à la position OH par la surface S′, a pour mesure l'étendue de l'aire Ω′ qui, dans cette dernière surface, se trouve circonscrite 1° par la même partie susdite O*c* de la droite OG, 2° par la droite O*d* et 3° par la courbe *cc′d* passant par tous les points de la surface S′ dont l'éloignement du point O est égal à la même distance O*c*.

Eh bien, dans la supposition faite ci-dessus, qu'après le développement de la surface conique S′ sur la surface S la génératrice OH de la première surface tomberait suivant OF, c'est-à-dire entre les droites OG et OH de la surface S, l'aire Ω′ dont il vient d'être parlé, a évidemment la même étendue que celle qui, dans la surface S est limitée par le péri-

mètre [illegible]
OF [illegible]
face S. [illegible]
dans la [illegible]
courbe [illegible]
courbe [illegible]
dont il s'agit [illegible]
et, cela [illegible]
tion OH [illegible]
en suivant la [illegible]

Mais [illegible]
exacte. [illegible]
plus rapidement [illegible]
n'aurait, en effet [illegible]
à la position [illegible]
à la position [illegible]
position [illegible]
verait [illegible]
la surface [illegible]
sible, [illegible]
proprement [illegible]
s'opérer [illegible]

[illegible]
loppement [illegible]
[illegible]
surface [illegible]

[illegible]

[illegible]
la [illegible]
la [illegible]

Supposons [illegible]
OD [illegible]
gueur, [illegible]
les [illegible]

Le [illegible]

Le [illegible]

CE'D; N' étant le point qui, sur cette dernière ligne, correspond au point N de sa développée CED' dans la surface S.

En sa qualité de droite, OD est plus court que tout autre chemin unissant les points O et D. Par conséquent, sa longueur est moindre que celle du chemin qui se compose de la droite ON' et de la partie N'D de la ligne CE'D, quelle que soit d'ailleurs la forme supposée à cette partie N'D. Or, la longueur de OD est la somme des longueurs de ses parties constitutives ON et ND; on aura donc l'inégalité

$$ON + ND < ON' + N'D.$$

Mais, par construction, ON et ON' sont de même longueur, et par conséquent il faudra estimer la droite ND moins longue que la partie

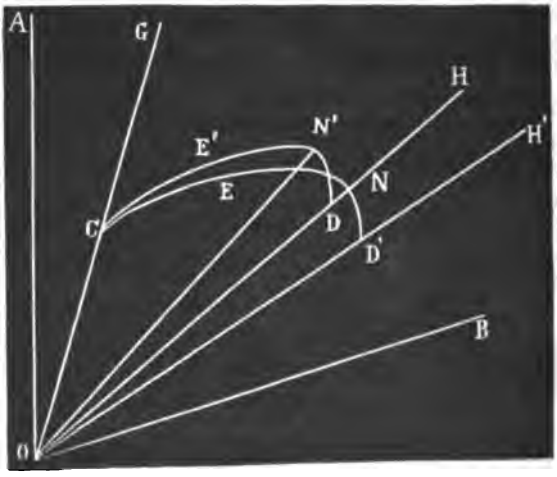



Fig. 2.

N'D de la ligne CE'D. D'autre part, les lignes CE'N' et CEN sont de même longueur, l'une étant la développée de l'autre. La comparaison des chemins I et II nous apprend donc que le premier de ces chemins, qui est évidemment situé en entier dans la surface S, est plus court que le dernier qui, par convention, n'y est situé qu'en partie ou pas du tout.

Supposons, en second lieu, qu'à cause de la forme attribuée à la ligne CE'D, le point N où sa développée CED' sur la surface S coupe la droite OH de cette surface, est situé sur le prolongement de cette droite, c'est-à-dire au-delà du point D (fig. 2).

Dans ce cas, la figure triangulaire ON'D, composée des deux droites

ON′ et OD et de la partie N′D de la ligne CE′D, nous donnera l'inégalité

$$\text{droite ON}' < \text{droite OD} + \text{ligne DN}'.$$

Mais par construction on a

$$\text{ON} = \text{ON}',$$

et, comme

$$\text{ON} = \text{OD} + \text{DN},$$

l'inégalité que je viens de trouver pourra être écrite

$$\text{droite OD} + \text{droite DN} < \text{droite OD} + \text{ligne DN}',$$

ou simplement

$$\text{droite DN} < \text{ligne DN}'.$$

Si donc nous comparons de nouveau la longueur du chemin I, qui se compose de la ligne CEN et de la droite ND, et par conséquent est situé dans la surface S d'un bout à l'autre, avec la longueur du chemin II, qui se compose des deux parties CN′ et N′D de la ligne CE′D, et, cela étant, n'est, en vertu de la supposition ci-dessus faite, situé dans la surface S qu'en partie ou pas du tout, nous devrons cette fois encore conclure que le chemin I est plus court que le chemin II.

Ainsi, quel que soit le chemin par lequel on reliera deux points quelconques de la surface S, toutes les fois que ce chemin ne sera pas tracé entièrement dans cette surface, il sera possible de déterminer un autre chemin qui y sera situé en entier et dont la longueur sera moindre.

Evidemment, ce fait implique celui-ci : le plus court de tous les chemins par lesquels il est possible de relier deux points quelconques de la surface S se trouve entièrement situé dans cette surface; ce qui revient à dire que la surface S contient la droite unissant deux quelconques de ses points dans toute son étendue.

Il me reste à fournir la démonstration que les prolongements de la droite CD sont également situés dans la surface S (*).

A cet effet j'envisage d'abord son prolongement à l'extrémité D, prolongement que j'indique provisoirement par DG′J′ (voyez la figure 3). Puis je construis dans la surface S une courbe KRL qui passe par l'ensemble des points dont la distance à l'autre extrémité C de la droite

(*) C'est M. Sidler, Professeur de Mathématiques à l'Université de Berne, qui a appelé mon attention sur cette seconde tâche à remplir pour que le but que je m'étais proposé soit complètement atteint.

CD, est égale à celle qui sépare cette extrémité d'un certain point E' pris au hasard sur le prolongement DG'J'.

Je puis alors affirmer, en vertu de la démonstration donnée ci-dessus, que chaque droite, telle que CP, CQ, CR, CU, CV, CW, etc., qui relie le point C avec un point de la courbe KRL, soit respectivement avec P, Q, R, U, V, W, etc., se trouvera entièrement dans la surface S. Or, à cause de la continuité de cette surface entre ses deux limites latérales OA et OB, la courbe KRL est également continue depuis le point K jusqu'au point L, c'est-à-dire entre ses deux extrémités situées respectivement sur les droites OA et OB. Par conséquent, les droites CP,

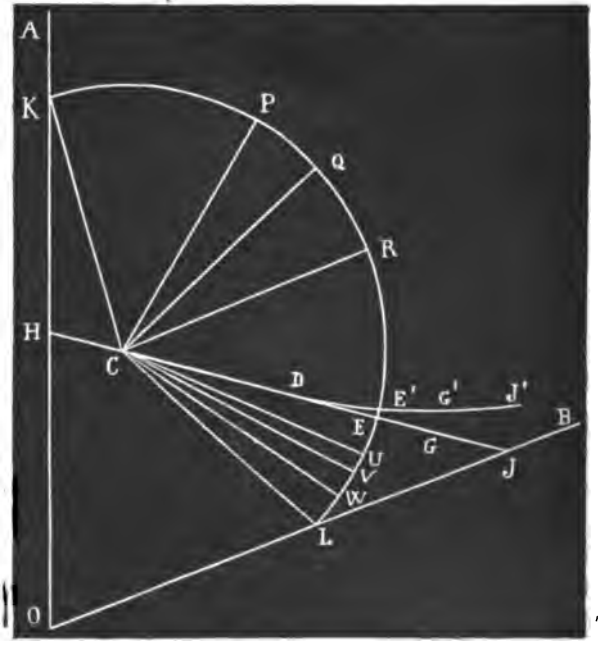



Fig. 8.

CQ, etc., qui unissent l'extrémité C respectivement avec chacun des points infiniment nombreux de ladite courbe, partiront de cette extrémité dans toutes les directions possibles, comprises dans la surface S entre les deux directions extrêmes CK et CL; et, cela étant, il est inévitable que, parmi l'infinité de ces droites CP, CQ, etc., il y en ait une — dans la figure je la désigne par CE — dont la première partie coïncide

rigoureusement avec la droite CD entre le point C et le point D. Or, conformément à un axiome bien connu, la droite CD ne saurait être prolongée que d'une seule manière, et l'on est dès lors obligé d'admettre que le prolongement de cette droite coïncide, non moins rigoureusement, avec le reste DE de la droite CE dont il vient d'être parlé.

Ce fait reconnu, il suffira de réfléchir qu'on a pris le point E' sur le prolongement de la droite CD à une distance quelconque de D, pour en conclure qu'il existe dans la surface S une droite avec laquelle ce prolongement coïncide dans toute son étendue, c'est-à-dire depuis le point D jusqu'au point J où il atteint la limite OB de la surface S. Il s'ensuit évidemment que cette surface contient tout le prolongement de la droite CD du côté D.

Par un raisonnement analogue à celui qui précède, on pourra se convaincre que la surface S renferme de même, sur toute sa longueur, le prolongement de la droite CD du côté C, c'est-à-dire du point C au point H où ce prolongement rencontre la droite OA, qui constitue la limite de la surface S du côté C de CD.

Il n'est peut-être pas superflu de faire remarquer que, dans les démonstrations ci-dessus, je n'ai fait ressortir l'existence de la propriété caractéristique du plan, savoir, de contenir la droite menée par deux quelconques de ses points, que pour la surface S, c'est-à-dire pour une surface qui, conformément à la construction indiquée au début, est limitée par les deux droites OA et OB, positions initiale et terminale de sa génératrice. Or, suivant son interprétation ordinaire et dans son acception la plus large, le plan est une surface qui n'a de limites en aucun sens, et il pourrait donc sembler que, par lesdites démonstrations je ne me fusse acquitté de la tâche que je m'étais proposée que d'une façon incomplète. Toutefois il n'en est pas ainsi. Ces démonstrations, en effet, sont valables pour chaque valeur qu'on voudra donner à l'angle $\alpha$ compris par les droites OA et OB, et pour toutes les longueurs attribuées à ces droites. Or, si l'on suppose $\alpha$ égal à 360 degrés et les droites OA et OB infiniment longues, la surface S deviendra effectivement illimitée dans tous les sens. Dans cette supposition, il est vrai, sa situation dans l'espace n'est pas convenablement déterminée, une infinité de surfaces planes satisfaisant évidemment à la condition que l'aire décrite par une droite OA qui tourne autour du point O et revient à sa position initiale, soit minima. Car tous les plans qui comprennent cette droite dans

ladite position initiale remplissent la même condition. Seulement, rien n'empêche qu'un supposant $\alpha = 360$ degrés, on joigne à la condition dont il vient d'être parlé quelque autre condition afin de déterminer rigoureusement la position de la surface S qu'il s'agit de construire, qu'on y joigne, par exemple, la condition qu'en dehors de la droite OA, cette surface renferme une autre droite donnée passant par le point O. Or, comme je le faisais remarquer ci-dessus, si dans ce cas on attribue à la génératrice OA une longueur infinie, la surface S engendrée aura une étendue infinie dans tous les sens.

Je suis donc en droit de dire que la démonstration du théorème fondamental du plan que je viens de donner, n'est pas incomplète et que l'objection formulée plus haut n'est pas fondée.

Avant de terminer, je veux encore brièvement faire voir comment on pourra utiliser la même démonstration pour se convaincre que le transport le plus rapide d'une droite OA à une autre position OB ne saurait jamais s'effectuer que d'une seule manière. Ce fait, assurément, semble assez évident de lui-même pour ne pas exiger de démonstration spéciale. Mais, comme il peut être ramené à un autre fait également évident et qui, de plus, a déjà été introduit dans les principes de la géométrie comme axiome, il convient de ne pas le classer, lui encore, parmi les axiomes, c'est-à-dire parmi les vérités premières et irréductibles, et de le démontrer.

Voici par quel raisonnement on peut y parvenir :

Supposons pour un instant qu'on puisse transporter une droite OA à une autre position OB par deux ou plusieurs voies différentes, jouissant toutes de la propriété d'être la plus rapide possible. On serait dès lors, en vertu de la démonstration faite au début du présent travail, en mesure de construire deux ou plusieurs surfaces S contenant, chacune, le chemin le plus court entre deux points P et Q, pris au hasard, respectivement, sur les droites OA et OB. Donc, on pourrait aussi relier ces points P et Q par deux ou par plusieurs droites. — Or, conformément à l'axiome fondamental de la géométrie, deux points de l'espace ne sauraient être unis que par une seule droite. Il en résulte que l'assertion à laquelle je viens d'être conduit est fausse, et il en est évidemment de même de la supposition d'où elle découle. Par conséquent, il n'y a qu'une seule manière de transporter le plus promptement possible une droite OA à une autre position OB.

M. le Général De Tilly, ayant bien voulu examiner la démonstration du théorème fondamental du plan, que j'ai donnée ci-dessus, y a trouvé une lacune.

Cette démonstration repose sur l'existence de la surface S chez laquelle on rencontrerait la propriété caractéristique du plan de contenir la droite menée par deux quelconques de ses points, et cette surface S, je l'ai engendrée, on se le rappelle, en faisant tourner une droite OA autour d'un de ses points O de manière qu'une partie quelconque de sa longueur, prise à partir de ce point O, décrive une aire minima entre ses deux positions initiale et terminale.

Or M. De Tilly appelle très justement mon attention sur la nécessité qu'il y a de démontrer que les conditions d'une telle génération sont réalisables, c'est-à-dire que toutes les parties de la droite OA, prises à partir du point O, décrivent une aire minima par un seul et même déplacement de cette droite.

Je veux donc, avant de terminer, établir ce fait, sans prétendre, bien entendu, y parvenir par le raisonnement le plus rapide :

Soient (figure 4) OT et OV deux des dites parties de la droite OA, l'une et l'autre de longueur quelconque.

Si l'on fait tourner OA autour du point O d'un angle infiniment petit AOA', ces deux parties décriront, respectivement, les aires infiniment petites OTT' et OVV', et il est clair qu'il existera entre les étendues de ces aires un certain rapport, que j'appellerai $q$. Ce rapport est évidemment le carré de celui qui existe entre les longueurs OT et OV ; mais je n'aurai pas à tenir compte de ce fait dans ce qui suit.

Transportons à présent la droite OA à la position OB par un mouvement quelconque autour du point O.

Soient TX'U la courbe parcourue dans ces circonstances par le point T et VY'W celle parcourue par le point V. OTX'UO et OVY'WO seront alors les aires que les parties OT et OV de la droite OA auront respectivement décrites.

La première de ces aires pourra être considérée comme étant la somme d'une infinité d'aires triangulaires infiniment petites, telles que OTT', qui se succèdent de la droite OT à la droite OU et ont toutes un même angle au sommet, angle infiniment petit égal à TOT'.

De son côté, l'aire OVY'WO pourra être considérée comme étant la somme d'une infinité d'aires triangulaires infiniment petites, identiques

de forme, et de même étendue que l'aire OVV′, lesquelles se suivent depuis la droite OV jusqu'à la droite OW et ont, elles aussi, toutes un même angle au sommet, égal à TOT′.

Or il est aisé de voir que la valeur ci-dessus indiquée par $q$ exprime le rapport entre les étendues de deux quelconques des aires correspondantes, prises respectivement dans les deux séries d'aires infiniment petites dont je viens de parler, par exemple entre l'étendue de l'aire OQ′R′ et l'étendue de l'aire OC′D′. Il est donc évident que le rapport

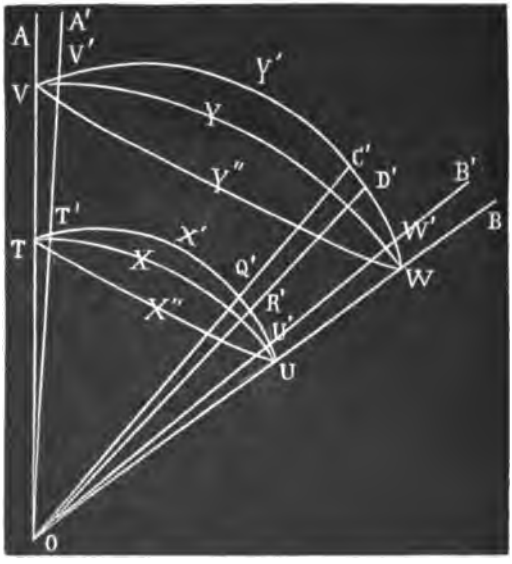



Fig. 4.

entre les étendues des aires totales OTX′UO et OVY′WO s'exprimera également par $q$.

Cela établi, admettons que OVYWO soit la plus petite de toutes les aires infiniment nombreuses, décrites par la partie OV de la droite OA en supposant cette droite transportée à la position OW respectivement par chacun des mouvements par lesquels on peut l'amener à sa nouvelle position, et indiquons par $\Omega$ l'étendue de cette aire minima.

D'après ce qui précède, le produit $q.\Omega$ sera alors l'expression de l'étendue de l'aire OTXVO parcourue par la partie OT de OA pendant que OV aura décrit ladite aire minima.

Or, faisons à présent l'hypothèse qu'il existe une manière de trans-

porter la droite OA à la position OB telle que l'aire décrite par sa partie OT ait une étendue moins grande que l'aire OTXUO, par exemple une étendue $q\Omega - \omega$.

Soient TX″U la courbe parcourue, pendant ce transport, par le point T et MY″W celle parcourue par le point V.

OTX″UO et OVY″WO indiqueront alors respectivement les périmètres des aires décrites par les parties OT et OV de la droite OA dans ce mouvement. Conformément à la remarque faite ci-dessus, la dernière de ces deux aires sera $\frac{1}{q}$ fois aussi grande que la première, en sorte que son étendue se trouverait exprimée par $\frac{1}{q}(q\Omega - \omega)$, c'est-à-dire par $\left(\Omega - \frac{\omega}{q}\right)$, expression évidemment inférieure à $\Omega$. Mais, en vertu de notre point de départ, $\Omega$ représente l'étendue de la plus petite de toutes les aires qui peuvent être engendrées par le transport de la droite OV à la position OW, à savoir l'aire OVYWO. Donc, l'expression $\left(\Omega - \frac{\omega}{q}\right)$ à laquelle nous sommes arrivés est forcément inexacte, et dès lors l'hypothèse d'où elle découle est fausse. En d'autres termes, l'aire décrite par la partie OT de la droite OA lorsqu'on transporte cette droite à la position OB, ne saurait jamais, par aucun mouvement, être plus petite que celle que décrit cette même partie dans le cas spécial où le transport s'effectue de manière que l'aire décrite par la partie OV de OA soit minima.

Le raisonnement qui précède étant exact, quelle que soit la grandeur relative des parties OT et OV, et aussi bien dans le cas où OT est supposé plus grand que OV que dans le cas inverse, cas représenté dans la figure, je crois avoir ainsi réussi à établir clairement le point qui avait semblé à M. De Tilly insuffisamment démontré. Je saisis cette occasion pour le remercier et pour remercier M. le professeur Sidler de l'obligeance avec laquelle ces deux savants se sont intéressés à mon modeste travail (*).

(*) Nous espérons pouvoir revenir ultérieurement sur la difficile question traitée dans l'article précédent par M. Kool (P. M. et J. N.).

$$\frac{x^{n}-1}{x-1} \text{ POUR } x=1$$

par [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$n=\frac{p}{q},$$

[illegible] $q$ étant des entiers; si l'on fait le changement de [illegible]

$$x=z^{\frac{1}{q}},$$

[illegible]

$$\frac{x^{n}-1}{x-1}=\frac{z^{p}-1}{z^{q}-1}=\frac{z^{p-1}+z^{p-2}+\cdots+z+1}{z^{q-1}+z^{q-2}+\cdots+z+1}.$$

[illegible] par suite $\frac{p}{q}$, c'est-à-dire $n$.

[illegible] On peut supposer d'abord que $x$ atteigne [illegible] moindres que l'unité. Alors, en désignant par $\sigma$ un [illegible] arbitrairement petit, il existe toujours un [illegible] que l'on ait

$$0<n-m<\sigma,$$

$$[illegible] < \frac{x^{n}-1}{x-1}-n<\frac{x^{m}-1}{x-1}-m.$$

[illegible] étant rationnels et positifs par hypothèse, [illegible] tel que, pour toute valeur de $x$ vérifiant la [illegible]

$$0<1-x<\rho,$$

[illegible]

$$-\sigma<\frac{x^{m}-1}{x-1}-m<\sigma,$$

$$-\sigma<\frac{x^{m+\sigma}-1}{x-1}-(m+\sigma)<\sigma,$$

d'où, à plus forte raison, pour les mêmes valeurs de $x$,

$$m-(m+\sigma)<\frac{x^n-1}{x-1}-n<(m+\sigma)-m,$$

c'est-à-dire

$$-\sigma<\frac{x^n-1}{x-1}-n<\sigma;$$

on en conclut que, dans ce cas encore, l'expression considérée a $n$ pour limite.

On démontrerait par un raisonnement identique qu'il en est de même si $x$ atteint sa limite par valeurs plus grandes que l'unité.

3° *$n$ est négatif*. Si l'on pose

$$n=-p,$$

le nombre $p$ étant positif, on trouve

$$\frac{x^n-1}{x-1}=-\frac{1}{x^p}\,\frac{x^p-1}{x-1},$$

et l'on voit immédiatement que la limite est $n$.

Donc, quel que soit l'exposant $n$, la fraction

$$\frac{x^n-1}{x-1}$$

tend vers $n$ pour $x=1$.

Applications. 1° *Dérivée de $x^n$*. Soit $x_0$ une valeur quelconque de la variable; en posant

$$x=x_0t,$$

le rapport des accroissements prend la forme

$$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=x_0^{n-1}\,\frac{t^n-1}{t-1};$$

quand $x$ tend vers $x_0$, la variable $t$ devient égale à l'unité et le second membre a pour limite $nx_0^{n-1}$; par suite, la dérivée de $x^n$ pour $x=x_0$ est égale à $nx_0^{n-1}$.

On doit supposer évidemment $x$ positif si $n$ est une fraction dont le numérateur est impair et le dénominateur pair, ou bien si $n$ est irrationnel.

2° *Convergence de la série de terme général* $\frac{1}{n^p}$. Si l'on désigne par $u_n$ le terme général de la série considérée et par $\alpha_n$ la différence

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1,$$

en posant

$$x = 1 + \frac{1}{n},$$

on a

$$n\alpha_n = \frac{x^p - 1}{x - 1},$$

de sorte que la limite de $n\alpha_n$ pour $n = \infty$ est $p$; d'après la règle de Raabe, la série est donc convergente pour $p > 1$, et divergente pour $p < 1$; elle est d'ailleurs divergente pour $p = 1$.

---

## NOTES SUR UN THÉORÈME DE STEINER;

par M. Droz Farny, à Porrentruy.

I. Soient $A_1, B_1, C_1$ les points milieux des côtés BC, AC, AB d'un triangle; $A_2, B_2, C_2$ les pieds des hauteurs abaissées de A, B, C sur les mêmes côtés; H l'orthocentre du triangle. Prenons enfin un point quelconque $\alpha$ sur $B_1C_1$, un point $\beta$ sur $A_1C_1$ et un point $\gamma$ sur $A_1B_1$ et représentons par J le point d'intersection de la hauteur $AA_2$ avec $B_1C_1$.

Dans le triangle $A\alpha H$, on a :

$$\overline{A\alpha}^2 = \overline{H\alpha}^2 + \overline{AH}^2 - 2AH \cdot HJ = \overline{H\alpha}^2 + AH \cdot (AH - 2HJ),$$

ou

$$\overline{A\alpha}^2 = \overline{H\alpha}^2 + AH \cdot HA_2.$$

Mais on sait que

$$AH \cdot HA_2 = BH \cdot HB_2 = CH \cdot HC_2.$$

Si donc $H\alpha = H\beta = H\gamma$, on aura aussi

$$A\alpha = B\beta = C\gamma.$$

D'où un beau théorème donné sans démonstration par Steiner (Œuvres complètes, tome II, page 345, question I) :

*Une circonférence décrite de l'orthocentre* H *d'un triangle* ABC *comme*

*centre avec un rayon* $\rho$ *quelconque, rencontre les côtés du triangle complémentaire :* $B_1C_1$ *en* $\alpha_1$ *et* $\alpha_2$, $A_1C_1$ *en* $\beta_1$ *et* $\beta_2$ $A_1B$ *en* $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$ *On a*

$$A\alpha_1 = A\alpha_2 = B\beta_1 = B\beta_2 = C\gamma_1 = C\gamma_2.$$

Comme $AH = 2R \cos A$, $HA_2 = 2R \cos B \cos C$, on trouve

$$A\alpha = \sqrt{\rho^2 + 4R^2 \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C}.$$

II. Supposons une conique quelconque de centre J et d'axes $2a$ et $2b$, inscrite dans le triangle ABC. En représentant par $\delta$ la distance de l'orthocentre H au centre du cercle circonscrit O, on a la formule :

$$2\overline{JH}^2 = 2(a^2 + b^2) + \delta^2 - R^2 (*).$$

On en déduit le théorème bien connu :

*Si une conique est inscrite dans un triangle et que la somme des carrés de ses axes reste constante, son centre décrit une circonférence ayant pour centre le point de concours des hauteurs du triangle.*

Considérons donc toutes les coniques inscrites pour lesquelles $a^2 + b^2 = \lambda^2$. Le cercle de rayon

$$JH = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\delta^2 - R^2}{2}}$$

coupe la droite B'C' en un point $\alpha$, centre d'une des coniques. Or cette conique dégénère suivant la conique infiniment aplatie $2A\alpha$, donc $A\alpha = \lambda$; d'où une seconde démonstration qui doit être approximativement celle de Steiner en considérant la question I de ses *Lehrsätze und Aufgaben*, dans l'article cité, comme corollaire des questions suivantes.

III. M. Georges Brocard a publié dans *Mathesis* (1896, p. 217) une belle propriété des foyers F et F' de l'ellipse de Steiner $\varepsilon$ circonscrite au triangle ABC et ayant son centre au point G.

Les droites AF, BF, CF rencontrent BC, CA, AB en trois points $A_2$, $B_2$, $C_2$, tels que les droites $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$, ont une même longueur $l$ racine de l'équation

$$l^4 - 2S \operatorname{cotg}\omega \cdot l^2 + 3S^2 = 0$$

et les droites AF', BF', CF' jouissent d'une propriété analogue.

En rapprochant le théorème de M. G. Brocard de celui de Steiner,

---

(*) Voir dans les N. A. M. (2), XIX, la note de M. Weill *sur le triangle inscrit et circonscrit à deux coniques*.

on en déduit l'intéressante propriété des foyers F et F′ qui n'a peut-être pas encore été remarquée :

*Les droites* AF *et* AF′ *coupent* $B_1C_1$ *en* $\alpha_1$ *et* $\alpha_2$; BF *et* BF′ *rencontrent* $A_1C_1$ *en* $\beta_1$ *et* $\beta_2$, *enfin* CF *et* CF′ *coupent* $A_1B_1$ *en* $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$; *les six points* $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$ *sont sur un même cercle dont le centre coïncide avec l'orthocentre* H *et qui a pour rayon* :

$$H\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 16R^2\cos A\cos B\cos C}.$$

---

## *NOTES MATHÉMATIQUES.

*1. *Sur les triangles non isoscèles qui ont deux bissectrices extérieures égales*, par M. G. Fontené. M. Emmerich a considéré dans ce journal (1900, p. 129) les triangles isoscèles dans lesquels les bissectrices des deux angles extérieurs en B et C sont égales. De la relation fondamentale

$$\sin^2\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (A \leq 60^\circ), \tag{1}$$

il a déduit la relation très-simple

$$IA = r' - r, \tag{2}$$

où I est le centre du cercle inscrit de rayon $r$, $r'$ le rayon du cercle ex-inscrit dont le centre I′ est sur la bissectrice AI. Cette relation lui a permis de construire le triangle, connaissant $a$ et A.

On peut remplacer la relation (2) par une autre qui conduit plus simplement au même résultat. Si l'on considère le cercle circonscrit au triangle, et si PQ est le diamètre perpendiculaire au côté BC en son milieu M, le point Q étant sur l'arc BAC, comme P est milieu de II′, on a la formule bien connue $PM = \frac{r' - r}{2}$, et l'on peut écrire

$$IA = 2PM. \tag{2'}$$

Cette relation résulte d'ailleurs directement de la relation (1), attendu que l'on a dans tout triangle

$$\begin{cases} PM = PB\sin\dfrac{A}{2} = 2R\sin^2\dfrac{A}{2}, \\ IA = 4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

On a alors

$$PA = PI + IA = PB + 2PM,$$

d'où résulte immédiatement la construction du triangle quand on connaît $a$ et A.

Je ne connaissais pas les articles de M. Emmerich quand j'ai proposé, dans le *Journal de Vuibert*, une question sur les triangles considérés ici, en mettant la relation entre $a, b, c$ sous la forme

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{a}{bc} = 0.$$

×3. *Sur un point remarquable du quadrilatère inscriptible*(*), par M. Jules Mathot. Soit ABCD un quadrilatère inscrit au cercle O. Projetons les quatre sommets en A', B', C', D' sur les diagonales opposées; ces projections sont les sommets d'un nouveau quadrilatère inscriptible à un cercle O' et semblable à ABCD. En projetant A en M sur BC, MA' est la droite de Simson correspondant au point A et au triangle BCD.

Cette droite passe par O'. En effet, on a :

$$\text{angle } O'A'B' = OAB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - AOB) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2BCA)$$
$$= 90^\circ - BCA.$$

D'ailleurs, la figure AB'A'MB étant inscriptible, il vient

$$\text{angle } B'A'B = 180^\circ - CAB$$
$$\text{» } MA'B = MAB = 90^\circ - CBA.$$

En ajoutant, on obtient

$$\text{angle } MA'B' = 270^\circ - (CAB + CBA) = 90^\circ + BCA$$

ainsi, les deux angles adjacents O'A'B' et MA'B sont supplémentaires.

On peut parvenir au même résultat d'une manière moins directe, mais qui fait apparaître d'autres propriétés du point O'.

Désignons par $A_1$ l'orthocentre du triangle BCD, par $B_1$ celui de ACD, etc.

On sait que les quadrilatères $A_1B_1C_1D_1$ et ABCD sont égaux et ont les côtés parallèles. Alors, les droites $AA_1$, $BB_1$... ont même milieu comme diagonales de parallélogrammes. Mais au milieu de $AA_1$, passent la droite de Simson A'M et le cercle des neuf points du triangle BCD. Donc :

---

(*) Les propriétés signalées dans cette note sont connues, du moins en partie. Toutefois, l'article de M. Mathot peut intéresser nos jeunes lecteurs. (J. N.)

*Dans un quadrilatère inscriptible*; 1° *Les droites qui joignent chaque sommet à l'orthocentre du triangle formé par les trois autres*; 2° *Les droites de Simson prises par rapport aux mêmes points et aux mêmes triangles*; 3° *Les cercles d'Euler des mêmes triangles sont douze lignes ayant un point commun*.

Remarque. On prouve facilement que ce point est le symétrique du centre O par rapport au point milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Vorlesungen über Geschichte der Mathematik** von Moritz Cantor. Dritter Band. Erste Abteilung. Von 1668-1699. Mit 45 in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1900 (In-8° de 261 p. Prix : 6 m. 60.

Nouvelle édition du premier fascicule du tome III de l'histoire des mathématiques de Cantor, augmentée d'une dizaine de pages. L'auteur a naturellement introduit dans son texte une foule d'améliorations de détail.

Ce premier fascicule contient surtout l'histoire de l'invention du calcul infinitésimal. Voici, pour nos nouveaux abonnés qui ne peuvent recourir à l'annonce de la première édition publiée en 1894, dans *Mathesis*, (2), IV, p. 137, les titres des onze chapitres contenus dans ce fascicule. 82. Histoire des mathématiques. Édition des classiques. Géométrie élémentaire. 83. Quelques recherches géométriques. Characteristica geometrica de Leibniz. 84. Calcul. Combinaisons. Rentes viagères, 85-86. Séries; Mercator, Brouncker, Gregory, Newton ; Leibniz, Halley, de Moivre, Jacques Bernoulli; fractions continues. 87. Théorie des nombres, algèbre. 88. Coniques. Théorie des courbes. 89. Premières découvertes dans le domaine de l'analyse infinitésimale. 90. Newton et Leibniz jusqu'en 1687. 91. Leibniz de 1687 à 1699. Jacques et Jean Bernoulli jusqu'à leur discussion. 92. Lutte des frères Bernoulli ; de l'Hospital. Lettres de Newton de 1693. Adversaires de Leibniz

---

Ernst Pascal, ordentlicher Professor an der Universität zu Pavia. **Repertorium der höheren Mathematik** (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). *Autorisirte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals* (*) von A. Schepp, Oberleutnant a. d. zu Wiesbaden, I. Theil : Die Analysis. Leipzig, Teubner, 1900 (XII, 638 pp., in-8°, cartonné). Prix : 10 marcs.

Le répertoire de M. Pascal a sa place marquée dans la Bibliothèque des professeurs et des aspirants au doctorat qui ont besoin de retrouver rapidement sans recourir aux Traités, à la *Synopsis* de Hagen ou à l'*Encyclopédie mathématique*, une

(*) *Repertorio di matematiche superiori* per Ernesto Pascal, Prof. ordinario nella R. Universita di Pavia. I. *Analisi*. Milan, Hoepli, 1898 (XV-643 p. in-18). Prix : 6 francs.

définition, une formule, un théorème, un renseignement bibliographique. C'est le vademecum de l'analyste et un vademecum très bien fait, auquel on peut prédire, sans crainte de se tromper, une grande diffusion et de nombreuses éditions. Voici les titres des 23 chapitres du livre :

1. Préliminaires (nombres irrationnels; imaginaires; quaternions; ensembles; fonctions et limites). 2. Substitutions. 3. Déterminants. 4. Series, produits infinis, fractions continues. 5. Équations algébriques. 6. Calcul différentiel. 7. Calcul intégral. 8. Équations différentielles. 9. Groupes de transformations. 10. Calcul des différences. 11. Calcul des variations. 12. Invariantologie. 13-14. Fonctions d'une variable complexe; applications de la théorie des groupes; periodicité; automorphisme. 15. Intégrales abéliennes. 16-17. Fonctions elliptiques, hyperelliptiques et abéliennes. 18. Autres fonctions spéciales. 19. Représentation analytique des fonctions. 20-21. Nombres entiers rationnels, complexes, algébriques, transcendants. 22. Calcul des probabilités. 23. Appareils arithmétiques, algébriques, intégraphes.

---

**Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis**, von Dr. Oscar Schlömilch, K. Sachs. Geheimerrat. Zweiter Teil. Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte Auflage, bearbeitet von Prof. Dr. R. Henke, Konrektor am Annen-Realgymnasium zu Dresden, mit Holzschnitten im Texte, Leipzig, Teubner, 1900 (VIII, u. 448 p. in-8). Prix : 9 marcs.

Nouvelle édition, augmentée et revisée d'une manière très judicieuse de l'excellent recueil d'exercices de calcul intégral de Schlömilch. C'est un livre à recommander à tous les étudiants en mathématiques à l'égal des recueils analogues de Frenet et de Tisserand.

*Sommaire.* 1. Intégration indéfinie et définie des fonctions explicites d'une variable (158 groupes de formules, problèmes ou exemples). 2. Quadratures et rectifications (105 questions). 3. Cubatures et complanations (75 questions). 4. Moments statiques et moments d'inertie (72 questions). 5. Intégrales définies simples (82 questions). 6. Intégrales doubles et applications géométriques (102 questions). 7. Intégrales triples (25 questions). 8. Valeurs moyennes et formules d'approximation pour des fonctions données (21 questions). 9. Équations différentielles du premier ordre (138 exemples). 10 Équations différentielles du second ordre (82 exemples).

---

**La recente Geometria del Triangolo** per il Prof. Cr. Alasia. Citta di Castello, S. Lapi, 1900 (XVI-339, p. in-8° et 76 figures). Prix : 3 francs.

Cet ouvrage contient un exposé clair, méthodique et assez complet de la Géométrie récente du triangle; une introduction historique montre les développements successifs de cette géométrie, et des notes bibliographiques permettent au lecteur de remonter aux sources. Les exercices proposés, au nombre de 343, et un recueil de 566 formules relatives au triangle complètent en quelque sorte le texte même du livre.

Nous recommandons volontiers le traité de M. Alasia, d'autant plus que l'auteur, tout en ayant égard aux travaux antérieurs sur la matière, a su garder une certaine originalité. (J. N.)

---

La librairie Gauthier-Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'**Annuaire du Bureau des Longitudes** pour 1901. — Ce petit volume compact contient comme toujours une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de M. A. Cornu, sur *Le transport électrique de la force*; celle de M. H. Poincaré, sur *Le projet de revision de l'arc du méridien de Quito* et enfin la notice historique sur *L'établissement du système métrique*, par M. Bassot. In-8° de près de 800 pages avec 3 Cartes magnétiques. Prix : fr. 1,50 (franco, fr. 1,85).

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.(*)

### Question 1262.

(Voir *Mathesis* (2), t. X. p. 80.)

*On considère un cercle* O, *un diamètre fixe* AB *de ce cercle, et un cercle* O' *tangent intérieurement au cercle* O *en* A. *Soit* PQ *une corde variable du cercle* O *qui est tangente au cercle* O'. *Montrer que :*

1° *Les lieux du centre de gravité et de l'orthocentre des triangles* APQ *et* BPQ *sont des limaçons de Pascal.*

2° *Le lieu du centre du cercle inscrit au triangle* APQ *est un cercle.*

3° *Trouver le lieu des centres des cercles exinscrits au triangle* APQ.

(E. N. Barisien).

*Solution par* MM. Emmerich, Andrien et Deprez. 1° Le milieu C de la corde PQ décrit évidemment la podaire du point O par rapport au cercle O', podaire qui est un limaçon de Pascal. Le centre de gravité G du triangle APQ décrit une ligne homothétique à ce limaçon; car $AG = \frac{2}{3} AC$. L'orthocentre H du triangle APQ est situé sur la droite OG qui joint le centre du cercle circonscrit au centre de gravité, et l'on a $OH = 3OG$; il en résulte que les points G et H (et le centre du cercle des neuf points) décrivent des lignes homothétiques.

---

(*) Nous avons oublié de mentionner, à la question 1272 (*Mathesis*, 1900, p. 272) une solution géométrique par M. Emmerich et une solution au moyen des équipollences par un abonné.

Même raisonnement pour le barycentre et l'orthocentre d'un triangle PQM qui a pour sommet un point fixe de la circonférence O.

2° Soit L le point de contact de PQ avec le cercle O'. La droite AL est la bissectrice de l'angle PAQ; car si l'on mène la tangente AT, on a

$$\textit{angle}\ \mathrm{PAL} = \mathrm{TAL} - \mathrm{TAP} = \mathrm{PLA} - \mathrm{PQA} = \mathrm{LAQ}.$$

AL rencontre la circonférence O au milieu D de l'arc PQ, point situé sur la droite OC. Par conséquent, si $\rho = \mathrm{AI}$, $\omega = \mathrm{OAI}$ sont les coordonnées polaires de I, centre du cercle inscrit au triangle APQ, on a

$$\rho = \mathrm{AD} - \mathrm{ID} = \mathrm{AD} - \mathrm{PD} = \mathrm{AD} - \sqrt{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{LD}}$$

$$= \mathrm{AD} - \sqrt{\mathrm{AD}(\mathrm{AD} - \mathrm{AL})} = 2\cos\omega\left(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{R} - \mathrm{R}')}\right).$$

Donc I décrit un cercle touchant les cercles O et O' en A et ayant pour rayon $\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{R} - \mathrm{R}')}$.

Pour démontrer ce résultat, on peut aussi observer que PI étant la bissectrice de l'angle APL, et $\mathrm{A}_1$ désignant le second point de rencontre de AP avec la circonférence O', on a

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IL}} = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PL}} = \frac{\mathrm{PA}}{\sqrt{\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PA}_1}} = \sqrt{\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PA}_1}}.$$

Or, A étant le centre de similitude des cercles O' et O, le rapport $\mathrm{AA}_1 : \mathrm{AP}$ est égal au rapport $\mathrm{R}' : \mathrm{R}$; donc le rapport $\mathrm{AI} : \mathrm{AL}$ est constant.

3° Appelons $\mathrm{I}_a$, $\mathrm{I}_p$, $\mathrm{I}_q$ les centres des cercles exinscrits au triangle APQ.

On trouve facilement

$$\mathrm{AI}_a = \mathrm{AD} + \mathrm{DI}_a = \mathrm{AD} + \mathrm{PD} = 2\cos\omega\left(\mathrm{R} + \sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{R} - \mathrm{R}')}\right);$$

donc le point $\mathrm{I}_a$ décrit une circonférence

La droite $\mathrm{AI}_q$ rencontre la circonférence O au milieu D' de l'arc PAQ, point appartenant à la droite OC. Soit L' le point où elle coupe PQ. On a

$$\mathrm{AI}_q = \mathrm{D'I}_q - \mathrm{D'A} = \mathrm{D'P} - \mathrm{D'A} = \sqrt{\mathrm{D'A}\cdot\mathrm{D'L'}} - \mathrm{D'A}$$

$$= \sqrt{\mathrm{D'A}(\mathrm{D'A} + \mathrm{AL'})} - \mathrm{D'A},$$

$$\mathrm{D'A} = 2\mathrm{R}\sin\omega, \quad \mathrm{AL'} = \mathrm{AL}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{ALP} = \mathrm{AL}\cot\omega = \frac{2\mathrm{R}'\cos^2\omega}{\sin\omega}.$$

L'équation du lieu de $\mathrm{I}_q$ sera donc

$$\rho = 2\left[\sqrt{\mathrm{R}^2\cos^2\varphi + \mathrm{RR}'\sin^2\varphi} + \mathrm{R}\cos\varphi\right],$$

$\varphi$ désignant l'angle $I_qAO = \frac{\pi}{2} + \omega$. On en conclut que ce lieu est la podaire du point A par rapport à une ellipse ayant pour centre le point B, et pour sommet du grand axe le point A; le demi petit axe vaut $2\sqrt{RR'}$.

Le point $I_p$ décrit la même courbe.

REMARQUE. Le point L décrit une cissoïde, le centre du cercle circonscrit au triangle $I_qI_pI_q$ et le centre de gravité de ce triangle décrivent des circonférences. (DÉPREZ).

---

## Question 1293.

(Voir *Mathesis*, (2), t. X, p. 215.)

*On circonscrit à une ellipse donnée tous les quadrilatères* ABCD *dont les diagonales* AC, BD *sont rectangulaires; soient* P, Q *les points de rencontre des côtés opposés* (AB, CD), (AD, BC). *Trouver* 1° *la relation entre les points* P, Q; 2° *la relation entre les droites* PQ, AC; *la relation entre le point* P *et la droite* AC.

*On appelle* liaison ponctuelle *l'ensemble des couples de points satisfaisant à une même condition;* liaison tangentielle, *l'ensemble des couples de droites satisfaisant à une même condition;* connexe, *l'ensemble des couples constitués par un point et une droite et qui satisfont à une même condition.*

*Solution par* M. STUYVAERT. Nous résolvons une question plus générale : au lieu d'une ellipse, nous considérons une conique quelconque rapportée à un triangle autopolaire et dont l'équation est

$$a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + a_3X_3^2 = 0;$$

au lieu de supposer AC, BD rectangulaires, nous admettons que ces droites marquent sur le côté $X_3 = 0$ une involution I, dont les extrémités de ce côté constituent un couple; les éléments doubles de cette involution sont représentés par

$$X_1 + \lambda X_2 = 0 \quad \text{et} \quad X_1 - \lambda X_2 = 0;$$

par suite un couple quelconque est défini par

$$X_1 = kX_2 \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{\lambda^2}{k}X_2,$$

ou, sous une forme plus symétrique, par

$$X_1 : X_2 : X_3 = k : 1 : 0 \quad \text{et} \quad X_1 : X_2 : X_3 = \lambda^2 : k : 0.$$

1° Appelons $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $y_1$, $y_2$, $y_3$ les coordonnées ponctuelles respectives de P et de Q. D'après un théorème connu, les polaires de ces points relatives à la conique forment, avec AC et BD un faisceau harmonique. Ces polaires sont représentées par les équations

$$a_1X_1x_1 + a_2X_2x_2 + a_3X_3x_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma a_iX_ix_i = 0,$$
$$a_1X_1y_1 + a_2X_2y_2 + a_3X_3y_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma a_iX_iy_i = 0;$$

AC et BD auront donc des équations de la forme

$$\Sigma a_iX_ix_i \pm \mu\Sigma a_iX_iy_i = 0.$$

Exprimons d'abord que ces droites passent par deux points conjugués de l'involution I :

$$a_1kx_1 + a_2x_2 + \mu(a_1ky_1 + a_2y_2) = 0, \tag{1}$$
$$a_1\lambda^2x_1 + a_2kx_2 - \mu(a_1\lambda^2y_1 + a_2ky_2) = 0. \tag{2}$$

Exprimons ensuite que les mêmes droites sont conjuguées par rapport à la conique; à cet effet, représentons par $v_i$ et $w_i$ les coordonnées tangentielles respectives de AC et BD; nous avons

$$a_2a_3v_1w_1 + a_3a_1v_2w_2 + a_1a_2v_3w_3 = 0,$$

d'où, en remplaçant $v_i$ par $a_i(x_i + \mu y_i)$ et $w_i$ par $a_i(x_i - \mu y_i)$, nous trouvons, après un calcul facile,

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = \mu^2(a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2). \tag{3}$$

Eliminons $k$ entre (1) et (2) :

$$a_1^2\lambda^2x_1^2 - a_2^2x_2^2 = \mu^2(a_1^2\lambda^2y_1^2 - a_2^2y_2^2). \tag{4}$$

Eliminons $\mu^2$ entre (3) et (4) :

$$\frac{a_1^2\lambda^2x_1^2 - a_2^2x_2^2}{a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2} = \frac{a_1^2\lambda^2y_1^2 - a_2^2y_2^2}{a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2}.$$

Telle est la *liaison ponctuelle* entre P et Q; elle est doublement quadratique et réversible : l'un des points P ou Q étant donné à volonté, l'autre décrit une conique déterminée par le point donné et par les quatre intersections de la conique donnée avec les droites menées du sommet $(X_1, X_2)$ du triangle de référence et représentées par $a_1^2\lambda^2x_1^2 - a_2^2x_2^2 = 0$.

2° L'équation tangentielle de la conique est

$$a_2a_3U_1^2 + a_3a_1U_2^2 + a_1a_2U_3^2 = 0.$$

Appelons $u$, $v$, $w$ respectivement les droites PQ, AC, BD; elles forment un triangle conjugué, donc

$$a_2a_3u_1v_1 + a_3a_1u_2v_2 + a_1a_2u_3v_3 = 0, \tag{5}$$
$$a_2a_3u_1w_1 + a_3a_1u_2w_2 + a_1a_2u_3w_3 = 0, \tag{6}$$
$$a_2a_3v_1w_1 + a_3a_1v_2w_2 + a_1a_2v_3w_3 = 0. \tag{7}$$

De plus, les droites $v$ et $w$ passent par des points conjugués de l'involution I, donc

$$v_1k + v_2 = 0, \quad w_1\lambda^2 + w_2k = 0,$$

d'où, en éliminant $k$,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{w_1\lambda^2}{w_2}. \tag{8}$$

Éliminons $w_1$, $w_2$, $w_3$, entre les équations (6), (7), (8); à cet effet remplaçons $w_2$ par $\dfrac{v_1w_1\lambda^2}{v_2}$ dans les deux premières. ce qui donne

$$(a_2a_3u_1v_2 + a_3a_1u_2v_1\lambda^2)w_1 + a_1a_2u_3v_2w_3 = 0,$$
$$(a_2a_3v_1 + a_3a_1v_1\lambda^2)w_1 + a_1a_2v_3w_3 = 0;$$

puis éliminons $w_1$ et $w_3$ :

$$a_2u_1v_2v_3 + \lambda^2a_1u_2v_1v_3 - u_3v_1v_2(a_2 + \lambda^2a_1) = 0. \tag{9}$$

La relation entre les droites PQ et AC se compose des ***deux liaisons tangentielles*** (5) et (9); celles-ci équivalent à une ***transformation*** : on peut résoudre les équations par rapport aux $u$, ce qui donne

$$u_1 : u_2 : u_3 = a_1v_1(a_2a_3v_2^2 + \lambda^2a_1a_3v_2^2 - \lambda^2a_1a_2v_3^2)$$
$$: a_2v_2(a_1a_2v_3^2 - a_2a_3v_1^2 - \lambda^2a_1a_3v_1^2) : a_1a_2a_3v_3(\lambda^2v_1^2 - v_2^2).$$

A toute droite AC répond une seule droite PQ, mais à toute droite PQ répondent deux droites AC, car l'élimination de $v_3$ entre (5) et (9) donne une relation du second degré en $v_1$ et $v_2$.

3° En conservant les notations précédentes, on peut écrire les équations ponctuelles de AC et de la polaire de P,

$$\Sigma v_iX_i = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma a_iX_iw_i = 0.$$

Les coordonnées $w_i$ de BD sont de la forme

$$\rho w_i = a_iw_i + \mu v_i,$$

car BD passe par le point commun aux deux droites précédentes; BD

devant être conjuguée de AC, on a aussi $\Sigma a_1 a_2 x_1 v_1 = 0$ ou, en développant,

$$a_1 a_2 a_3 (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3) + \mu (a_2 a_3 v_1^2 + a_3 a_1 v_2^2 + a_1 a_2 v_3^2) = 0;$$

ceci détermine la valeur de $\mu$ et, par suite, l'équation ponctuelle de BD :

$$\frac{\Sigma a_1 X_1 x_1}{a_1 a_2 a_3 (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)} = \frac{\Sigma X_1 v_1}{a_2 a_3 v_1^2 + a_3 a_1 v_2^2 + a_1 a_2 v_3^2}.$$

AC coupe le côté $X_3$ en un point K, tel que

$$v_1 k + v_2 = 0,$$

où $k = -\frac{v_2}{v_1}$ et les coordonnées du point conjugué dans l'involution I sont

$$X_1 : X_2 : X_3 = \lambda^2 : -\frac{v_2}{v_1} : 0 = \lambda^2 v_1 : v_2 : 0;$$

elles doivent vérifier l'équation de BD, ce qui donne enfin le *connexe* (1, 3) que voici :

$$\frac{a_1 \lambda^2 v_1 x_1 - a_2 v_2 x_2}{a_1 a_2 a_3 (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)} = \frac{\lambda^2 v_1^2 - v_2^2}{a_2 a_3 v_1^2 + a_3 a_1 v_2^2 + a_1 a_2 v_3^2}.$$

Quand AC est fixe, P décrit une droite; quand P est fixe, AC enveloppe une courbe de troisième classe.

Remarque. Si l'on suppose le côté $X_3$ à l'infini, les côtés $X_1$ et $X_2$ rectangulaires; si l'on remplace $\frac{a_1}{a_3}$ et $\frac{a_2}{a_3}$ par les carrés des demi-axes d'une ellipse et $\lambda^2$ par $-1$, on se trouve dans le cas particulier qui fait l'objet de la question proposée.

---

## ×Question 1285.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 216.)

*Deux cônes droits de rayons donnés $r_1$ et $r_2$ ont même surface totale et même volume. On propose de calculer cette surface, le volume et le rayon de la sphère inscrite.*

*Même question si les hauteurs $h_1$, $h_2$, sont données.* (Emmerich.)

*Solution par* MM. H. D. B. G., Rose, Cristesco et Vanderspeck. Soient $c_1, c_2$ une génératrice de chaque cône. Représentons par $\pi s$ et $\frac{1}{3}\pi v$ la surface totale et le volume des deux cônes. Alors

$$s = r_1^2 + r_1 c_1 = r_2^2 + r_2 c_2$$
$$v = r_1^2 h_1 = r_2^2 h_2$$

d'où

$$c_1 = \frac{s - r_1^2}{r_1}, \quad h_1 = \frac{v}{r_1^2}.$$

Or

$$c_1^2 = h_1^2 + r_1^2,$$

donc

$$\left(\frac{s - r_1^2}{r_1}\right)^2 = \frac{v^2}{r_1^4} + r_1^2,$$

ou

$$r_1^2 s^2 - 2r_1^4 s = v^2;$$

de même

$$r_2^2 s^2 - 2r_2^4 s = v^2.$$

Donc

$$s(r_1^2 - r_2^2)[s - 2(r_1^2 + r_2^2)] = 0,$$

d'où

$$s = 2(r_1^2 + r_2^2)$$

et

$$v^2 = 2(r_1^2 + r_2^2) r_1^2 [2(r_1^2 + r_2^2) - 2r_1^2]$$

ou

$$v = 2r_1 r_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Le rayon $\rho$ de la sphère inscrite vaut $\frac{v}{s}$ ou

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}.$$

Si les hauteurs $h_1$, $h_2$ sont données, on a de même

$$r_1^2 = \frac{v}{h_1}, \quad c_1 = \frac{s - r_1^2}{r_1} = \frac{sh_1 - v}{\sqrt{vh_1}};$$

donc

$$\frac{(sh_1 - v)^2}{h_1} = \frac{v^2}{h_1} + h_1^2 v,$$

ou

$$s^2 h_1 - 2sv = h_1^2 v,$$

et

$$s^2 h_2 - 2sv = h_2^2 v$$

d'où par soustraction

$$v = \frac{s^2}{h_1 + h_2}$$

et

$$s^2 h_1 (h_1 + h_2) - 2s^2 = h_1^2 s^2,$$

ou

$$s = \tfrac{1}{2} h_1 h_2$$

et

$$v = \frac{h_1^2 h_2^2}{4(h_1 + h_2)}.$$

Le rayon $\rho$ de la sphère inscrite est

$$\frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2\rho} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}.$$

---

## *Question 1288.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 216).

*Dans la pyramide* DABC *l'arête* CD *est perpendiculaire à la base* ABD ; *si l'on désigne par* $\alpha, \beta, \gamma$ *les angles* DAC, DBC, ACB *et qu'on pose* $\alpha + \beta + \gamma = 2p$, *le volume de la pyramide a pour expression*

$$\frac{\overline{CD}^3}{3 \sin\alpha \sin\beta} \cdot \sqrt{\cos p . \sin(p-\alpha) \sin(p-\beta) \cos(p-\gamma)} \quad \text{(A. C.)}$$

*Solution par* MM. J. Déprez et Rose. Si $\alpha', \beta', \gamma'$ sont les faces du trièdre C, $\alpha' + \beta' + \gamma = 2p'$, on sait que le volume de la pyramide triangulaire quelconque DABC est :

$$\frac{CD . CB . CA}{3} \sqrt{\sin p' . \sin(p'-\alpha') \sin(p'-\beta') \sin(p'-\gamma)}.$$

Mais dans la question proposée, l'angle D est birectangle donc on a

$$CB = \frac{CD}{\sin\beta}, \quad CA = \frac{CD}{\sin\alpha}, \quad p' = \frac{1}{2}\pi - (p-\gamma),$$

$$p' - \alpha' = p - \beta; \quad p' - \beta' = p - \alpha; \quad p' - \gamma = \tfrac{1}{2}\pi - p.$$

Remplaçant ces quantités par leurs valeurs dans l'expression du volume, on trouve

$$\frac{\overline{CD}^3}{3 \sin\alpha \sin\beta} \cdot \sqrt{\cos(p-\gamma) \sin(p-\beta) \sin(p-\alpha) . \cos p}.$$

Autre solution par MM. Emmerich, H. D. B. G. Chestesco et Prakhovo.

## Question 1294.

*Chercher quelques propriétés particulières du triangle* ABC, *dont la médiane issue de* A *est moyenne proportionnelle entre les côtés* AB *et* AC.

(J. N.).

*Solution par* M. A. Boutin. Si dans la relation :

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$$

on introduit l'hypothèse $m^2 = bc$, elle devient

$$a = (b - c)\sqrt{2}. \qquad (1)$$

2° Si, dans cette relation, on remplace les côtés par les sinus, elle donne comme relation entre les angles :

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{B - C}{2}$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \sqrt{2}.$$

3° La relation (1) montre que si l'on donne les points B et C, $b - c$ est constant; il en résulte que le lieu de A est une hyperbole (équilatère) de foyers B et C. — Cette même hyperbole est l'enveloppe des bissectrices intérieures issues de A.

4° Le lieu géométrique du centre de gravité du triangle ABC est une hyperbole équilatère de centre M (milieu de BC) et homothétique à la précédente.

5° $b - c$ et $a$ étant constants, $p - b$ et $p - c$ sont constants; donc si D et D′ sont sur BC des points tels que $MD = MD' = \frac{1}{2}(b - c)$, les lieux géométriques des centres des cercles inscrit et ex-inscrit relatifs à A, sont les perpendiculaires élevées à BC en D et D′.

6° L'enveloppe de la droite qui joint les centres I, $I_a$ des deux cercles précédents est une hyperbole de sommets réels D et D′, et de foyers B et C; cette propriété résulte soit de la relation $rr_a = (p - b)(p - c) = \frac{a^2}{8}$, soit de ce que l'angle $IBI_a$ est droit.

7° Si on prend comme axes BC et la perpendiculaire à BC en M, le lieu de l'orthocentre est la quartique :

$$2y^2(8x^2 - a^2) = (a^2 - 4x^2)^2,$$

etc....

M. Barisien signale, outre les propriétés 1°, 2°, 3° de ci-dessus, les suivantes :

1° Les relations

$$S = \tfrac{1}{2}bc\sin A = \tfrac{1}{2}m_a^2\sin A = \tfrac{1}{2}ah_a,$$

entraînent celle-ci :

$$\frac{m_a^2}{h_a} = \frac{\sin A}{a} = 2R.$$

2° On a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} - 2m_a^2\cos A;$$

d'où

$$\frac{a}{\sqrt{2}\,.\,2m_a} = \sin\frac{A}{2}.$$

3° La distance $\delta$ qui sépare le milieu de BC du pied de la hauteur $h_a$ est

$$\delta = \frac{a}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{(b+c)(b-c)}{2a} = \frac{b+c}{2\sqrt{2}}.$$

De la relation $a = (b-c)\sqrt{2}$, on conclut que si les sommets A et B sont fixes, le sommet C décrit un ovale de Descartes.

*Solution par* M. Emmerich. 1° Si l'on prolonge la médiane AM et la symédiane correspondante AN jusqu'à leurs rencontres en M′ et N′ avec la circonférence ABC, les triangles semblables ACM, AN′B donnent

$$AB.AC = AM.AN' \quad \text{d'où} \quad AM = AN'.$$

2° Soient P, Q les extrémités du diamètre mené par M, P étant le milieu des deux arcs BM′C et N′M′, et Q le milieu de l'arc BAC. AP étant la bissectrice de l'angle N′AM et AN′ étant égal à AM, on a PN′ = PM = PM′. De l'égalité des angles PMM′, PM′M on conclut immédiatement celle des angles AMQ, AQM; par conséquent, la hauteur AA′ est égale à la moitié de la flèche MQ. Il en résulte

$$h_a = \frac{1}{4}a\cot\frac{A}{2}.$$

On peut donc construire facilement le triangle ABC quand on donne $a$ et A, ou $a$ et R.

3° Les carrés des cordes QA, QB sont entre eux comme leurs projections sur le diamètre PQ; d'où $QB = QA.\sqrt{2}$. Or

$$QA = m_a, \quad QB = \frac{a}{2\sin\frac{A}{2}} = \frac{2k_a}{\cos\frac{A}{2}};$$

par conséquent,

$$(1) \qquad m_a = \frac{1}{4}a\sqrt{2}, \ \operatorname{cosec}\frac{A}{2} = k_a\sqrt{2}\,.\,\sec\frac{A}{2}.$$

4° Supposons $B > C$; alors

$$\textit{angle}\ AMB = AM'N' = APN' = APQ = A'AP;$$

donc la médiane AM forme avec la base BC le même angle que la bissectrice AP avec la hauteur AA', c'est-à-dire l'angle $\frac{1}{2}(B - C)$. Il en résulte

$$\sin\frac{1}{2}(B - C) = k_a : m_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}.$$

5° (Voir ci-dessus les n^os 1, 3 et 4).

6° De l'équation (1) combinée avec l'égalité $a = (b - c)\sqrt{2}$ on déduit

$$(b - c)^2 = 4bc\sin^2\frac{A}{2}.$$

Cette relation détermine le rapport $b : c$ en fonction de l'angle A.

On peut aussi la considérer comme l'équation en coordonnées polaires du lieu du point C quand on donne les sommets A et B.

7° Si l'on suppose la médiane AM fixe, et qu'on prolonge AM de $MA_1 = AM$, on a

$$BA.BA_1 = A\overline{M}^2.$$

Donc, les points B et C décrivent une lemniscate de Bernoulli ayant pour foyers les points A, $A_1$.

8° On a vu ci-dessus comment on peut construire le triangle ABC quand on donne la base $BC = a$ avec l'un des éléments A, $k_a$, $r$, $r_a$.

Lorsqu'on connaît $a$ et $m_a$, on déterminera MM' au moyen de l'égalité $m_a . MM' = \frac{1}{4}a^2$; on construira ensuite le triangle isoscèle AMN' dont on connaît les côtés, et l'on prendra sur la bissectrice de l'angle AMM' les longueurs $MB = MC = \frac{1}{2}a$.

9° Si l'on connaît la longueur de la symédiane $AN = k_a$, les lignes parallèles MN, M'N' donnent

$$k_a : m_a - k_a = m_a : MM' = m_a^2 : \tfrac{1}{4}a^2,$$

Donc la résolution du triangle par $a$ et $k_a$ conduit à une équation du troisième degré en $m_a$.

10° Soit D le pied de la bissectrice $AD = d_a$ de l'angle BAC. Les points D, P étant les centres du cercle inscrit et d'un cercle ex-inscrit au triangle isoscèle AMN', on a

$$d_a : AP = AM - \tfrac{1}{2} MN' : AM + \tfrac{1}{2} MN' = 8m_a^2 - a^2 : 8m_a^2 + a^2.$$

Comme on a aussi $d_a . AP = m_a^2$, on peut écrire

$$d_a^2 : m_a^2 = 8m_a^2 - a^2 : 8m_a^2 + a^2.$$

11° Notons enfin que les rayons des cercles exinscrits qui touchent intérieurement les côtés $b$ et $c$ ont pour expression $(2 \pm \sqrt{2})\, k_a$.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**281.** Construire un triangle ABC, connaissant les côtés indéfinis AB, AC et 1° l'orthocentre H; 2° le centre O du cercle circonscrit; 3° le centre de gravité G; 4° le point de Lemoine K.

Pour le 4°, s'appuyer sur ce que K est le centre de gravité de son triangle podaire.

**282.** Construire un triangle ABC, connaissant deux sommets B, C et 1° le centre de gravité G; 2° l'orthocentre H; 3° le centre $O_9$ du cercle des neuf points.

Pour le 3°, décrire le cercle $O_9$ dont on connaît le centre et un point, le milieu de BC; il coupera aux pieds des hauteurs issues de B et C le cercle décrit sur BC comme diamètre.

**283.** A et B étant deux points fixes d'une conique, et OY une droite fixe menée par le milieu O de la corde AB, les droites qui joignent A et B à un point quelconque M de la courbe, rencontrent OY en deux points F E, tels que

$$2\alpha\beta - l\alpha - l'\beta = K,$$

où $OE = \alpha$, $OF = \beta$, $AN = l$, $BP = l'$, AN et BP étant les cordes parallèles à OY (Petit-Bois).

La question est proposée ici comme exercice de géométrie analytique. La géométrie projective en donne une démonstration immédiate.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1801.** Démontrer que si les aires du cercle osculateur et de la conique osculatrice, en un point quelconque d'une courbe, sont mesurées par un même nombre, celui-ci est proportionnel au cube de l'arc.

(E. Cesáro).

×**1802.** Etant donnés, dans un même plan, deux triangles OAB, OCD, de même sommet, faire tourner l'un deux autour de O de manière que les quatre points A, B, C, D deviennent concycliques.

(*Educational Times.*)

×**1803.** Soient représentées par $[x]$, $[y]$, $[z]$ les projections sur une direction $\Delta$ des distances d'un point $M(x, y, z)$ aux trois côtés d'un triangle ABC. Si M est le point $\sqrt{a\cos A}$, $\sqrt{b\cos B}$, $\sqrt{b\cos C}$, ou l'un de ses associés, la somme $[x]^2 + [y]^2 + [z]^2$ est constante quelle que soit la direction $\Delta$. (E. Lemoine.)

**1804.** Trouver l'enveloppe d'un cercle dont le centre parcourt la logarithmique $y = e^x$ et qui est tangent à l'asymptote de cette courbe.

(H. Brocard.)

**1805.** Trouver une courbe telle que la projection du pied de l'ordonnée sur la tangente parcoure une ligne droite. (J. Neuberg.)

**1806.** On considère tous les triangles ayant pour sommet un point A, dont les sommets B et C glissent sur une droite donnée et dont les angles B et C ont une différence donnée $\alpha$. Démontrer par la géométrie les théorèmes suivants :

1° les hauteurs BB', CC' enveloppent une parabole; 2° la droite d'Euler OGH enveloppe une parabole; 3° les médianes issues de B, C enveloppent une ellipse; 4° les points B', C' décrivent une strophoïde oblique; 5° les centres isodynamiques se meuvent sur une circonférence; 6° le point de Lemoine K et son associé $K_a$ décrivent chacun une hyperbole; 7° l'axe orthique et la droite de Lemoine passent chacun par un point fixe; 8° le cercle des neuf points touche une droite fixe; les cercles tritangents I et $I_a$ touchent aussi une droite fixe (autre que BC), et il en est de même des cercles $I_b$ et $I_c$. (J. Déprez).

# THÉORIE ÉLÈMENTAIRE DU COMPLEXE LINÉAIRE DE DROITES(*),

par M. Stuyvaert (Gand).

1. Nommons *complexe linéaire de droites* un ensemble de droites de l'espace, tel que, dans tout plan et par chaque point de ce plan, il passe une droite de cet ensemble ou une infinité.

Cette définition doit être entendue de la manière suivante : si par un point A, dans un plan $\alpha$, il passe plus d'un rayon du complexe, toutes les droites menées par A dans le plan $\alpha$ appartiennent au complexe.

Il existe des ensembles répondant à cette définition : par exemple le système des droites qui s'appuient sur un axe fixe.

2. Par tout point A, il passe évidemment une infinité de rayons du complexe. Or, ou bien tous ces rayons sont dans un même plan $\alpha$, ou bien il y a au moins trois de ces rayons, $r_1, r_2, r_3$, non situés dans un même plan.

Dans le premier cas, le plan $\alpha$ est appelé le *plan focal* du point A.

Dans le second cas : 1° toute droite menée par A dans le plan $(r_1r_2)$ est, d'après la définition, un rayon du complexe; 2° une droite quelconque $r$ menée par A appartient au complexe, car le plan $(rr_3)$ coupe, en $r_4$ par exemple, le plan $(r_1r_2)$ et contient deux rayons $r_3$ et $r_4$ du complexe; par suite $r$ fait partie du complexe. Dans ce second cas, A est appelé un *point singulier*.

Corrélativement les rayons du complexe situés dans un plan passent par un point appelé *pôle* du plan; ou bien toutes les droites du plan appartiennent au complexe et le plan est *singulier*.

3. S'il existe un point singulier S, il en existe au moins un second; car un plan $\tau$ ne passant pas par S contient des rayons du complexe et soit T le point de rencontre de deux d'entre eux $t_1$ et $t_2$. Par T il passe trois rayons TS, $t_1$ et $t_2$ non situés dans un même plan, donc T est singulier.

S'il existe deux points singuliers S et T, tous les points de la droite ST sont singuliers, car d'un point quelconque A de l'espace on peut

(*) On a fait bien des fois l'historique du complexe linéaire; il suffira d'en résumer les phases principales, en citant les noms de Möbius, Plücker, Schur et Demoulin. Le présent exposé est élémentaire : il ne suppose en somme que la notion du rapport anharmonique de quatre plans.

mener les droites AS et AT appartenant au complexe; par suite le rayon mené de A à un point quelconque R de ST fait partie du complexe; mais puisque A est arbitraire, il en résulte que R est un point singulier.

S'il y a trois points singuliers S, T, U non en ligne droite, tous les points de l'espace sont singuliers : 1° par un point quelconque A non situé dans le plan STU, on peut mener trois rayons AS, AT, AU non situés dans un plan, donc A est singulier; 2° cela étant, on démontre de même la propriété pour les points du plan STU.

Corrélativement, s'il y a un plan singulier, il y en a une infinité formant un faisceau et tous les points de l'axe du faisceau sont singuliers; si trois plans ne passant pas par une même droite sont singuliers, il en est de même de tous les plans de l'espace.

Trois cas peuvent donc se présenter : 1° tous les points et tous les plans de l'espace sont singuliers; ce cas doit être écarté, car le complexe comprend toutes les droites de l'espace, et cesse d'exister, puisque rien ne spécialise ses rayons; 2° il existe une infinité de points singuliers en ligne droite et de plans singuliers passant par cette droite; le complexe est *spécial* et se compose de tous les rayons qui s'appuient sur la droite en question (voir l'exemple du n° 1); 3° il n'existe ni point ni plan singulier.

Il reste à voir si ce dernier cas est possible; nous l'admettrons provisoirement et nous pousserons la théorie jusqu'à ce qu'elle nous donne une construction du complexe.

**4.** Soient A et B les pôles de deux plans qui se coupent suivant CD. Un point quelconque C de CD est situé sur les rayons AC et BC; son plan focal est donc CAB. De même un point quelconque M de AB a pour plan focal MCD. Les droites AB et CD, telles que les plans focaux des points de l'une passent par l'autre sont dites *conjuguées*. Donc si un point M décrit une droite n'appartenant pas au complexe, son plan focal engendre un faisceau perspectif avec la ponctuelle (M). Si un point A décrit un rayon $r$ du complexe, son plan focal $\alpha$ décrit un faisceau passant par $r$ et coupe, en D, une droite fixe $d$ n'appartenant pas au complexe; le plan focal $\delta$ de D passe par A; les points A et D décrivent des ponctuelles perspectives et le faisceau ($\alpha$) est perspectif à la ponctuelle (D); donc il est projectif à la ponctuelle (A).

On voit aussi que les conjuguées des droites d'un plan passent par le pôle de ce plan.

5. Les pôles d'un système de plans parallèles sont sur une droite, appelée *diamètre*, conjuguée de la droite de l'infini située dans ces plans. Tous les diamètres sont parallèles, puisqu'ils passent par le pôle du plan de l'infini. Un système de plans perpendiculaires aux diamètres a ses pôles sur un diamètre spécial $Oz$, appelé *axe*.

Menons une perpendiculaire $Ox$ à $Oz$ et une perpendiculaire $Oy$ au plan $xOz$. Par un point A de $Ox$, on peut mener un rayon $r$ du complexe parallèle au plan $yOz$; l'angle $\alpha$ de ce rayon avec une parallèle à $Oz$ mesure l'angle du plan focal de A avec le plan $xOz$; pour un second point A′ de $Ox$, on a un rayon $r'$ analogue à $r$ et faisant un angle $\alpha'$ avec l'axe. Le rapport anharmonique des points O, A, A′ et du point à l'infini de $Ox$ est égal au rapport anharmonique des plans focaux; or O étant le pôle de $xOy$ et le point de l'infini sur $Ox$ étant le pôle de $xOz$, l'égalité de ces rapports anharmoniques donne la relation

$$OA \operatorname{tg} \alpha = OA' \operatorname{tg} \alpha'.$$

La quantité $OA \operatorname{tg} \alpha$ est constante pour tous les points de $Ox$. Elle n'est pas altérée par une translation parallèle à l'axe, puisque des plans parallèles ont leurs pôles également distants de $Oz$. Elle n'est pas davantage altérée par une rotation autour de l'axe; pour le démontrer, considérons deux droites de même longueur, OA et OB perpendiculaires à l'axe; on voit sans peine que la conjuguée OC de AB et l'axe $Oz$ déterminent un plan parallèle à AB, savoir le plan focal du point à l'infini de AB; donc ce plan est bissecteur de l'angle des plans focaux de A et B; ceux-ci sont donc également inclinés sur l'axe.

La constance de l'expression $OA \operatorname{tg} \alpha$ pour tous les points de $Ox$ montre aussi que les rayons $r$ du complexe qui rencontrent $Ox$ à angle droit percent un plan quelconque parallèle à $xOz$ en des points d'une droite (*).

Ceci permet de construire tous les rayons rencontrant normalement $Ox$ et par suite, au moyen d'une translation quelconque parallèle à l'axe et d'une rotation quelconque autour de l'axe, tous les rayons du complexe.

Si donc $l$ est la plus courte distance d'un rayon du complexe à son axe, et $\alpha$ l'angle de ce rayon et de l'axe, la quantité $l \operatorname{tg} \alpha$ est constante et se nomme *paramètre* du complexe.

---

(*) Ces rayons sont donc les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique équilatère.

6. Les développements des nos 4 et 5 ne sont pas neufs et ne pouvaient pas l'être, puisque la Géométrie projective a déjà été utilisée pour cette théorie; mais ils nous étaient indispensables; c'est pourquoi nous les avons exposés le plus brièvement possible.

Il nous reste à faire deux remarques.

En même temps que le complexe linéaire, nous avons étudié le système focal (*Nullsystem*) qui s'y trouve lié; ce qui précède n'est que le développement de cette idée : toute transformation qui fait correspondre, à tout point de l'espace, un plan passant par ce point donne un système focal. Ce cas particulier est peut-être le seul où la propriété d'une correspondance d'être univoque conduit, par une voie purement géométrique, à la projectivité. Les auteurs qui ont voulu établir la réciprocité ou la collinéation en général sur un fondement analogue ont dû admettre, explicitement ou implicitement, que la transformation peut s'exprimer par des relations algébriques.

L'existence de systèmes focaux d'ordres supérieurs, étudiés pour la première fois par M. Voss (*), n'est pas en contradiction avec ce que nous avons dit. En effet, les équations de ces transformations montrent, à première vue, que, dans ces systèmes, il existe des points dont le plan focal est indéterminé, en d'autres termes que tous les plans ne passent pas par leurs pôles.

---

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1900.

(Voir *Mathesis* (2), X. pp. 217 et 254.)

### Solutions géométriques et généralisations de la première question de géométrie analytique;

par M. J. DÉPREZ.

1. *Soit* ABCD *un parallélogramme circonscrit à une hyperbole. Lorsque le sommet* A *se meut sur la circonférence* Δ *qui a pour diamètre l'axe transverse, trouver les lieux décrits par les sommets* B *et* D.

*Première solution.* La circonférence Δ étant le lieu des projections des foyers F, F' sur les tangentes, la droite FA est, par exemple, perpendiculaire à la droite AD, et par suite aussi à sa parallèle CB; donc CB rencontre Δ en un point U de FA. De même, CD étant perpendicu-

---

(*) *Math. Ann.*, t. 23, p. 45

laire à FC. AB rencontre Δ en un point V de CF. Ainsi, si l'on joint F aux extrémités d'un diamètre AC de Δ par des droites qui coupent Δ en U et V, les droites CU, AV se coupent en un point B du lieu cherché. Ce lieu est donc la polaire de F par rapport à Δ, ou la directrice correspondant à F.

Soient M, M′ les points de contact des tangentes menées de F à Δ, et N, N′ les points de Δ diamétralement opposés à M, M′. La droite MM′ est une directrice de l'hyperbole, et les droites MN, M′N′ sont les asymptotes. Lorsque A et C se confondent avec M et N, deux côtés opposés du parallélogramme ABCD se confondent avec l'asymptote MN; B et D eux-mêmes coïncident avec M et N. Lorsque le point A est sur l'arc MM′ de Δ, B est extérieur au segment MM′ de la directrice; aux points de l'arc MN′ correspondent les positions de B sur le segment MM′.

*Deuxième solution.* Soient E, G, H, I les points de contact des côtés AB, BC, CD, DA avec la conique.

AF est bissectrice (extérieure) de l'angle EFI; AI est bissectrice (intérieure) de l'angle FIF′; d'ailleurs AF est perpendiculaire à AI, donc les vecteurs EF, IF′ sont parallèles. Mais FG est également parallèle à IF′; donc les points E, F, G sont en ligne droite et B, pôle de EFG décrit la directrice relative au foyer F.

II. Pour généraliser, considérons deux coniques concentriques ayant respectivement pour équations

$$Ax^2 + By^2 = 1, \quad Mx^2 + 2Nxy + Py^2 = 1.$$

Circonscrivons à la première un parallélogramme ABCD, dont les sommets opposés A et C appartiennent à la seconde, et cherchons le lieu des sommets B et D. Si X, Y désignent les coordonnées du point A, l'équation quadratique des tangentes AB, AD est

$$(Ax^2 + By^2 - 1)(AX^2 + BY^2 - 1) - (AxX + ByY - 1)^2 = 0 \quad (1)$$

Les points B, D vérifient cette équation; comme ils sont aussi situés sur le diamètre BD conjugué avec le diamètre OA, on a encore

$$AxX + ByY = 0, \quad (2)$$

ce qui réduit l'équation (1) à

$$(Ax^2 + By^2)(AX^2 + BY^2) - (Ax^2 + By^2) - (AX^2 + BY^2) = 0. \quad (3)$$

Enfin,

$$MX^2 + 2NXY + PY^2 = 1. \quad (4)$$

Il suffit maintenant d'éliminer X, Y entre les égalités (2) (3) et (4).

Introduisons une inconnue auxiliaire $\lambda$ en remplaçant la relation (2) par les deux égalités

$$X = \lambda By, \quad Y = -\lambda Ax.$$

En substituant ces valeurs dans (3) et (4) on obtient

$$(Ax^2 + By^2)[\lambda^2 AB(Ax^2 + By^2 - 1) - 1] = 0, \tag{5}$$

$$\lambda^2(MB^2y^2 + 2NABxy + PA^2x^2) = 1. \tag{6}$$

Supprimons le facteur $Ax^2 + By^2$ de (5), qui correspond aux asymptotes de la première conique; le rôle de ces droites s'explique par cette circonstance qu'une asymptote est une tangente et aussi un diamètre qui se confond avec son conjugué. Pour avoir l'équation du lieu proprement dit, il reste à éliminer $\lambda^2$ entre (6) et l'équation (5) simplifiée; ce qui donne

$$A^2(B - P)x^2 - 2NABxy + B^2(A - M)y^2 - AB = 0 \tag{7}$$

Les points B et D se meuvent donc sur une conique. Si l'on suppose $N = 0$, $A = M$, l'équation (7) se réduit à

$$A(B - P)x^2 - B = 0,$$

et le lieu se compose de deux droites; les axes coordonnés étant supposés quelconques, les deux coniques proposées se touchent aux extrémités d'un diamètre commun.

Réciproquement, si un sommet A d'un parallélogramme ABCD circonscrit à une conique donnée se meut sur une droite donnée, les sommets B et D se meuvent sur une conique ayant avec la première courbe un double contact aux extrémités du diamètre conjugué avec la droite donnée.

III. Voici un théorème plus général :

Soit ABCD un quadrilatère variable circonscrit à une conique U; si les sommets opposés A, C sont les extrémités d'un diamètre mobile d'un cercle V bitangent à U, on a les propriétés suivantes :

1° Les sommets B, D décrivent les directrices de U;

2° Le point d'intersection E des côtés AB, CD et le point de rencontre G des côtés BC, DA se meuvent sur un cercle W bitangent à U; ce sont les extrémités d'un même diamètre de W.

3° Les droites AC, BD se coupent sur la corde commune à U et V.

4° Les droites BD, EG se coupent sur la corde commune à U et W.

## [x]SUR LA POSSIBILITÉ DU PLAN.

**1.** ***Renseignements historiques.*** Duhamel le premier, croyons-nous, observa que la définition habituelle du plan (*surface dans laquelle prenant deux points à volonté et joignant ces deux points par une ligne droite, cette ligne est toute entière dans la surface*) contient une infinité de conditions dont il faut démontrer la compatibilité. Il a esquissé cette démonstration pp. 40-42, dans son premier ouvrage : ***Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques***, publié en 1823, avec Reynaud (Paris, Bachelier) et plus tard, dans la deuxième partie, pp. 12-16 de son livre sur les *Sciences de raisonnement* (1866).

Gauss, dans une lettre du 27 mai 1829 à Bessel (*Œuvres*, t. VIII, p. 200) fait la même remarque que Duhamel. On a retrouvé dans ses papiers diverses notes relatives à la question. Dans l'une il écrit : *Plani possibilitatem demonstravi* (1797, Jul. 28, Gotting.) (*Œuvres*, VIII, 162). Ailleurs (*Ib.* p. 194), il dit que la démonstration n'est pas très difficile, mais qu'elle n'est pas non plus très facile; puis il en donne une esquisse (pp. 194-195).

Wolfgang Bolyai, dans son *Tentamen* (1832), Lobatchefsky, dans ses *Nouveaux principes de Géométrie* (1835), M. De Tilly, dans l'*Essai* de 1878, ont traité la même question d'une manière beaucoup plus approfondie.

On peut citer encore, d'après les *Éléments* de Baltzer, maints géomètres de la première moitié du siècle (Deahna, Gerling, Crelle, Erb) qui ont essayé de démontrer la possibilité du plan. Il y en a eu encore plus dans la seconde moitié, pensons-nous, à cause des recherches sur les premiers principes de la géométrie suscitées par la géométrie non euclidienne.

Nous avons aussi esquissé une démonstration de la propriété fondamentale du plan dans *Mathesis* (1895, (2), V, p. 63 ou 1896, (2), VI, supplément, p. 44); elle nous semble la plus simple possible, pourvu que l'on admette la notion de distance comme notion première irréductible.

**2.** ***Remarques sur la démonstration de M. Kool.*** A. Plusieurs de nos abonnés nous ont transmis l'observation suivante : la définition de la surface S dont s'occupe M. Kool suppose explicitement la comparaison

des aires courbes; or la notion d'aire courbe suppose celle d'aire plane et, par conséquent, celle du plan.

On peut répondre à cette objection, comme nous l'a fait observer M. De Tilly, que M. Kool, *en réalité*, ne se sert pas de la notion d'aire, mais de celle de la longueur d'une courbe, laquelle se ramène par les limites, à la notion de longueur de la droite. Cette remarque est surtout utile si l'on veut simplifier l'exposition de M. Kool, pp. 17-19.

B. La partie de la démonstration de M. Kool où il prouve que le prolongement des droites finies qu'il a d'abord considérées est aussi dans le plan, se retrouve nécessairement dans la plupart des démonstrations de l'existence du plan.

C. On pourrait, au début, établir l'existence d'une surface S jouissant de la propriété qui sert de point de départ à M. Kool au moyen d'un raisonnement souvent employé par M. De Tilly, dans son *Essai*. Cette surface S serait considérée comme une surface conique, de sommet O, contenant la droite indéfinie GOH et telle que la somme des angles formés par les génératrices successives de OG à OH soit minima. Nous parlons d'angles pour abréger : en réalité, on ne considérerait que des longueurs, bases de triangles isoscèles ayant tous même sommet O et des côtés égaux émanant de ce point. (P. M.).

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Vielecke und Vielfache, Theorie und Geschichte** von Dr Max Brückner, Oberlehrer am Gymnasium zu Bautzen, 1900. Leipzig, Teubner (VIII + 227 pages in-4°, avec 8 planches lithographiées et 5 planches doubles photographiées et de nombreuses figures dans le texte). Prix : 16 marcs.

Ce livre contient un exposé méthodique, extrêmement clair, de la Théorie des polygones et des polyèdres d'après les derniers progrès de la science, et retrace les phases principales du développement historique de cette théorie. Les géomètres sauront gré à l'auteur d'avoir réuni et groupé synoptiquement de nombreux matériaux éparpillés dans un grand nombre de revues, programmes ou monographies(*).

L'ouvrage est divisé en six chapitres portant respectivement les titres : A. Théorie générale des polygones. B. Polygones particuliers. C. Théorie générale

---

(*) Nous signalons à l'auteur une lacune : il n'a pas eu connaissance des travaux de M. J. Césaro et de M. Dellac.

des polyèdres. D. Théorie des polyèdres euléricns. E. Polyèdres euléricns particuliers. F. Polyèdres particuliers d'espèce particulière. Chacun de ces chapitres, bien subdivisé, contient une notice historique d'un très grand intérêt. Deux appendices sont consacrés à la classification due à M. JORDAN, des polyèdres d'après leur symétrie, et aux polyèdres annulaires (Ringpolyèder).

Les nombreuses figures, bien exécutées, facilitent beaucoup l'intelligence du texte.

L'auteur ne traite pas des figures dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions, afin de conserver à son ouvrage un caractère élémentaire; le lecteur qui voudrait aborder cette étude en trouve les premiers éléments dans les *Éléments de la Géométrie à quatre dimensions*, par M. BRUCKNER.

L'ouvrage que nous venons de signaler aux abonnés de *Mathesis*, est très propre à suggérer des recherches personnelles.

(En partie, d'après les *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1901, premier trimestre).

---

**A Brief History of Mathematics**, an Authorized Translation of Dr. KARL FINK'S *Geschichte der Elementar-Mathematik* by W. W. BEMAN, Professor in the University of Michigan and D. E. SMITH, Principal of the State Normal School at Brockport, N. Y. Chicago, The Open Court Publishing Company 1900 (XII-333 p. in-8°, cartonné) Prix : 1,50 dollar.

*Sommaire.* I. Numérations et chiffres. II. Arithmétique. 1. Généralités. 2. Antiquité. 3. Du 8e au 14e siècle. 4. Du 15e au 19e siècle. III. Algèbre. 1. Généralités. 2. Antiquité, Hindous, Arabes, Chinois (arithmétique universelle, algèbre). 3. Jusqu'au milieu du 17e siècle. 4. Depuis le milieu du 17e siècle. IV. Géométrie. 1. Généralités. 2. Egyptiens et Babyloniens. 3. Romains, Hindous, Chinois, Arabes. 4. De Gerbert à Descartes. 5. De Descartes à l'époque actuelle. V. Trigonométrie. 1. Généralités. 2. Egyptiens, Grecs, Hindous, Arabes. 3. Depuis le Moyen Âge jusqu'au milieu du 17e siècle. 4. Depuis le milieu du 17e siècle. — Notes biographiques (25 pages). Index.

Le plan de l'ouvrage est évidemment défectueux : on ne peut pas séparer artificiellement l'évolution des diverses branches des mathématiques. Le titre de l'original allemand (1890) : *Résumé de l'histoire des mathématiques élémentaires et notes sur les parties connexes des mathématiques supérieures* en délimite mieux l'objet que le titre anglais actuel.

L'ouvrage de FINCK n'a pas été mis au point par les traducteurs et ils y ont laissé çà et là de petites erreurs qu'il eût été facile de corriger. Enfin les échappées sur les mathématiques supérieures que l'on trouve dans le volume (par exemple, sur les fonctions elliptiques, la géométrie non euclidienne, etc.) ne sont pas toujours suffisamment objectives. Malgré ces défauts, l'ouvrage est intéressant et instructif, particulièrement dans sa partie élémentaire (Partiellement d'après ENESTRÖM, *Bibl. math.* (3), I, pp. 519-521.) (P. M.)

---

**Électricité et optique**, la Lumière et les Théories électrodynamique. Leçons professées à la Sorbonne, en 1888, 1890 et 1899, par H. POINCARÉ, Membre de l'Institut, deuxième édition revue et complétée par J. BLONDIN, agrégé de l'Université, et E. NÉCULCÉA, Licencié ès-Sciences, 1901. Paris, Georges Carré et C. Naud. In-8° de X-632 pages avec 62 figures dans le texte. Prix 22 frs.

M. Blondin a publié en 1890, les leçons professées par M. Poincaré, pendant le second semestre de 1888-1899, sur *les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière*; M. Brunhes, en 1891, celles du second semestre 1889-1890 sur *les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz*. Ces deux ouvrages étant épuisés, M. Poincaré les a fait réimprimer, avec quelques remaniements et modifications, mais en supprimant diverses notes et ce qui se rapporte aux expériences de Hertz, parce qu'il a eu l'occasion de les faire connaître avec beaucoup de détails dans ses leçons sur les *Oscillations hertziennes*. La nouvelle édition des leçons de 1888 et 1890 constitue la première et la seconde partie de l'ouvrage que nous annonçons. La troisième et la quatrième partie contiennent les leçons de 1899, où M. Poincaré compare les théories relatives à l'électrodynamique, dont les principales sont celles de Hertz, de Lorentz et Larmor. Celle de Lorentz semble le mieux rendre compte des faits.

Au point de vue purement mathématique, nous observons que M. Poincaré, dans l'Introduction de son livre, reproduit, d'après la première édition, le célèbre théorème qui a scandalisé plus d'un physicien : *Si un phénomène comporte une explication mécanique complète, il en comporte une infinité d'autres qui rendent également bien compte de toutes les particularités revélées par l'expérience.* — M. Poincaré (p. 536) regarde comme très probable que les phénomènes optiques ne dépendent que des mouvements relatifs des corps matériels en présence, et non de ce que l'on appelle leurs mouvements absolus, celui de la Terre, par exemple.

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

3. *Axes d'une conique.* Pour trouver la direction des axes de la conique ayant pour équation en coordonnées normales

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hyx = 0,$$

on peut joindre un sommet quelconque du triangle de référence ABC, A par exemple, au point M du cercle ABC qui a pour coordonnées

$$\frac{a}{l(b^2 - c^2) + (m - n)a^2 + 2gca - 2hab},$$

$$\frac{b}{m(c^2 - a^2) + (n - l)b^2 + 2hab - 2fbc},$$

$$\frac{c}{n(a^2 - b^2) + (l - m)c^2 + 2fbc - 2gca};$$

les directions cherchées seront celles des bissectrices des angles que fait BC avec AM.

Ce résultat a une certaine utilité parce qu'il spécifie d'une façon symétrique et d'un calcul facile les directions des axes d'une conique quelconque. (E. Lemoine).

Pour démontrer la construction indiquée, cherchons l'équation de la conique V semblable à la conique donnée U et circonscrite au triangle de référence. Or, on sait qu'en coordonnées cartésiennes homogènes on peut prendre pour équations de ces lignes

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2D'yz + 2E'xz + F'z^2 = 0,$$
$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dyz + 2Exz + Fz^2 = 0;$$

en retranchant ces équations membre à membre, on trouve

$$[2(D' - D)y + 2(E' - E)x + (F' - F)z]z = 0.$$

On en conclut que la droite de l'infini ($z = 0$) est une sécante commune.

Par conséquent, l'équation de V, en coordonnées normales, est de la forme

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$
$$- (ax + by + cz)(ux + vy + wz) = 0,$$

avec les conditions

$$l = au, \quad m = bv, \quad n = cw.$$

Des équations de V et du cercle ABC, on déduit facilement les coordonnées du quatrième point d'intersection M de ces deux courbes. Mais d'après un théorème connu, les droites BC et AM sont également inclinées sur un axe de V, etc. (J. N.)

4. *Sur deux lieux géométriques.* La *Question d'examen* 388 (*Mathesis* (1), IX, p. 103), est ainsi formulée :

*Un angle* AOB, *de grandeur constante, tourne autour de son sommet. Par un point fixe* C, *on mène une sécante rencontrant les côtés de l'angle en* A *et* B. *Trouver les lieux géométriques des points* A *et* B, *lorsque* : 1° *le rapport* CA : CB *est constant ;* 2° *le produit* CA.CB *est constant.*

Il est dit que ces lieux sont des circonférences, on le vérifie sans peine pour le 1er; mais pour le 2d il doit y avoir erreur. Effectivement, si on considère une position particulière de l'angle AOB, pour tracer la sécante CAB, on peut chercher l'intersection de OA avec la transformée de OB par rayons vecteurs réciproques, le pôle de la transformation

étant C et sa puissance le produit donné CA.CB. Cette transformée est un cercle Γ et, dans le mouvement de AOB autour de son sommet, ce cercle Γ engendre un faisceau ponctuel projectif au faisceau décrit par OB, donc aussi à celui que décrit OA; par suite le lieu de A est une cubique.

Il est assez intéressant de résoudre la question par la géométrie analytique. (M. Stuyvaert).

Pour trouver le premier lieu, on mène par B une parallèle à OA, et par A une parallèle à OB; les points B′, A′ où ces parallèles rencontrent la droite CO sont fixes, et les angles OBB′, OAA′ sont égaux à l'angle mobile; donc etc.

Prenons pour axes coordonnés la droite CO et une perpendiculaire CY; en posant CO $= a$ et désignant par $(x, y)$, $(kx, ky)$ les coordonnées des points A, B, on trouve les équations

$$k^2(x^2+y^2)^2 = b^4, \qquad \frac{\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{ky}{kx-a}}{1+\dfrac{ky^2}{(x-a)(kx-a)}} = \operatorname{tg}\alpha,$$

entre lesquelles il faut éliminer le paramètre variable $k$. Le lieu de A est une cubique circulaire. (J. N.)

5. *Sur l'aire d'un quadrilatère.* Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales AC, BD forment avec un axe $Ox$ des angles supplémentaires $\alpha, \pi - \alpha$. Soient $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$ les coordonnées des points A, B, C, D par rapport aux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$. Q désignant l'aire du quadrilatère, on a

$$2Q = AC,\ BD \sin 2\alpha = 2AC \cos\alpha,\ BD \sin\alpha = (x_1 - x_3)(y_2 - y_4),$$

formule qui peut servir à calculer l'aire du quadrilatère déterminé par les quatre points communs à une conique et à une circonférence. (Comparer *Mathesis*, (2) X, p. 225). (J. Déprez).

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### ×Question 989.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 263).

*Entre quelles limites peuvent varier $x$ et $y$ dans l'équation*

$$a^2 + b^2 + a^2x + \frac{b^2}{x} = c^2 + d^2 + c^2y + \frac{d^2}{y},$$

*a, b, c, d étant quatre nombres positifs dont le plus grand est moindre que la somme des trois autres.* (J. Neuberg.)

*Solution par* MM. T. Klompers *et* J. Jonescu. Ordonnons l'équation proposée par rapport à $y$ :

$$c^2xy^2 - [a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)x + b^2]y + d^2x = 0.$$

Son réalisant $\Delta$ est le produit des deux facteurs

$$f(x) \equiv a^2x^2 + [a^2 + b^2 - (c + d)^2]x + b^2,$$
$$\varphi(x) \equiv a^2x^2 + [a^2 + b^2 - (c - d)^2]x + b^2.$$

Appelons $x_1$, $x_2$, A les racines et le réalisant de $f(x)$; et $x_3$, $x_4$, B les racines et le réalisant de $\varphi(x)$. Nous aurons

$$A = (a + b + c + d)(a + b - c - d)(a - b + c + d)(a - b - c - d),$$
$$B = (a - b + c - d)(a - b - c + d)(a + b + c - d)(a + b - c + d).$$

Les quantités $a + b + c + d$, $a - b + c + d$, $a + b + c - d$, $a + b - c + d$, $-a + b + c + d$ étant positives, nous avons à examiner les signes des expressions

$$a + b - (c + d), \quad a + c - (b + d), \quad a + d - (b + c).$$

Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer $a \geqq b$, $c \geqq d$, $a \geqq c$; s'il en était autrement, on changerait $x$ en $\frac{1}{x}$, ou $y$ en $\frac{1}{y}$, ou $x$ en $y$ et $y$ en $x$.

Dans ces conditions, on a $a + c - (b + d) \geqq 0$. Nous négligerons les hypothèses simultanées $a = c$, $b = d$, qui donnent $A = 0$, $B = 0$ et réduisent l'équation proposée à

$$(x - y)(a^2xy - b^2) = 0,$$

de sorte que les variations de $x$ et de $y$ sont illimitées.

Si $a$, $b$, $c$, $d$ sont des nombres inégaux, on peut faire les hypothèses

$$a > b > c > d, \quad a > c > b > d, \quad a > c > d > b.$$

Dans les deux premières hypothèses, A est négatif, et par suite $f(x)$ est positif pour toutes les valeurs de $x$. Ce cas se subdivise en deux autres :

1° $a + d \leqq b + c$. Le réalisant B étant négatif ou nul, le trinôme $\varphi(x)$ n'est jamais négatif. Par conséquent, $y$ est réel quel que soit $x$. Ainsi, $x$ peut varier de $-\infty$ à $+\infty$.

2° $a+d>b+c$. B étant positif, $\varphi(x)$ n'est positif que pour $x>x_3$ ou $<x_4$ (on suppose $x_3>x_4$). Comme le produit $x_3x_4$ est positif et la somme $x_3+x_4$ négative, les racines $x_3$, $x_4$ sont négatives. Ainsi, $x$ varier de $-\infty$ à $x_4$ et de $x_3$ à $+\infty$.

Considérons maintenant l'hypothèse $a>c>d>b$. Le réalisant B étant positif, les racines de $\varphi(x)$ sont réelles; on voit facilement qu'elles sont négatives. Si l'on suppose $a+b<c+d$, A est positif, et les racines $x_1$, $x_2$ de $f(x)$ sont réelles; leur produit et leur somme étant positifs, elles sont positives. Pour que $y$ soit réel, $x$ doit être extérieur aux deux intervalles $(x_2, x_1)$, $(x_4, x_3)$; il peut varier de $-\infty$ à $x_4$, de $x_3$ à $x_2$ et de $x_1$ à $+\infty$. Au contraire, si $a+b>c+d$, $f(x)$ est toujours positif; $y$ sera donc réel, si $x>x_3$ ou $<x_4$.

*Autre solution.* Étudions d'abord les variations des quantités

$$X\equiv a^2+b^2+a^2x+\frac{b^2}{x},\qquad Y\equiv c^2+d^2+c^2y+\frac{d^2}{y}.$$

Si $x$ est positif, la somme $a^2x+\frac{b^2}{x}$ dont les parties ont un produit constant, passe par un minimum lorsque ces parties deviennent égales. D'après cela, $\varepsilon$ désignant un nombre positif aussi petit qu'on veut, les variations de X, et par analogie celles de Y, peuvent être figurées comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{llllll} x\ldots & -\infty, & -\frac{b}{a}, & -\varepsilon; & +\varepsilon, & \frac{b}{a}, & +\infty. \\ X\ldots & -\infty, & (a-b)^2, & -\infty; & +\infty, & (a+b)^2, & +\infty. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} y\ldots & -\infty, & -\frac{d}{c}, & -\varepsilon; & +\varepsilon, & \frac{d}{c}, & +\infty. \\ Y\ldots & -\infty, & (c-d)^2, & -\infty; & +\infty, & (c+d)^2, & +\infty. \end{array}\right.$$

X ne peut prendre aucune valeur comprise entre $(a-b)^2$ et $(a+b)^2$; toute autre valeur de X est obtenue par deux valeurs de $x$ dont le produit est égal à $\frac{b^2}{a^2}$. De même, toute valeur de Y plus grande que $(c+d)^2$ ou plus petite que $(c-d)^2$ est obtenue par deux valeurs de $y$ dont le produit est égal à $\frac{d^2}{c^2}$; mais Y ne peut avoir une valeur comprise entre $(c-d)^2$ et $(c+d)^2$.

Ces considérations permettent de voir pour quelles valeurs réelles de $x$ et de $y$ l'équation $X = Y$ est possible. Il y a lieu de distinguer deux cas : 1° Les valeurs extrêmes de Y, $(c-d)^2$ et $(c+d)^2$, sont comprises entre les valeurs extrêmes de X, $(a-b)^2$ et $(a+b)^2$ ou inversement; 2° l'une de ces valeurs de Y tombe dans l'intervalle formé par les valeurs extrêmes de X et l'autre en dehors. Il nous suffira d'examiner les deux hypothèses :

1° $\quad (a-b)^2 < (c-d)^2 < (c+d)^2 < (a+b)^2$;

2° $\quad (c-d)^2 < (a-b)^2 < (c+d)^2 < (a+b)^2$.

Dans la première de ces hypothèses, l'équation $X = Y$ n'est possible pour des valeurs réelles de $x$ et de $y$ que lorsque X a une valeur plus grande que $(a+b)^2$ ou plus petite que $(a-b)^2$. Chacune de ces valeurs est réalisée par deux valeurs de $x$ dont le produit est égal à $\frac{b^2}{a^2}$; $x$ pourra avoir une valeur quelconque comprise entre $-\infty$ et $+\infty$. Quant à $y$, les valeurs extrêmes possibles de Y, savoir $Y = (a+b)^2$; $Y = (a-b)^2$, correspondent les premières à deux valeurs de $y$ que nous appelons $y_1$ et $y_2$ la seconde à deux valeurs $y_3$ et $y_4$, et l'on a $y_1 y_2 = y_3 y_4 = \frac{d^2}{c^2}$. Une valeur de Y plus grande que $(a+b)^2$ est obtenue par deux valeurs réelles différentes de $y$, l'une plus grande que $y_1$ (on suppose $y_1 > y_2$) et l'autre plus petite que $y_2$, ces deux valeurs ayant pour produit $\frac{d^2}{c^2}$. Une valeur de Y plus petite que $(a-b)^2$ correspond à deux valeurs réelles de $y$, l'une plus grande que $y_3$ et l'autre plus petite que $y_4$ si $y_3 > y_4$; comme $(a-b)^2 < (c-d)^2$, $y_3$ et $y_4$ sont négatifs. Il résulte de là que tandis que $x$ peut varier de $-\infty$ à $+\infty$, $y$ ne peut varier que dans les intervalles $(-\infty, y_4)$, $(y_3, y_2)$, $(y_1, \infty)$.

Dans la seconde hypothèse, l'équation $X = Y$ n'est possible en nombres réels que lorsque $X > (a+b)^2$ ou $< (c-d)^2$. Toute valeur de X plus grande que $(a+b)^2$ correspond à deux valeurs positives de $x$, et ces valeurs peuvent être quelconques. Une valeur de X plus petite que $(c-d)^2$ peut être obtenue par deux valeurs négatives de $x$; mais si l'on désigne par $x_3$, $x_4$ les racines de l'équation $X = (c-d)^2$ $(x_3 > x_4)$, il faut donner à $x$ une valeur plus petite que $x_4$ ou plus grande que $x_3$. Il résulte de là que $x$ peut varier dans les intervalles $(-\infty, x_4)$,

$(x_2, +\infty)$. On verrait semblablement que $y$ peut varier dans les intervalles $(-\infty, y_2)$, $(y_1, +\infty)$, $y_1$ et $y_2$ étant les racines de l'équation $Y = (a+b^2)$.

Les équations auxiliaires $X = (a+b)^2$, $X = (a-b)^2$ sont précisément les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ de ci-dessus.

On arriverait aux mêmes conclusions en construisant les deux hyperboles représentées par les équations

$$y = a^2 + b^2 + a^2x + \frac{b^2}{x}, \quad y = c^2 + d^2 + c^2x + \frac{d^2}{x},$$

et examinant quelles sont les parallèles à l'axe $Ox$ qui rencontrent à la fois les deux courbes. (J. N.).

Autre solution par M. EMMERICH.

---

## ×Question 1184.

(Voir *Mathesis* (2), t. VIII, p. 216).

*Résoudre et construire un triangle* ABC, *connaissant* $a$, B *et* $b + \alpha c$, $\alpha$ *étant un nombre donné, positif ou négatif. Discussion.*

*Solution par* M. R. BUYSENS. Il revient au même de se donner

$$\frac{b+\alpha c}{\alpha}, \quad \text{ou} \quad c + mb = lm,$$

$m$ désignant un nombre connu.

De la proportion des sinus on déduit

$$\frac{\sin C + m \sin B}{\sin A} = \frac{l}{a};$$

il en résulte

$$\frac{\sin(A+B) + \sin A + m \sin B}{\sin(A+B) - \sin A + m \sin B} = \frac{l+a}{l-a},$$

ou

$$\frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) + m \sin \frac{B}{2}}{\cos\left(A + \frac{B}{2}\right) + m \cos \frac{B}{2}} = \frac{l+a}{l-a} \operatorname{tg} \frac{B}{2}. \qquad (1)$$

Posons

$$\frac{l+a}{l-a}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\varphi\,; \tag{2}$$

l'égalité (1) se transformera aisément en celle-ci

$$\sin\left(A+\frac{B}{2}-\varphi\right)=m\sin\left(\varphi-\frac{B}{2}\right). \tag{3}$$

Les formules (2) et (3) permettent de calculer l'angle auxiliaire $\varphi$, et ensuite l'angle A. Pour qu'il y ait une solution, il faut et il suffit qu'on ait

$$B<A+B<180^\circ,$$

ou

$$\frac{B}{2}-\varphi<\left(A+\frac{B}{2}-\varphi\right)<180^\circ-\frac{B}{2}-\varphi.$$

*Construction*. Nous désignons par $m$ un nombre positif donné et par $l$ une longueur positive. Si l'on suppose le problème résolu, on réalise $c+mb$ en prolongeant BA de $AD=mb$; alors $AD=c+mb$. En portant $AD'=mb$ de A vers B, on aura $BD'=c-mb$ ou $=mb-c$ suivant que D' tombe sur AB ou sur le prolongement au-delà de B. Dans les deux cas, A appartient au lieu des points dont les distances aux points D ou D' et C sont dans le rapport $m:1$.

Cette analyse conduit à la construction suivante :

On place la base $BC=a$ et l'angle $CBX=B$, et l'on porte sur BX la longueur $BD=l$, et aussi dans l'autre sens la longueur $BD_1=l$. On divise ensuite les distances $CD, CD_1$, harmoniquement dans le rapport $1:m$ respectivement aux points E, F et $E_1$, $F_1$, et l'on décrit les circonférences $\Delta$, $\Delta_1$ sur EF et $E_1F_1$ comme diamètres.

Considérons d'abord la circonférence $\Delta$. Si $m<1$, le point D est compris entre E et F, et la droite BX rencontre $\Delta$ en un point A situé au-delà de D par rapport à B, et en un point $A_1$, situé sur DB ou sur son prolongement. Le triangle ABC correspond à l'égalité $c-mb=l$; si le point $A_1$ tombe sur BD, le triangle $A_1BD$ correspond à l'égalité $c+mb=l$; enfin, si $A_1$ est situé sur le prolongement de DB, on a $mb-c=l$, mais le triangle $A_1BC$ ne renferme plus l'angle donné B.

Soient $e$, $f$ les points où les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle CBX rencontrent la droite CD, et appelons $\delta$ la circonférence de diamètre $ef$; elle passe par B et correspond à $m=\frac{l}{a}$. Si donc $l<a$,

$\delta$ forme la transition entre les circonférences $\Delta$ qui coupent BD entre B et D, et celles qui rencontrent DB au-delà de B. Il en résulte que si $m < \frac{l}{a}$, le problème admet une solution pour $c - mb = l$, et une solution pour $c + mb = l$; mais si $m > \frac{l}{a}$, on n'a plus qu'une solution du cas $c - mb = l$. Si l'on avait $l > a$, la perpendiculaire élevée au milieu de DC rencontrerait DB avant de rencontrer BC; donc le point désigné par $A_1$ tombe entre cette perpendiculaire et le point D.

Supposons maintenant $m > 1$; le point D sera extérieur à la circonférence $\Delta$. Si $l < a$, la perpendiculaire élevée au milieu de DC rencontre BC avant DB, et la circonférence $\Delta$ située du même côté de cette perpendiculaire que le point C ne peut rencontrer DB entre A et B, et l'hypothèse $c + mb = l$ n'admet pas de solution; cette conclusion résulte aussi de ce que $c + mb > c + b > a$. Lorsque $l > a$, la circonférence $\delta$ définie ci-dessus correspond à $m = \frac{l}{a}$; elle forme la transition entre les circonférences $\Delta$ qui coupent DB en deux points situés de part et d'autre de B ou d'un même côté de B. Il existe parmi les circonférences $\Delta$ une circonférence $\delta_1$ qui touche AB; on l'obtient en élevant en C une perpendiculaire $C\alpha$ sur CA et au point $\alpha$ où cette droite rencontre DB, une perpendiculaire $\alpha\omega$ sur AB, qui coupe DC en $\omega$; la circonférence $\delta_1$ a pour centre $\omega$ et pour rayon $\omega\alpha$. Soit $\mu$ la valeur de $m$ à laquelle correspond $\delta_1$. Lorsque l'angle DCB est obtus, $\alpha$ tombe entre D et B, et l'on a $\mu < \frac{l}{a}$; alors si $m < \mu$, $\Delta$ ne rencontre pas AB; si $m > \mu$ et $< \frac{l}{a}$, $\Delta$ coupe AB en deux points situés entre B et D, et le cas de $c + mb = l$ admet deux solutions; enfin si $\mu > \frac{l}{a}$, ce cas n'admet plus qu'une solution. Lorsque l'angle DCB est aigu, il n'y a pas de solution si $m < \frac{l}{a}$, et il y en a une seule si $m > \frac{l}{a}$.

La circonférence $\Delta_1$ donne lieu à une discussion analogue, pour l'hypothèse $mb - c = l$.

Autre solution par M. Merlin.

## Question 1865.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 104).

*Si* A *et* B *sont deux points et* M *le milieu de* AB, *le lieu des points* P *tels que l'on ait* PM = PA − PB *est une quartique bicirculaire unicursale. Les tangentes au point double réel font un angle de* 60°.

(Cardoso-Laynes).

*Solution par* MM. E. N. Barisien, Droz Farny, Emmerich, Déprez, G. Gérard, Rose et Boutin. Soient MA = MB = $a$, PM = $r$, PMB = $\theta$. On a immédiatement l'équation du lieu en coordonnées polaires

$$r = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta} - \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta},$$

et en faisant disparaître les radicaux

$$r^2 = \frac{4a^2}{3}(4\cos^2\theta - 1).$$

Cette équation devient, en coordonnées rectangulaires,

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{4a^2}{3}(3x^2 - y^2).$$

Elle représente une quartique bicirculaire, du genre *lemniscate*, ayant un point double en M. Les tangentes en ce point, qui correspondent à l'égalité $4\cos^2\theta = 1$, sont inclinées sur AB de 60°, et forment entre elles des angles de 120° et 60°.

La courbe est aussi la transformée par rayons vecteurs réciproques de l'hyperbole

$$3x^2 - y^2 = \frac{4a^2}{3},$$

ou la podaire du centre de l'hyperbole $x^2 - 3y^2 = 4a^2$.

L'hyperbole étant une courbe *unicursale*, sa transformée l'est aussi.

Remarque. Plus généralement, si $k$ est une constante positive inférieure à 2, le lieu des points P tels que PA − PB = $k$.PM, est la podaire de M par rapport à une hyperbole qui a pour sommets réels les deux points de la droite AB ayant pour abscisses $\pm\frac{a}{k}$. Ce lieu est une lemniscate de Bernoulli lorsque $k = \sqrt{2}$. (Déprez).

## Question 1274.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 152).

*On projette un point* M *du plan d'un triangle* ABC *en* $P_a$, $P_b$, $P_c$ *sur les côtés* BC, CA, AB, *et en* $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$, *sur les hauteurs* AA', BB', CC'. *Démontrer que les droites* $P_aQ_a$, $P_bQ_b$, $P_cQ_c$, *concourent en un même point; ces droites sont parallèles lorsque* M *appartient à la circonférence des neuf points du triangle* ABC. (Sporer.)

*Généraliser cette proposition par voie de perspective et démontrer directement le théorème généralisé par la géométrie projective, ou analytiquement.* (J. N.).

*Solution par* M. Déprez. La parallèle à $P_aQ_a$ qui passe par A', est l'isogonale de A'M par rapport à l'angle B'A'C', donc cette parallèle passe par l'inverse N de M dans le triangle A'B'C', et la droite $P_aQ_a$ passant par le milieu de MA' coupera la droite MN en son milieu N'.

Ainsi, les droites $P_aQ_a$, $P_bQ_b$, $P_cQ_c$, concourent en un même point N', centre de la conique inscrite au triangle A'B'C' et ayant pour foyer le point M.

Lorsque M est sur la circonférence A'B'C', le point N est à l'infini, et il en est de même de N'.

Une projection cylindrique conduit immédiatement au théorème suivant : AA', BB', CC', étant trois droites concourantes, si l'on construit trois parallélogrammes $MP_aA'Q_a$, $MP_bB'Q_b$, $MP_cC'Q_c$, dont les côtés $MP_a$, $MP_b$, $MP_c$ sont respectivement parallèles à AA', BB', CC', et les côtés $MQ_a$, $MQ_b$, $MQ_c$ parallèles à BC, CA, AB, les diagonales $P_aQ_a$, $P_bQ_b$, $P_cQ_c$ concourent en un même point N'.

Note. M Droz Farny traite directement cette dernière proposition en observant que les parallèles menées par A', B', C' respectivement à $P_aQ_a$, $P_bQ_b$, $P_cQ_c$ sont les polaires de M par rapport aux couples de droites (AA', BC), (BB', CA), (CC', AB), qu'on peut considérer comme les coniques dégénérées du faisceau ayant pour points fondamentaux les sommets A, B, C et le point de concours P des lignes AA', BB', CC'; ces parallèles concourent donc en un même point N. Le point N se transporte à l'infini lorsque M appartient à la conique des neuf points du quadrilatère ABCP.

Si l'on fait une projection centrale de la figure de la question 1274,

les hauteurs AA', BB', CC' sont remplacées par trois droites menées par A, B, C et concourant en un point quelconque P; les parallélogrammes $MP_aA'Q_a$, $MP_bB'Q_b$, $MP_cC'Q_c$, se changent en des quadrilatères dont les côtés opposés se coupent sur la droite (ligne de fuite) qui correspond à la droite de l'infini. On a donc la proposition suivante :

*On donne un quadrangle complet* ABCP *dont les côtés opposés se coupent aux points* A', B', C', *un point* M *et une droite m rencontre les côtés* BC, CA, AB *en* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *et les côtés* AP, BP, CP *en* $A_2$, $B_2$, $C_2$. *Les droites* $MA_1$, $MB_1$, $MC_1$ *rencontrent respectivement* AA', BB', CC' *aux points* $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$; *les droites* $MA_2$, $MB_2$, MC, *rencontrent respectivement* BC, CA, AB *aux points* $P_a$, $P_b$, $P_c$. *Cela posé, les trois droites* $P_aQ_a$, $P_bQ_b$, $P_cQ_c$ *concourent en un même point.*

La démonstration de M. Droz Farny s'applique sans difficulté à cette nouvelle proposition.

La question 1274 peut également être transformée par le principe de dualité. (J. N.)

---

## Question 1289.

(Voir *Mathesis*, (2), t. X, p. 240.)

*On considère tous les triangles de même base* BC *et dont l'angle au sommet* A *est constant. Démontrer que les points de contact des côtés* AB, AC *avec les quatre cercles tritangents décrivent des limaçons de Pascal.*

(J. Déprez.)

*Solution par* M. G. Gérard. La figure dont il s'agit est bien connue; le sommet libre A décrit un segment de cercle BAC capable de l'angle donné; en même temps, les centres I et I' des cercles tritangents compris dans l'angle A se meuvent sur une circonférence (D) dont D est le centre et DB = DC le rayon; D est le milieu de l'arc BC, du côté opposé à A.

Il convient de remarquer que, si l'on s'en tient aux termes stricts de l'énoncé, le point A ne doit pas descendre au-dessous de la base BC, par conséquent, les parties des courbes cherchées correspondant à l'arc de cercle BDC, ne répondent pas à la question.

Cherchons d'abord les lieux relatifs aux cercles I, I' et au côté BA. Ces lieux sont engendrés par les points *i*, *i'*, qui sont respectivement les

projections de I et I', sur le côté BA; en projetant aussi le point D sur ce côté, on obtient un point $d$ qui décrit un cercle; or, en appelant $\theta$ l'angle constant BAC et $2a$ la corde fixe BC, on a

$$di = \text{DI} \cos\frac{\theta}{2} = \text{BD} \cos\frac{\theta}{2} = a;$$

et comme on a aussi

$$di = di',$$

on conclut que le lieu des points de contact $i$ et $i'$ est un même limaçon de Pascal, dont B$d$D est le cercle directeur, B le point double et $a$ la constante.

Le lieu des points de contact $i''$ et $i'''$ correspondant aux cercles I'' et I''' exinscrits respectivement dans les angles B et C, est lié au précédent d'une manière très simple; en effet, si l'on considère le côté AB du triangle ABC, les couples de points $i$ et $i'''$, $i'$ et $i''$ sont isotomiques; par suite, la courbe ($i''$, $i'''$) est la cissoïdale de la courbe ($i$, $i'$) par rapport à l'origine B et au cercle ABC. Or, la cissoïdale d'un limaçon de Pascal par rapport à un cercle ABC qui coupe son cercle directeur suivant le diamètre de symétrie BD, est encore un limaçon de Pascal; sa constante est la même, son diamètre de symétrie est la corde BE, perpendiculaire à BD dans le cercle ABC. Ce théorème est facile à démontrer; au cas présent, le point E est le milieu de l'arc BAC, diamétralement opposé à D.

Solution analogue par M. Emmerich.

M. Barisien a recherché les équations des lieux des points $i$, $i'$, $i''$, $i'''$ en prenant pour pôle le point B et pour axe polaire le côté BC. Par exemple, pour le point $i$ on a

$$\rho = \frac{a+c-b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2\sin A}(\sin C - \sin\omega) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2\sin A}[\sin(A+\omega) - \sin\omega]$$

ou

$$= \frac{a}{2} + \frac{a\cos\left(\omega + \frac{A}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

Si l'on fait tourner l'axe polaire de l'angle $\frac{A}{2}$ dans le sens négatif des angles polaires, cette équation prend la forme

$$\rho = \alpha + \beta\cos\omega.$$

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**984.** On donne deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$, deux points A, A′ situés sur l'axe $Ox$ et un point B situé sur l'axe $Oy$.

1° Soit M un point quelconque de l'axe $Ox$; on demande de former les équations des cercles circonscrits, l'un au triangle ABM, l'autre au triangle A′BM. 2° Calculer les coordonnées des centres C, C′ de ces cercles, leurs rayons R, R′ et la distance CC′ de leurs centres. 3° Le point M se déplaçant sur $Ox$, montrer que les centres C, C′ décrivent chacun une droite; que le rapport des rayons R, R′ reste constant et que le triangle BCC′ reste semblable au triangle BAA′. Trouver pour quelle position de M les rayons R, R′ ont une valeur minimum. 4° Former l'équation de la droite joignant les centres C et C′ et chercher le nombre des droites CC′ qui passent par un point P donné dans le plan $xOy$. Indiquer la position des droites CC′ par rapport à la courbe qui sépare les régions du plan $xOy$ où se trouve le point P suivant qu'il existe des droites CC′ passant par ce point ou qu'il n'en existe pas.

On fera $\quad OA = a, \quad OA' = a', \quad OB = b, \quad OM = m.$

(*Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles, concours de* 1900. — Durée de la composition : 4 heures).

Une note disait qu'il serait tenu compte aux récipiendaires des solutions géométriques de la question.

Nous indiquons ici la solution par les méthodes de la géométrie élémentaire.

Les points C, C′ se meuvent sur les perpendiculaires élevées aux milieux $A_1$, $A'_1$ des droites BA, BA′. La droite CC′ est perpendiculaire au milieu M′ de la droite BM; ce milieu décrit une droite $u$ parallèle à $Ox$. Par conséquent, la droite CC′ est tangente à une parabole fixe $\pi$ ayant pour foyer le point B, pour tangente au sommet la droite $u$, pour directrice l'axe $Ox$. Cette parabole sépare les deux régions où se trouve le point P suivant qu'il existe des droites CC′ passant par ce point ou qu'il n'en existe pas.

Les angles BCM′, BC′M étant respectivement égaux aux angles constants BAO, BA′O, le triangle BCC′ est semblable à BAA′.

Le minimum de BC a lieu lorsque C est en $A_1$ ou M en O.

**985.** Résoudre un triangle ABC, connaissant un côté $BC = a$, la longueur $AD = \alpha$ de la bissectrice de l'angle BAC, et l'angle $ADB = \theta$.

On a

$$\frac{BD}{\alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\sin (\theta + \frac{1}{2} A)}, \quad \frac{CD}{\alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\sin (\theta - \frac{1}{2} A)};$$

d'où l'on déduit, successivement,

$$a = \mathrm{BD} + \mathrm{CD} = \frac{2\alpha \sin \mathrm{A} \sin \theta}{\cos \mathrm{A} - \cos 2\theta},$$

$$a \cos \mathrm{A} - 2\alpha \sin \mathrm{A} \sin \theta = a \cos 2\theta, \quad \cos(\mathrm{A} + \varphi) = \cos 2\theta \cos \varphi,$$

$\varphi$ étant un angle auxiliaire déterminé par l'égalité $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha \sin \mathrm{A}}{a}$.

Existe-t-il une solution géométrique simple du problème ? La construction des éléments doubles de deux ponctuelles projectives superposées donne une solution facile.

**986.** Soit D le point de contact du côté BC avec le cercle inscrit au triangle ABC. Si l'on a

$$2\left(\frac{1}{\mathrm{AB}} - \frac{1}{\mathrm{AC}}\right) = \frac{1}{\mathrm{BD}} - \frac{1}{\mathrm{CD}}$$

le triangle est rectangle ou isoscèle en A.

A déduire de

$$2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-c} = \frac{2}{a+c-b} - \frac{2}{a+b-c}.$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1307.** Si A′, A″ sont dans un triangle ABC les points où la symédiane AK et la droite de Lemoine coupent BC, et B′, B″, C′, C″ les points analogues sur CA et sur AB, les trois circonférences qui ont A′A″, B′B″, C′C″ comme diamètres se coupent en deux points tels que leurs triangles podaires ont leurs côtés inversement proportionnels à $a, b, c$. Ces triangles ne sont pas homologiques avec ABC. (E. Lemoine.)

**1308.** Soient (D) une conique inscrite dans le triangle ABC; A′, B′, C′ les points où une tangente quelconque à la conique coupe BC, CA, AB. La conique variable T qui touche AA′, BB′, CC′ respectivement en A, B, C passe constamment par un point fixe P.

Examiner les cas particuliers où (D) est l'un des cercles tritangents, ou a son centre au point de Lemoine, ou est l'ellipse de Brocard, l'ellipse de Simmons, la parabole de Kiepert, etc. (J. Déprez).

×**1309.** Construire un triangle ABC, connaissant les côtés indéfinis AB, AC et le centre $O_9$ du cercle des neuf points.

×**1310.** Résouder le système

$$x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x = 2. \qquad \text{(Emmerich).}$$

---

## *SUR UNE PROPRIÉTÉ DU TRIANGLE ISOSCÈLE,

par M. C. E. Wasteels, Répétiteur à l'Université de Gand.

*Si deux bissectrices intérieures d'un triangle sont égales, ce triangle est isoscèle.*

Cette proposition a déjà été démontrée d'un assez grand nombre de manières(*). Dans le présent article, nous en donnons d'abord une nouvelle démonstration, uniquement applicable aux triangles euclidiens, puis une autre, indépendante du postulat d'Euclide et qui s'applique en même temps aux triangles sphériques(**). Enfin, nous démontrons un théorème plus général.

1. *Première démonstration* (Le lecteur est prié de faire la figure). Soient BB′ et CC′ deux bissectrices intérieures du triangle ABC; je dis que, si BB′ = CC′, on aura pareillement AC = AB.

En effet, supposons que cette égalité n'ait pas lieu et que AB > AC; dans ce cas, on aura aussi

$$\textit{angle}\ \mathrm{ACB} > \mathrm{ABC};\quad \text{d'où}\quad \textit{angle}\ \mathrm{C'CB} > \mathrm{B'BC},$$

et

$$\textit{angle}\ \mathrm{BAC} + \mathrm{ACC'} > \mathrm{BAC} + \mathrm{ABB'},$$

ou

$$\textit{angle}\ \mathrm{BC'C} > \mathrm{CB'B}.$$

Cela étant, construisons sur CC′, du même côté que le triangle CC′B, un triangle CC′D tel que l'*angle* CC′D = CB′B et C′CD = B′BC.

Puisqu'on a, par hypothèse, BB′ = CC′, le triangle ainsi construit sera égal à BB′C et, par suite, le côté CD = CB. Or, il résulte des inégalités précédentes que le point D est intérieur au triangle CC′B; le prolongement de CD rencontre donc le côté C′B; soit E ce point de rencontre. Je dis que, dans le triangle BEC, le côté BC > EC. En effet, dans le triangle ECA, l'angle extérieur BEC > ECA; or, *angle* ECA = ECC′ + C′CA = B′BC + C′CA; comme *angle* C′CA > B′BA, on aura *angle* ECA > EBC, et, par suite, *angle* BEC > EBC.

---

(*) Voir entre autres, N. A. M. 1842; (1), I, pp. 138-139 et p. 311; *Bulletin des Sciences math. et phys. élémentaires* de L. Gérard, 6e année, 1900-1901, pp. 81-88.

(**) Autrement dit, la démonstration est vraie en géométrie générale. M. Gérard signalait récemment dans son Bulletin (*loc. cit.*) l'intérêt que présenterait une pareille démonstration. Celle de M. Wasteels répond complètement au desideratum de M. Gérard. (P. M.)

On conclut de là que $BC > EC > DC$; il est donc impossible que $BC = DC$. L'hypothèse est donc absurde, ce qui démontre le théorème.

2. *Deuxième démonstration.* Nous exposerons directement cette démonstration pour les triangles sphériques; on pourra s'assurer sans peine qu'elle est de même applicable aux triangles rectilignes.

Supposons donc que les bissectrices BB′ et CC′ du triangle sphérique ABC sont égales; il s'agit de prouver que $AC = AB$.

Admettons que cette égalité n'ait pas lieu et que $AB > AC$, par exemple. Dans ce cas, on aura aussi

$$\text{angle } ACB > ABC; \quad \text{d'où} \quad \text{angle } C'CB > B'BC.$$

En désignant par I l'intersection de BB′ et CC′, on aura donc, dans le triangle IBC,

$$IB > IC. \tag{1}$$

Cela étant, construisons sur BC, du même côté que le triangle ABC, un triangle CBD tel que l'angle $CBD = BCB'$ et que le côté $BD = CB'$. Ce triangle sera égal à BCB′ et, par suite,

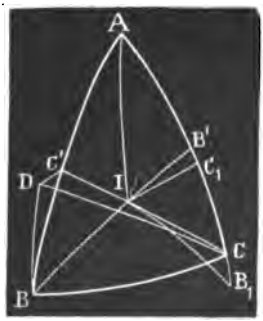


Fig. 1.

$$CD = BB' = CC',$$

$$\text{angle } BCD = CBB' \quad \text{et} \quad \text{angle } CDB = BB'C.$$

Le triangle CC′D sera donc isoscèle et les angles en C′ et D seront égaux.

Or, il résulte des inégalités précédentes que le sommet D est extérieur au triangle ABC et se trouve dans l'angle BCC′. L'angle BDC′ sera donc la somme des angles CDC′ et CDB; d'où l'on tire, eu égard aux égalités établies ci-dessus,

$$\text{angle } CC'D + BB'C = BDC'.$$

Par suite,

$$\text{angle } CC'D + BB'C < 2\partial, \quad \text{et, à fortiori.} \quad \text{angle } CC'B + BB'C < 2\partial,$$

$$\text{ou} \quad 2\partial - AC'I + BB'C < 2\partial, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \text{angle } AC'I > BB'C.$$

Portons, suivant le côté AC, l'arc $AC_1 = AC'$ et $AB_1 = AB$, et menons les arcs de grand cercle AI, $IC_1$, $IB_1$. Comme AI est la bissectrice de l'angle BAC, les triangles $AIC_1$ et $AIB_1$ seront respectivement égaux à AIC′ et AIB; par suite, nous aurons

$$IC_1 = IC', \quad \text{angle } AC_1I = AC'I, \quad \text{angle } AIC_1 = AIC'$$

$$\text{et} \quad \text{angle } AIB_1 = AIB; \quad \text{d'où} \quad \text{angle } C_1IB_1 = C'IB = B'IC.$$

Comme AB > AC, $B_1$ tombe sur le prolongement de AC; de l'égalité angle $C_1IB_1$ = B'IC, on peut conclure que $C_1I$ tombe dans l'angle $B'IB_1$.

Considérons maintenant le triangle $IB'C_1$; l'inégalité

angle AC'I > BB'C revient à angle $IC_1B'$ > $IB'C_1$;

il en résulte que

$$IB' > IC_1 \quad \text{ou} \quad IB' > IC' \qquad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) donnent

$$IB + IB' > IC + IC' \quad \text{ou} \quad BB' > CC',$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. On conclut de là qu'il faut avoir AB = AC, ce qui démontre le théorème.

3. *Remarque.* On peut aussi démontrer sans peine qu'à un plus grand angle correspond une plus petite bissectrice.

En effet, il résulte de la démonstration qui précède que, si

angle ACB > ABC,

il est impossible que BB' = CC'.

Prouvons qu'il est pareillement impossible que CC' > BB'.

Observons que, dans ce cas, CC' > CD; par suite, *angle* CC'D < CDC'; et comme *angle* CDC' + CDB < $2\partial$, on aurait, comme précédemment, *angle* CC'B + BB'C < $2\partial$; d'où *angle* AC'I > BB'C, et, par suite aussi, dans le triangle $IB'C_1$, $IB' > IC_1$ ou IC'. Il en résulterait encore que BB' > CC', ce qui est contraire à l'hypothèse.

4. *Généralisation.* Supposons que BB' et CC' soient deux arcs de grand cercle se coupant en un point quelconque I de la bissectrice de l'angle BAC; si BB' = CC', on aura encore AB = AC.

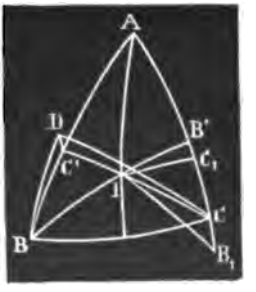


Fig. 2.

*Démonstration.* Considérons d'abord le cas où I est intérieur au triangle ABC.

Admettons encore qu'on puisse avoir AB > AC; si l'on a, en outre, angle ICB > IBC, la démonstration précédente est encore applicable.

Si *angle* ICB = IBC, les triangles BCC' et CBB' seront égaux; d'où *angle* ABC = ACB, et AC = AB, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Enfin, si angle ICB < IBC, on aura de même IB < IC. (1)

Dans ce cas, le point D tombera dans l'angle ACC', et l'angle

BDC = BB'C sera plus grand que CDC' ou DC'C, et, à fortiori, angle BB'C > AC'I.

Comme *angle* AC'I = AC$_1$I, on aura, dans le triangle IB'C$_1$, angle IB'C$_1$ > B'C$_1$I, d'où

$$IC_1 > IB' \quad \text{ou} \quad IB' < IC'. \tag{2}$$

Des inégalités (1) et (2), on déduit BB' < CC', ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si le point I était extérieur au triangle ABC, il serait intérieur au triangle AB'C' et l'on démontrerait comme ci-dessus que AB' = AC'; on conclurait de là l'égalité des triangles AB'I et AC'I, puis celle de AB'B et AC'C; d'où AB = AC.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le point I se trouve dans l'angle BAC; considérons enfin le cas où ce point est situé dans l'*angle* opposé par le sommet à BAC.

Faisons encore les mêmes constructions qu'au n° 2, avec cette différence que l'arc AC$_1$ = AC' sera maintenant porté sur le prolongement de CA, au lieu d'être porté dans le sens AC. Comme les triangles AlB$_1$ et AIC$_1$ sont respectivement égaux à AIB et AIC', on pourra conclure, en supposant toujours

$$AB > AC,$$

que C$_1$ tombe entre A et B'.

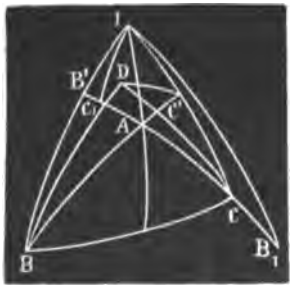



Fig. 3.

Cela étant, si l'*angle* ICB > IBC, on aura

$$IB > IC. \tag{1}$$

Le point D sera situé dans l'angle IC'B et l'angle BDC' sera encore la somme des angles CDC' et CDB. Comme

$$\text{angle } BDC' < 2\partial,$$

on conclut de même que

$$\text{angle } CC'B + BB'C < 2\partial, \quad \text{ou} \quad \text{angle } IC_1B' + BB'C < 2\partial$$

d'où

$$\text{angle } IC_1B' < IB'C_2.$$

Par suite,

$$IB' < IC_1 \quad \text{ou} \quad IC'. \tag{2}$$

Des inégalités (1) et (2), on déduit

$$IB - IB' > IC - IC' \quad \text{ou} \quad BB' > CC',$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si l'*angle* ICB = IBC, les triangles BCC' et CBB' seront égaux; d'où angle ABC = ACB, et AC = AB, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Enfin, si l'*angle* ICB < IBC, on aura d'abord

$$IB < IC. \qquad (1)$$

Dans ce cas, le point D tombera dans l'angle opposé par le sommet à CC'B et l'on conclut sans peine que

$$\text{angle } BB'C > AC_1I; \quad \text{d'où} \quad \text{angle } IB'C_1 < IC_1B'.$$

Par suite, $IC_1 < IB'$,

ou $IB' > IC'. \qquad (2)$

Des inégalités (1) et (2), on déduit

$$IB - IB' < IC - IC', \quad \text{ou} \quad BB' < CC',$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

---

## *THÉORÈMES SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES,

par G. DE ROCQUIGNY.

I. Soit l'ensemble des progressions :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 . . . |
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 . . . |
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 . . . |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 . . . |
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 . . . |
| . | . | . | . | . . . |

La somme des nombres contenus dans une *bande en équerre* quelconque est égale à un cube.

*Corollaire.* La somme des $n^3$ termes des $n$ premières progressions arithmétiques précédentes, limitées chacune à $n$ termes, est égale à un carré.

II. Soit l'ensemble des progressions :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 . . . |
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 . . . |
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 . . . |
| 1 | 9 | 17 | 25 | 33 . . . |
| 1 | 11 | 21 | 31 | 41 . . . |
| . | . | . | . | . . . |

La somme des nombres contenus dans une bande en équerre quelconque est une somme de deux cubes.

*Corollaires.* 1. La somme des $n^2$ termes des $n$ premières progressions arithmétiques précédentes, limitées chacune à $n$ termes est égale à la somme des carrés de deux triangulaires consécutifs.

2. Si l'on désigne par $B_n$ la somme des nombres contenus dans la $n^e$ bande en équerre, on a

$$B_n - B_{n-1} + B_{n-2} - \cdots \pm B_1 = n^5.$$

III. Soit l'ensemble des progressions :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | . . . |
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | . . . |
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | . . . |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | . . . |
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | 43 | 49 | . . . |
| 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | 36 | 43 | 50 | 57 | . . . |
| 1 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 | 57 | 65 | . . . |
| 1 | 10 | 19 | 28 | 37 | 46 | 55 | 64 | 73 | . . . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . . . |

Que l'on imagine un cadre carré de grandeur quelconque appliqué quelque part sur le tableau des progressions, de façon que l'une des diagonales du carré coïncide avec la ligne des nombres carrés 1, 4, 9, 16, ...; dans ces conditions, la somme des nombres contenus dans le cadre est toujours un nombre carré.

Si le cadre carré renferme $n^2$ nombres et que le nombre carré situé dans l'angle supérieur gauche du cadre soit égal à $a^2$, la somme des nombres contenus dans ce cadre déterminé de grandeur et de position est égale à

$$\left[\frac{n(n-1)}{2} + an\right]^2.$$

Note. Ed. Lucas a appliqué dans les NAM, 1870 (2), IX, 49-53 un procédé tout à fait analogue (par les bandes en équerre) à la sommation des puissances semblables des $n$ premiers nombres entiers. Dans le volume de 1871, M. Ed. Amigues a étendu ce procédé, qui remonte à Pythagore, à la somme de nombres disposés en cube (pp. 79-82 et 117-122). (P. M.)

## SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES,

par M. A. Boutin

1. Soit $y = e^{ex}$ ; on trouve aisément :

$$\begin{aligned}
y' &= e^{ex}.\,y,\\
y'' &= e^{ex}\,(y + y'),\\
y''' &= e^{ex}\,(y + 2y' + y''),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
y^{(n+1)} &= e^{ex}\,(y + ny' + \frac{n(n-1)}{1.2}\,y'' + \cdots + y^{(n)}),
\end{aligned}$$

d'où, pour $x = 0$, $y_0 = e$, $y'_0 = e$, $y''_0 = 2e$, $y'''_0 = 5e$, $y''''_0 = 15e$, etc.

Donc, d'après la formule de Mac-Laurin,

$$y = e + \frac{ex}{1} + \frac{2ex^2}{1.2} + \frac{5ex^3}{1.2.3} + \frac{15ex^4}{1.2.3.4} + \frac{52ex^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

D'autre part,

$$y = 1 + \frac{e^x}{1} + \frac{e^{2x}}{1.2} + \frac{e^{3x}}{1.2.3} + \frac{e^{4x}}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

en remplaçant $e^x$, $e^{2x}$, $e^{3x}$, etc... par leur développement, et ordonnant, par rapport aux puissances successives de $x$, et égalent les coefficients des mêmes puissances de $x$ dans les deux développements, on en tire :

$$\begin{aligned}
2e &= \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{1.2} + \frac{3^2}{1.2.3} + \frac{4^2}{1.2.3.4} + \cdots,\\
5e &= \frac{1^3}{1} + \frac{2^3}{1.2} + \frac{3^3}{1.2.3} + \frac{4^3}{1.2.3.4} + \cdots,\\
15e &= \frac{1^4}{1} + \frac{2^4}{1.2} + \frac{3^4}{1.2.3} + \frac{4^4}{1.2.3.4} + \cdots,\\
52e &= \frac{1^5}{1} + \frac{2^5}{1.2} + \frac{3^5}{1.2.3} + \frac{4^5}{1.2.3.4} + \cdots,\\
203e &= \frac{1^6}{1} + \frac{2^6}{1.2} + \frac{3^6}{1.2.3} + \frac{4^6}{1.2.3.4} + \cdots ; \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Les coefficients de $e$ dans le premier membre se calculent de proche en proche. en posant $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 5$, $y_4 = 15$,...

Ces nombres se déterminent par la formule symbolique :

$$y_{n+1} = (1+y)^n$$

où, après développement, on remplace les exposants par des indices.

**2.** Les séries :

$$z_n = 1^n \frac{x}{1} + 2^n \frac{x^2}{1.2} + 3^n \frac{x^3}{1.2.3} + 4^n \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

se somment aisément. On trouve directement :

$$z_0 = e^x - 1, \quad z_1 = xe^x,$$

puis

$$z_n = xz'_{n-1};$$

donc de proche en proche :

$$\begin{aligned}
z_2 &= e^x(x^2+x),\\
z_3 &= e^x(x^3+3x^2+x),\\
z_4 &= e^x(x^4+6x^3+7x^2+x),\\
z_5 &= e^x(x^5+10x^4+25x^3+15x^2+x),\\
z_6 &= e^x(x^6+15x^5+65x^4+90x^3+31x^2+x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_n &= e^x\left[x^n + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{2.3.4}x^{n-2}\right.\\
&\left. + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2.4.6}x^{n-3} + \cdots + (2^{n-1}-1)x^2 + x\right];
\end{aligned}$$

mais la loi des coefficients du second membre n'apparaît pas. — On voit pourtant aisément comment les coefficients d'une ligne s'obtiennent au moyen de ceux de la ligne précédente. Si on pose

$$z_n = e^x P_n, \quad \text{on a} \quad P_n = x(P_{n-1} + P'_{n-1}).$$

Pour $x = 1$, on retrouve les résultats du commencement de cette note.

Pour $x = -1$, on a également des résultats intéressants que nous laissons au lecteur le soin d'écrire.

Si on fait $x = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ et que l'on sépare les parties réelles des parties imaginaires, et qu'on pose, pour abréger

$$u_n = 1^n\rho\cos\omega + \frac{2^n}{1.2}\rho^2\cos 2\omega + \frac{3^n}{1.2.3}\rho^3\cos 3\omega + \cdots,$$

$$v_n = 1^n\rho\sin\omega + \frac{2^n}{1.2}\rho^2\sin 2\omega + \frac{3^n}{1.2.3}\rho^3\sin 3\omega + \cdots,$$

on trouve aisément

$$u_2 = e^{\rho\cos\omega}\cos(\rho\sin\omega)\,(\rho^2\cos 2\omega + \rho\cos\omega),$$
$$v_2 = e^{\rho\cos\omega}\sin(\rho\sin\omega)\,(\rho^2\sin 2\omega + \rho\sin\omega),$$
$$u_3 = e^{\rho\cos\omega}\cos(\rho\sin\omega)\,(\rho^3\cos 3\omega + 3\rho^2\cos 2\omega + \rho\cos\omega),$$
$$v_3 = e^{\rho\cos\omega}\sin(\rho\sin\omega)\,(\rho^3\sin 3\omega + 3\rho^2\sin 2\omega + \rho\sin\omega),$$

etc....

3. Les résultats précédents peuvent être généralisés de la façon suivante : Soit

$$\varphi_0(x) = A_0 + A_1\frac{x}{1} + A_2\frac{x^2}{1.2} + \cdots,$$
$$\varphi_n(x) = 1^nA_1\frac{x}{1} + 2^nA_2\frac{x^2}{1.2} + \cdots.$$

On a, de proche en proche

$$\varphi_1 = x\varphi_0',$$
$$\varphi_2 = x\varphi_1 = x^2\varphi_0'' + x\varphi_0',$$
$$\varphi_3 = x\varphi_2' = x^3\varphi_0''' + 3x^2\varphi_0'' + x\varphi_0',$$
$$\varphi_4 = x\varphi_3' = x^4\varphi_0'''' + 6x^3\varphi_0''' + 7x^2\varphi_0'' + x\varphi_0';\ \text{etc.}$$

Les coefficients sont ceux de $z_n$. Applications :

$$\varphi_0 = \sin x.$$
$$\varphi_1 = x\cos x,$$
$$\varphi_2 = x\cos x - x^2\sin x,$$
$$\varphi_3 = x\cos x\,(1 - x^2) - 3x^2\sin x,$$
$$\varphi_4 = x\cos x\,(-1 - 6x^2) - x^2\sin x\,(7 - x^2);\ \text{etc.}$$

$$\varphi_0 = \cos x.$$
$$\varphi_1 = -x\sin x,$$
$$\varphi_2 = -x\sin x - x^2\cos x,$$
$$\varphi_3 = -x\sin x\,(1 - x^2) - 3x^2\cos x,$$
$$\varphi_4 = -x\sin x\,(1 - 6x^2) - x^2\cos x\,(7 - x^2);\ \text{etc.}$$

$$\varphi_0 = (1 + x)^m$$
$$\varphi_1 = mx\,(1 + x)^{m-1},$$
$$\varphi_2 = mx\,(1 + x)^{m-2}\,(1 + mx),$$
$$\varphi_3 = mx\,(1 + x)^{m-3}\,[1 + (3m - 1)\,x + m^2x^2],$$
$$\varphi_4 = mx\,(1 + x)^{m-4}\,[1 + (7m - 4)\,x + (6m^2 - 4m + 1)\,x^2 + (m^3 - 7m + 7)\,x^3];\ \text{etc.}$$

Ces dernières formules pour diverses valeurs entières ou fractionnaires de $m$, et de $x$, en particulier pour $x = 1$ et $x = -1$ donnent divers résultats intéressants, que nous laissons au lecteur le soin d'écrire.

4. Ces résultats peuvent encore être généralisés de la manière suivante. Soit :

$$f_0(x) = A_0 + A_1 \frac{x}{1} + A_2 \frac{x^2}{1.2} + A_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

et posons

$$f_n(x) = 2^n 1^n A_2 \frac{x^2}{1.2} + 3^n 2^n A_3 \frac{x^3}{1.2.3} + 4^n 3^n A_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

On trouve

$$f_1 = x^2 f_0'',$$
$$f_2 = x^2 f_1'' = 2x^2 f_0'' + 4x^3 f_0''' + x^4 f_0^{IV},$$
$$f_3 = x^2 f_2'' = 4x^2 f_0'' + 32x^3 f_0''' + 38x^4 f_0^{IV} + 12x^5 f_0^{V} + x^6 f_0^{VI},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si on fait $f_0 = e^x$, puis $x = 1$, on trouve

$$7e = \frac{2^2.1^2}{1.2} + \frac{3^2.2^2}{1.2.3} + \frac{4^2.3^2}{1.2.3.4} + \frac{5^2.4^2}{1.2.3.4.5} + \cdots$$
$$87e = \frac{2^6.1^6}{1.2} + \frac{3^6.2^6}{1.2.3} + \frac{4^6.3^6}{1.2.3.4} + \frac{5^6.4^6}{1.2.3.4.5} + \cdots$$

Nous laisserons encore au lecteur le soin de faire d'autres applications, et de sommer des suites de la forme :

$$(3.2.1)^n A_3 \frac{x^3}{1.2.3} + (4.3.2)^n A_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + (5.4.3)^n A_5 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots$$
$$(4.3.2.1)^n A_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + (5.4.3.2)^n A_5 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots; \text{ etc.}$$

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Vorlesungen über technische Mechanik**, von Dr Aug. Föppl, Prof. a. d. technischen Hochschule in München Zweiter Band; Graphische Statik. Leipzig, Teubner (cartonné in-8° de X-452 p. avec 166 fig. dans le texte). Prix : 10 marcs.

L'auteur de ce livre a su exposer les différentes méthodes de la statique graphique, d'une manière claire et intéressante et sans entrer dans les détails qui appartiennent plus spécialement à la pratique des constructions. La première section (point et plan) contient, comme application, la détermination des tensions des systèmes articulés par la méthode des figures réciproques. Dans la deuxième section (polygone funiculaire) on trouve la détermination des moments fléchis-

sants, des moments d'inertie et de la ligne élastique; mais elle ne renferme pas les constructions basées sur l'intégration graphique. Dans la troisième section, l'auteur expose les règles de la composition et de la décomposition des forces dans l'espace; il en déduit ensuite le système focal. Signalons une petite inadvertance dans la solution du problème de la décomposition d'une force suivant six droites données; le cas général d'exception est celui où les six droites font partie d'un même complexe linéaire et non le cas où les six droites rencontrent une même droite. Dans la quatrième section, l'auteur étudie les systèmes articulés auxquels la méthode des figures réciproques n'est pas directement applicable; dans la cinquième les systèmes de l'espace, coupoles et berceaux; dans la sixième, les systèmes à barres surabondantes. La septième section qui termine le livre, renferme une théorie élémentaire des voûtes et un exposé rapide de la théorie des poutres à plusieurs travées solidaires. (J. M.)

---

1. **Dynamik der Kurbelgetriebe** mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen von Dr. H. Lorenz, Ingenieur, Professor an der Universität Göttingen Leipzig, Teubner, 1901 (VI-156 p., in-8°, 66 fig. dans le texte). Prix : 5 marcs.

2. **Beitrag zur Knick-Elastizität und -Festigkeit** von Baurat J. Kubler. Leipzig, Teubner, 1901 (26 p., in-8° et deux planches). Prix : 0,80 mars.

3. **Die Berechnung der Schusstafeln**, von W. Gross. Leipzig, Teubner, 1901 (IV-89 p., in-8°, 14 fig. dans le texte). Prix : 3 marcs.

4. **Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik**, Bericht erstattet der deutschen Mathematiker Vereinigung von Karl Heun. Leipzig, Teubner, 1900 (VI-123 p., in-8°). Prix : 4 marcs.

Nous ne pouvons que signaler ces ouvrages de mécanique appliquée qui sont en dehors de notre compétence et du programme de *Mathesis*.

---

**Études de géométrie analytique non euclidienne** par P. Barbarin, Professeur de mathématiques supérieures au Lycée de Bordeaux. Bruxelles, Hayez, Paris, Hermann; Gand, Hoste, 1900 (167 p. in-8°). Prix : 2 fr. 50.

Ce travail remarquable est extrait du tome LX des *Mémoires couronnés et autres mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique.

Il contient d'abord (ch. I) une étude *complète* du quadrilatère trirectangle et des constructions fondamentales de la géométrie non euclidienne, grâce à deux théorèmes nouveaux très simples qui n'ont pas été connus de Bolyai. *Mathesis* (1899, pp. 57-60, 81-85) a eu la primeur de cette étude, transposée en géométrie sphérique.

Les chapitre II à V sont consacrés à l'exposé, par les méthodes mêmes de transformation qu'emploie la géométrie analytique euclidienne, de la classification des coniques et quadriques dans les espaces non euclidiens, et à l'indication de leurs propriétés les plus caractéristiques. Pareille étude n'avait été faite jusqu'à présent, que pour les Coniques, par une voie indirecte et d'une manière moins complète.

Enfin, dans le chapitre VI, on trouve la démonstration de ce théorème général : *Chacun des trois espaces, riemannien, euclidien ou lobatchefskien, renferme des surfaces à courbure constante (sphères, équidistantes d'une droite, pseudosphères) dont les géodésiques ont les propriétés des droites riemanniennes, euclidiennes ou lobatchefskiennes.*

Au point de vue philosophique, ce théorème est le plus remarquable qui ait été trouvé depuis ceux de Lobatchefsky, Bolyai et Beltrami qui en sont des cas particuliers : *la géométrie des horicycles sur les horisphères est euclidienne, la géométrie des géodésiques d'une pseudosphère euclidienne est lobatchefskienne.*

L'auteur cite les ouvrages suivants où l'on peut trouver les principes de la géométrie non euclidienne, indispensables à l'intelligence de ses *Études* : les *Recherches géométriques* de Lobatchefsky, la *Science absolue de l'Espace* de Bolyai, ou la *Thèse* de Gérard (tous trois, à Paris, chez Hermann), ou l'*Essai* de De Tilly (celui-ci est épuisé). A la rigueur, on peut se contenter de l'article de Gérard NAM, (3), XII, pp. 74-84, sur la géométrie lobatchefskienne et de la transposition que nous en avons faite en géométrie riemannienne, *Mathesis* (2), V, *Supplément* II, p. 8-21; ou plus simplement encore de cette remarque : *la trigonométrie riemannienne est identique à la trigonométrie sphérique, la lobatchefskienne à cette trigonométrie où les côtés a, b, c* des triangles sont *remplacés par ai, bi, ci, i désignant* $\sqrt{-1}$ (voir *Mathesis*, (2), IX, 112-117, 134-139, 158-161) (*). (P. M.).

---

**Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne.** Eine Einführung in dieses Gebiet von Dr. Fr. SCHILLING, Professor an der Universität Göttingen. Leipzig, Teubner, 1900 (In-8° de 47 p., avec 28 fig.). Prix : 2 marcs.

M. Schilling a extrait du *Traité* de M. d'Ocagne, cette *Introduction à la Nomographie*, claire et substantielle, que nous demandions au savant professeur de l'École des Ponts et chaussées d'écrire lui-même.

---

**Sophus Lie.** Ausführliches Verzeichnis seiner Schriften zusammengestellt von Fr. Engel. Leipzig, Teubner, 1900 (41 p., in-8°, avec un portrait de Lie). Prix : 2 marcs.

Excellente monographie, écrite par une plume exceptionnellement compétente. Le portrait nous fait connaître la figure pensive, mélancolique, presque triste, du grand géomètre norvégien; la biographie nous révèle l'homme et le savant; la bibliographie, où chaque numéro est suivi d'indications sur le contenu du mémoire signalé est faite avec le plus grand soin. C'est le guide indispensable à quiconque veut pénétrer dans l'œuvre de Lie.

---

(*) La première règle, de M. de Lagrandval, citée par M. Barbarin (note de la page 7), est une suite du théorème de Battaglini (deux perpendiculaires lobatchefskiennes à une droite se coupent à une distance $\frac{1}{2}\pi i$ de cette droite) combiné avec cette remarque.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 699.

(Voir *Mathesis*, (1) X, p. 279.)

***Si $n$ femmes sont placées dans un ordre déterminé autour d'une table ronde, de combien de manières leurs maris peuvent-ils se placer à cette table en satisfaisant aux conditions suivantes : un homme se trouve toujours entre deux femmes et n'est jamais à côté de la sienne.***

Numérotons les femmes, dans l'ordre où elles sont placées, $1, 2, 3 \ldots n$, le n° 1 étant tout à fait arbitraire, et appelons $1', 2', 3', \ldots n'$ les maris respectifs. Si nous désignons par $a_1\, a_2 \ldots a_n$ une permutation quelconque des éléments $1', 2', 3', \ldots, n'$ et si nous convenons de placer $a_1$ entre 1 et 2, $a_2$ entre 2 et 3, ..., $a_n$ entre $n$ et 1, une disposition quelconque de la table peut être figurée au moyen des trois permutations

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | . . . | $n-1$, | $n$ |
| II | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | . . . | $a_{n-1}$, | $a_n$ |
| III | 2 | 3 | 4 | 5 | . . . | $n$ | 1; |

ce tableau indiquant comment les hommes sont placés par rapport aux femmes.

Pour que la permutation $a_1\, a_2 \ldots a_n$ remplisse les conditions de la question, il faut que $a_1$ ne soit ni $1'$ ni $2'$, que $a_2$ ne soit ni $2'$ ni $3'$, etc. En laissant de côté les accents, nous pourrons dire que la permutation $a_1\, a_2 \ldots a_n$ ne doit pas avoir de *rencontre* avec l'une des permutations $1\,2\,3 \ldots n$ et $2\,3 \ldots n1$.

La recherche du nombre des permutations n'ayant pas de rencontre avec la permutation $1\,2 \ldots n$ a été traitée à deux reprises dans *Mathesis* (1881, p 27 et 1890, p. 156). Existe-t-il une formule servant à déterminer le nombre des permutations n'ayant pas de rencontre (ou *discordantes*) avec aucune des deux permutations $12 \ldots n$, $2, 3 \ldots n1$?

Le regretté Ed. Lucas s'était occupé de cette question ; nous ignorons s'il a trouvé la formule.

Si $n = 5$, on a les solutions : 34512, 45123, 51234, 35124, 35214, etc.

M. Lalisse nous a envoyé une solution assez compliquée du problème où le mari ne peut se trouver à la droite de sa femme; cela revient au nombre des permutations discordantes avec une seule permutation donnée. (J. N.).

## Question 1160.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VIII, p. 56.)

*Soient* A', B', C' *les pieds des hauteurs et* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *les milieux des côtés d'un triangle* ABC. *Démontrer que les côtés des deux triangles* A'B'C', $A_1B_1C_1$ *sont tangents à une même parabole ayant pour foyer le point de Steiner du triangle* $A_1B_1C_1$. (Droz Farny).

*Solution analytique*, d'après M. J. Déprez. $A_1B_1C_1$ étant le triangle de référence, nous désignons par $x$, $y$, $z$ les coordonnées normales d'un point, et par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les coordonnées d'une droite (ou les coefficients de son équation en coordonnées normales).

1. Cherchons d'abord l'équation d'une parabole inscrite au triangle $A_1B_1C_1$ et ayant pour foyer un point donné P $(x_1, y_1, z_1)$ du cercle circonscrit à ce triangle. Elle est de la forme

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{Lx} + \sqrt{My} + \sqrt{Nz} = 0.$$

L'équation de la tangente au point $(x', y', z')$ de cette courbe est

$$x\frac{d\varphi(x', y', z')}{dx'} + y\frac{d\varphi(x', y', z')}{dy'} + z\frac{d\varphi(x', y', z')}{dz'} = 0,$$

ou

$$x\sqrt{\frac{L}{x'}} + y\sqrt{\frac{M}{y'}} + z\sqrt{\frac{N}{z'}} = 0,$$

de manière que les coordonnées d'une tangente sont

$$\lambda = \sqrt{\frac{L}{x'}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{M}{y'}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{N}{z'}}. \tag{1}$$

Tirant de là les valeurs de $\sqrt{x'}$, $\sqrt{y'}$, $\sqrt{z'}$ pour les substituer dans l'égalité de condition

$$\sqrt{Lx'} + \sqrt{My'} + \sqrt{Nz'} = 0,$$

on trouve l'équation tangentielle de la parabole

$$\frac{L}{\lambda} + \frac{M}{\mu} + \frac{N}{\nu} = 0. \tag{2}$$

La droite de l'infini représentée par l'équation $ax + by + cz = 0$ doit être une tangente; par suite, on a

$$\frac{L}{a} + \frac{M}{b} + \frac{N}{c} = 0. \tag{3}$$

Les coordonnées du point de contact de cette droite, c'est-à-dire du point à l'infini dans la direction des diamètres, se déduisent des formules (1) où l'on remplace $\lambda, \mu, \nu$ par $a, b, c$; elles sont donc

$$x' = \frac{L}{a^2}, \quad y' = \frac{M}{b^2}, \quad z' = \frac{M}{c^2}.$$

Or, le point à l'infini sur les diamètres et le foyer de la parabole sont des points conjugués isogonaux par rapport au triangle circonscrit $A_1B_1C_1$; il en résulte

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{a^2}{L} : \frac{b^2}{M} : \frac{c^2}{N},$$

ou

$$L : M : N = \frac{a^2}{x_1} : \frac{b^2}{y_1} : \frac{c^2}{z_1},$$

et l'équation tangentielle de la parabole est

$$\frac{a^2}{\lambda x_1} + \frac{b^2}{\mu y_1} + \frac{c^2}{\nu z_1} = 0. \tag{4}$$

Si ce foyer est le point de Steiner P du triangle $A_1B_1C_1$, point qui a pour coordonnées

$$\frac{1}{\sin^2 A \sin(B-C)}, \quad \frac{1}{\sin^2 B \sin(C-A)}, \quad \frac{1}{\sin^2 C \sin(A-B)},$$

l'équation (4) devient

$$\frac{\sin^4 A \sin(B-C)}{\lambda} + \frac{\sin^4 B \sin(C-A)}{\mu} + \frac{\sin^4 C \sin(A-B)}{\nu} = 0. \tag{5}$$

2. La droite B'C', rapportée au triangle ABC, a pour équation

$$-x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0.$$

Pour passer au triangle de référence $A_1B_1C_1$, il faut remplacer $x \sin A$, $y \sin B$, $z \sin C$ par

$$y \sin B + x \sin C, \quad z \sin C + x \sin A, \quad x \sin A + y \sin B.$$

La nouvelle équation de B'C' sera

$$x \sin^3 A + y \sin^2 B \sin(A-C) + z \sin^2 C \sin(A-B) = 0.$$

Les coordonnées de cette droite sont donc :

$$\sin^3 A, \quad -\sin^2 B \sin(C-A), \quad \sin^2 C \sin(A-B);$$

il est facile de voir qu'elles vérifient l'équation (5). Donc, etc.

*Solution géométrique.* La solution suivante est fondée sur une partie des propriétés des triangles $A_1B_1C_1$ et A'B'C', dues à Schröter (Voir

N. A. M., 1865, p. 178); nous croyons utile de reprendre ici la démonstration des propriétés que nous invoquerons.

Soient H l'orthocentre du triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit et N celui du cercle des neuf points; désignons aussi par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les points d'intersection $(B'C_1, B_1C')$, $(C'A_1, C_1A')$, $(A'B_1, A_1B')$, $(B'C', B_1C_1)$, $(C'A', C_1A_1)$, $(A'B', A_1B_1)$.

1. ***Les points*** $\alpha, \beta, \gamma$ ***sont sur la droite*** HO. En effet, si A'', B'', C'' représentent les milieux des segments AH, BH, CH, les côtés opposés de l'hexagone $A'A''A_1B'B''B_1$ inscrit au cercle N, savoir $(A'A'', B'B'')$, $(A''A_1, B''B_1)$, $(A_1B', B_1A')$ se coupent aux trois points H, N, $\gamma$; donc $\gamma$ est situé sur la droite HO.

2. ***Les droites*** $A\alpha_1, B\beta_1, C\gamma_1$ ***sont perpendiculaires à*** HO; car, les points de concours $\alpha, \alpha_1$, A des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère inscrit $B'C'C_1B_1$ sont les sommets d'un triangle conjugué au cercle N; par suite $A\alpha_1$ est la polaire de $\alpha$ et est perpendiculaire au rayon $N\alpha$ ou à la droite HO.

Remarquons aussi que $A\alpha$ est la polaire de $\alpha_1$.

3. ***Les quatre points*** $A, \alpha, \beta_1, \gamma_1$ ***sont en ligne droite, et il en est de même des points*** $B, \beta, \gamma_1, \alpha_1$ ***et*** $C, \gamma, \alpha_1, \beta_1$.

D'abord, les points $\alpha, \beta_1, \gamma_1$ sont les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone inscrit $A_1B'C'A'B_1C_1$; donc ils sont collinéaires. Ensuite, les deux faisceaux harmoniques $A_1(B_1C_1\,AB)$, $A'(B'C'\,AB)$ ayant un rayon commun $A_1A'B$, les points d'intersection $\gamma_1, \beta_1$, A des trois couples de rayons correspondants sont en ligne droite.

La droite $A\alpha\beta_1\gamma_1$ est la polaire de $\alpha_1$.

4. ***Les droites*** $A_1\alpha_1, B_1\beta_1, C_1\gamma_1$ ***concourent en un même point*** P. Car la droite $A\alpha$ coupe deux côtés $A_1B_1, A_1C_1$ du triangle $A_1B_1C_1$ aux points $\gamma_1, \beta_1$, et le troisième $B_1C_1$ en un point $\alpha_2$, qui est le conjugué harmonique de $\alpha_1$ par rapport à $B_1C_1$, $A\alpha$ étant la polaire de $\alpha_1$; il en résulte que $A_1\alpha_1, B_1\beta_1, C_1\gamma_1$ passent un même point.

5. ***Le point*** P ***appartient au cercle*** N.

En effet, la droite $\gamma_1\beta_1A$ étant à la fois la polaire de $\alpha_1$ par rapport au cercle N et par rapport au quadrilatère $C_1PA_1B_1$, P est situé sur la circonférence N.

6. ***Le point*** P ***est situé sur l'ellipse de Steiner du triangle*** $A_1B_1C_1$. Les perpendiculaires abaissées de $A_1, B_1, C_1$ sur HO rencontrent $B_1C_1$,

$C_1A_1$, $A_1B_1$ aux isotomiques des points $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; par conséquent, P est le réciproque du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à HO. Or, on conclut facilement, des équations de la droite de l'infini et de l'ellipse de Steiner ou aussi de considérations projectives très simples que cette ellipse est le lieu des réciproques des points à l'infini du plan.

7. *Le point* P *est le foyer de la parabole inscrite aux deux triangles* $A_1B_1C_1$, A'B'C'.

Soient M, M' les points de rencontre de B'C' avec $A_1B_1$, $A_1C_1$. Les droites B'C', $B_1C_1$, antiparallèles par rapport à l'angle BAC, le sont également par rapport à l'angle $B_1A_1C_1$; par conséquent

$$\alpha_1M.\ \alpha_1M' = \alpha_1B_1.\ \alpha_1C_1.$$

Mais on a aussi

$$\alpha_1B_1.\ \alpha C_1 = \alpha_1P.\ \alpha_1A_1.$$

On en conclut que le quadrilatère $MM'A_1P$ est inscriptible. Or, il existe une parabole inscrite au quadrilatère $B_1C_1M'M$, et son foyer est à l'intersection des circonférences circonscrites aux triangles $A_1B_1C_1$, $A_1MM'$ formés par trois côtés du quadrilatère. P étant ce point, on voit que la parabole inscrite au triangle $A_1B_1C_1$ et ayant pour foyer le point P, touche le côté B'C' du triangle A'B'C' et, par analogie, les deux autres côtés.

Remarques. I. Le point P est le centre de l'hyperbole de Kiepert du triangle ABC.

II. On démontre facilement que les droites $A'\alpha_1$, $B'\beta_1$, $C'\gamma_1$ concourent en un même point P' du cercle N, ayant pour coordonnées barycentriques par rapport au triangle A'B'C'

$$\frac{\sin A}{\sin(B-C)},\quad \frac{\sin B}{\sin(C-A)},\quad \frac{\sin C}{\sin(A-B)}.$$

Ce point jouit-il de propriétés remarquables? (J. N.)

---

## *Question 1339.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 215.)

*Soit* P *un point quelconque de la sphère circonscrite à un cube dont* A, B, C, D *sont les sommets d'une même face. Démontrer que*

$$\cos^2 PA + \cos^2 PB + \cos^2 PC + \cos^2 PD = \tfrac{4}{3}.$$

(W. S. Cooney.)

*Solution par M.* V. Cristesco (Bucarest). Prenons comme axes coordonnés trois droites menées par le centre O du cube parallèlement à ses arêtes. Les coordonnées des sommets A, B, C, D seront de la forme

$$A(a, a, a),\quad B(a, -a, a),\quad C(a, -a, -a),\quad D(a, a, -a).$$

Soient $x, y, z$ les coordonnées du point P. Dans le triangle POA, on a :

$$\overline{PA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 - 2OP \cdot OA \cos POA,$$

d'où

$$\cos POA = \frac{\overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 - \overline{PA}^2}{2OP \cdot OA}.$$

Or,

$$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 = 3a^2,$$

$$\overline{PA}^2 = (x-a)^2 + (y-a)^2) + (z-a)^2 = 3a^2 - 2a(x+y+z),$$

et par suite

$$\cos POA = \frac{x+y+z}{3a}.$$

D'une manière analogue on obtient

$$\cos POB = \frac{x-y+z}{3a},\quad \cos POC = \frac{x-y-z}{3a},\quad \cos POD = \frac{x+y-z}{3a},$$

d'où

$$\cos^2 POA + \cos^2 POB + \cos^2 POC + \cos^2 POD = \tfrac{1}{3}.$$

Mais l'angle POA a pour mesure l'arc PA, etc., et, par suite, l'égalité précédente devient

$$\cos^2 PA + \cos^2 PB + \cos^2 PC + \cos^2 PD = \tfrac{1}{3}.$$

*Remarque.* Cette égalité a déjà été énoncée et démontrée par M. Gerondal dans *Mathesis* (1), VIII, pag. 78, 1888, dans une remarque relative à la question 578 de *Mathesis*.

M. Emmerich nous a également rappelé cette circonstance.

---

## Question 1969.

Voir (*Mathesis*, (2), X, p. 128).

*Le sommet* A *et le pied* D *de la bissectrice de l'angle* BAC *d'un triangle* ABC *étant fixes, trouver les lieux décrits par les sommets* B *et* C *lorsqu'on donne :* 1° *le rapport* AB : AC ; 2° *le produit* AB. AC ; 3° *la somme* AB + AC ; 4° *la somme* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ ; 5° *l'aire* ABC. (J. Neuberg.)

*Solution par* MM. Emmerich, Déprez et Barisien : 1° Menons BE parallèle à AC jusqu'à la rencontre avec le prolongement de AD en E. De

$$DE : DA = BE : CA = AB : AC = \text{constante},$$

on conclut que le point E reste fixe. La base du triangle isoscèle BAE restant fixe, on voit que son sommet B décrit une perpendiculaire à AD. Il en est de même pour le point C. Les pieds des perpendicaires divisent AD harmoniquement dans le rapport

$$(AB + AC) : (AB - AC).$$

2° Si la droite AD coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en F, on a

$$AD.\,AF = AB.\,AC = \text{const.}$$

Le point F est donc fixe. Des triangles semblables FBD et FAB, FCD et FAC, on tire

$$FB^2 = FC^2 = FD.\,FA$$

ce qui montre que les points B,C décrivent un cercle autour de F. En élevant une perpendiculaire sur AD en D qui coupe le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{AB.\,AC}$ en G, et en menant GF perpendiculaire sur AG, on trouve un point G et le centre F du lieu cherché.

3° Soit $AD = m$, $AB = r$, $AC = r'$, l'angle $DAB = \varphi$. De la proportion

$$(DE + DA) : DA = (AB + AC) : AC$$

on tire

$$m(r + r') = 2rr' \cos\varphi. \qquad (1)$$

Si $r + r' = \text{const} = s$, le lieu du point B sera représenté par

$$2r(s - r)\cos\varphi = ms;$$

c'est une quartique dont l'équation en coordonnées rectangulaires est

$$4x^2(x^2 + y^2) = s^2(2x - m)^2.$$

Le point C décrit la même courbe.

4° La condition $r^2 + r'^2 = p^2$ combinée avec l'équation (1) donne

$$(p^2 - r^2)(2r\cos\varphi - m)^2 = m^2r^2,$$

$$(p^2 - x^2 - y^2)[(2x - m)^2 + m^2] = m^2p^2,$$

équation d'une quartique.

5° Si l'on combine l'équation de condition

$$rr' \sin 2\varphi = 2mq,$$

avec l'équation (1), on trouve en éliminant $r'$

$$r \cos \varphi . (2q - r \sin \varphi) = mq,$$

$$x (2q - y) = mq.$$

Par conséquent, le point B parcourt une hyperbole équilatère qui a pour asymptotes les droites $x = 0$, $y = 2q$, et qui passe par le point $x = m$, $y = q$.

Le point C décrit l'hyperbole $x (2q + y) = mq$.

Remarques. I. $m$ restant toujours bissectrice intérieure, les points B et C se trouvent à l'extérieur du cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}m$. Car le point E du n° 1 étant situé nécessairement en dehors du triangle ABC, on a

$$AB + BE > AD, \; 2r > m.$$

Si le point C décrit le cercle de centre A et de rayon $a > \frac{m}{2}$, le point B se meut sur l'hyperbole

$$[(4a^2 - m^2) x - 2a^2 m]^2 - m^2 (4a^2 - m^2) y^2 = a^2 m^4,$$

laquelle devient équilatère si $a = m\sqrt{2}$.

En général, si le point C décrit une courbe quelconque $f(x', y') = 0$, on trouve le lieu du point B par les substitutions

$$x' = \frac{mx}{2x - m}, \quad y' = \frac{-my}{2x - m}.$$

Les points B et C décrivent donc des courbes de même degré. Au cercle

$$(x' - p)^2 + (y' - q)^2 = a^2$$

correspond une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que

$$(m - 2p)^2 - 4a^2 > 0, = 0 \text{ ou } < 0.$$

Avec la supposition $a^2 = p(p - m)$, $q = 0$ on retombe sur le n° 2 de la question. (Emmerich.)

II. a. Si l'on donne $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{K}$, les points B, C décrivent deux droites menées par A et symétriques par rapport à AD.

b. Si l'on donne $\frac{\lambda}{AC}+\frac{\mu}{AB}=1$, $\lambda$ et $\mu$ étant des constantes, les points B, C décrivent deux coniques de foyer A.

c. Si $\frac{\lambda}{\overline{AC}^2}+\frac{\mu}{\overline{AB}^2}=1$, les sommets B, C décrivent deux coniques.

(Déprez, Barisien).

III. Soit ABC un triangle sphérique, dont on donne le sommet A et le pied D de l'arc bissecteur de l'angle ABC.

Si on donne $\cot AB+\cot AC=K$, B et C décrivent deux arcs de grand cercle passant par A et symétriques par rapport à AD.

Si le rapport $\cot AB : \cot AC$ est constant, B et C décrivent deux arcs de grand cercle perpendiculaires à AD.

Si le produit $\cot AB \cdot \cot AC$ est constant, B et C décrivent une conique sphérique.

Si la somme $\lambda \cot AB+\mu \cot AC$ est constante, les points B, C décrivent deux coniques de foyer A. (Déprez).

IV. M. Barisien examine les mêmes lieux lorsque la bissectrice extérieure de l'angle BAC reste fixe.

On trouve encore deux droites lorsque AB : AC est constant, et une circonférence lorsque AB . AC est constant. Mais on obtient deux quartiques différentes pour le lieu de chacun des points B, C dans les hypothèses 3° et 4° de l'énoncé; la relation (1) est remplacée par

$$m(r-r')=2rr'\cos\varphi.$$

Quant à l'hypothèse 5°, on a trouvé ci-dessus deux hyperboles H et H' ayant pour asymptote commune la perpendiculaire élevée en A sur AD; ces courbes passent au milieu D' de la distance AD et sont symétriques par rapport à la bissectrice AD. Si une sécante menée par A rencontre en M et N la branche de H qui passe par D', AD est la bissectrice extérieure de l'angle MDN; le symétrique M' de M par rapport à AD appartient à l'hyperbole H', et le triangle ANM' vérifie la condition de la question. Mais si une sécante menée par A rencontre H aux points P, Q sur les deux branches, AD est la bissectrice intérieure de l'angle PDQ, et si P' est le symétrique de P par rapport à AD, le triangle P'AQ est une solution du n° 5, AD étant la bissectrice extérieure de l'angle P'AQ. (J. N.)

### Question 1398.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 276).

*Si* M *est un point mobile sur une ellipse de foyers* F, F', *démontrer que les points de contact des côtés* MF, MF' *avec le cercle inscrit au triangle* MFF' *et avec le cercle exinscrit dans l'angle* M *décrivent des conchoïdes d'ellipse; les points de contact des mêmes côtés avec les deux autres cercles exinscrits décrivent des circonférences.* (J. Déprez.)

*Solution par* MM. Emmerich, Andrien et Verheugen. Soient I le centre du cercle inscrit, $I_1$, $I_2$, $I_3$ les centres des cercles touchant extérieurement FF', MF, MF'. Abaissons IN, $I_1N_1$, $I_2N_2$, $I_3N_3$ perpendiculaires à MF et désignons le grand axe par $2a$ et la distance FF' par $2c$. Le périmètre du triangle MFF' étant $2(a+c)$ on a $MN = a - c$, $MN_1 = a + c$, $FN_2 = a - c$, $FN_3 = a + c$. La proposition est donc démontrée.

Remarques. I. Les points $I_2$, $I_3$ ont pour lieux géométriques les tangentes aux extrémités du grand axe.

II. Si le point M décrit une hyperbole de foyers F, F' : 1° Les points I, $I_1$ décrivent des perpendiculaires à FF'; les points N, $N_1$ parcourent des circonférences; 3° les points $N_2$, $N_3$ parcourent des concheïdes d'hyperbole.

III. Par le foyer F' d'une ellipse, on mène une corde quelconque MN. 1° le cercle exinscrit au triangle FMN qui touche MN intérieurement, touche les côtés FM, FN sur le cercle directeur de centre F; le cercle exinscrit qui touche NF intérieurement touche les côtés MF, MN sur des conchoïdes d'ellipse. (Andrien.)

---

## ˣQUESTIONS D'EXAMEN.

**987.** Si $a$, $b$, $\dfrac{ab}{a+b}$ sont entiers, $a$ et $b$ sont de la forme

$$ma'(a'+b'), \quad mb'(a'+b').$$

(*Journal de Vuibert*).

Posons $a = a'd$, $b = b'd$, $d$ étant le p. g. c. d. de $a$ et $b$; alors

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{a'b'd}{a'+b'},$$

$a'$ et $b'$ étant premiers entre eux $a'+b'$ est premier avec $a'$ et avec $b'$; donc il doit diviser $d$, etc.

**288.** Soient AOB un diamètre d'une circonférence, D la projection de B sur la tangente au point C, E le milieu de AC. Démontrer que les points D et E sont équidistants du milieu F de OB. (A. Gob.)

Les perpendiculaires élevées au milieu de CD et au milieu de CE passent au milieu de OB; donc F est le centre de la circonférence ECD.

**289.** Soient AD, BE, CF les hauteurs d'un triangle ABC et H l'orthocentre. Appelons A'B'C', A''B''C'', A'''B'''C''' les trois triangles qu'on obtient en menant extérieurement au triangle ABC des parallèles aux côtés BC, CA, AB et distantes de ceux-ci de quantités respectivement égales, d'abord aux hauteurs AD, BE, CE, ensuite aux segments HD, HE, HF, enfin, aux segments AH, BH, CH.

Cette figure jouit des propriétés suivantes :

1° L'orthocentre H de ABC est le centre du cercle d'Euler de A'B'C', 2° Les triangles ABC, A'B'C' ont même centre de gravité. 3° Les triangles ABC, A''B''C'' ont même orthocentre. 4° Les triangles ABC, A'''B'''C''' ont même centre du cercle circonscrit. 5° Les triangles A'B'C', A'''B'''C''' ont même orthocentre. 6° Les triangles A''B''C'', A'''B'''C''' ont pour centre de similitude un point de la droite d'Euler qui est commune aux quatre triangles considérés. (Mathot.)

**290.** Résoudre le système

$$yz = ax + b, \quad zx = ay + b, \quad xy = az + b.$$

*Solution* 1° $x = y = a$, $z = a - \frac{b}{a}$; $y = z = a$, $x = a - \frac{b}{a}$; $z = x = a$, $y = a - \frac{b}{a}$.

2° $x = y = z = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4b})$. (Emmerich.)

**291.** Soit ABC un triangle sphérique rectangle en A et tel l'angle B = 2C. La bissectrice de l'angle B rencontrant AC en D, montrer que l'angle BDA = 60° et que BC = 2AB. L'hypoténuse BC = $a$ étant donnée, calculer la médiane AA' et le rayon R du cercle circonscrit.

(Emmerich.)

On voit immédiatement que les angles CDA', BDA' BDA sont égaux. On trouve ensuite

$$\sin \tfrac{1}{2} AA' = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a, \quad \operatorname{tg} R = 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} a \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} a \cos \frac{1}{2} a}{\cos \frac{3}{4} a}}.$$

**1292.** Pour que les tangentes en quatre points $A_i(x_i, y_i), \ldots A_4(x_4, y_4)$ de l'hyperbole équilatère $xy = 1$ touchent une même circonférence, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} \pm\sqrt{x_1^2+y_1^2} & x_1 & y_1 & 1 \\ \pm\sqrt{x_2^2+y_2^2} & x_2 & y_2 & 1 \\ \pm\sqrt{x_3^2+y_3^2} & x_3 & y_3 & 1 \\ \pm\sqrt{x_4^2+y_4^2} & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\Sigma \pm OA_1 . A_2A_3A_4 = 0.$$ (J. N.)

L'équation de la tangente au point $A_i$ est $xy_i + yx_i - 2 = 0$, avec la condition

$$ay_i + bx_i - 2 = r\sqrt{x_i^2+y_i^2},$$

$a$, $b$ étant les coordonnées du centre et $r$ le rayon du cercle qui touche les tangentes à l'hyperbole.

## QUESTIONS PROPOSÉES.

*1301. Etant donnés trois points A, B, C, mener par un point D, situé en dehors du plan ABC sur une perpendiculaire DE au milieu de AB, une droite perpendiculaire à DE et équidistante des points B et C.

Cette question remplace la question 1301 (p. 40) qui est identique à la question 1291, page 240 du volume précédent.

**1311.** Soient M un point mobile sur une conique donnée, C le centre de courbure correspondant. Trouver l'enveloppe du cercle de centre M et de rayon MC. (E. N. Barisien.)

**1312.** On considère toutes les coniques passant par quatre points donnés A, B, C, D. Trouver les lieux des points de rencontre de chacune de ces courbes avec ses normales menées par A. (A. Gob.)

**1313.** Construire le triangle ABC, connaissant soit le premier, soit le second triangle de Brocard de ABC. (L. Ripert.)

**1314.** Par les trois sommets d'un triangle ABC on mène parallèlement à une même direction trois droites AA', BB', CC' limitées en A', B', C' aux côtés opposés. Démontrer que les points qui divisent ces droites addivement dans le rapport 1 : 2 sont en ligne droite.

(J. Neuberg.)

## GÉOMÉTRIE DES ÊTRES PLANS,

par M. G. Tarry.

On s'est souvent figuré(*), à tort, que la géométrie plane nécessite des déplacements de figures hors du plan. J'ai cherché à démontrer tous les théorèmes de géométrie plane, sans sortir du plan, et j'y suis parvenu.

Mais il m'a été impossible d'obtenir ce résultat sans l'aide du postulatum d'Euclide. J'ai alors posé la question dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* sous cette forme : Démontrer sans sortir du plan et sans le secours du postulatum d'Euclide qu'un triangle isoscèle a deux angles égaux.

Le n° du mois d'août 1900 a publié deux réponses dont la première constitue un cercle vicieux, et dont la seconde, due à M. Barbarin, se termine par cette conclusion que le postulatum d'Euclide semble, *jusqu'à preuve du contraire*, à la fois insuffisant et inutile pour démontrer les propriétés du triangle isoscèle.

C'est cette preuve contraire que fournit la Note actuelle. J'ai supprimé toutes les démonstrations; sauf pour la dernière proposition, ces démonstrations se trouvent dans tous les traités. Je me contente de constater que l'on n'y considère que des triangles *directement* égaux.

**1**. Par un point pris sur une droite on peut toujours mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.

**2**. Tous les angles droits sont égaux.

**3**. Deux angles adjacents sont supplémentaires, si leurs côtés extérieurs sont en ligne droite.

**4**. Lorsque deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux.

**5**. Deux triangles qui ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre, sont directement égaux.

**6**. Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre, sont directement égaux.

**7**. En prolongeant un côté d'un triangle, on forme un angle extérieur plus grand que chacun des deux angles intérieurs non adjacents.

---

(*) Voir la note à la fin de l'article.

Dans la démonstration, on considère deux triangles directement égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

**8.** La somme de deux angles intérieurs d'un triangle est plus petite que deux angles droits.

**9.** Deux droites qui forment avec une troisième deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme est égale à deux angles droits, sont parallèles.

**10.** Par un point pris en dehors d'une droite on peut toujours mener une parallèle à cette droite.

**11.** Postulatum. — Par un point pris en dehors d'une droite on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.

**12.** Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.

**13.** Toute droite qui rencontre deux parallèles forme, d'un même côté avec ces deux parallèles, deux angles intérieurs dont la somme est égale à deux angles droits.

**14.** Deux parallèles comprises entre deux parallèles sont égales.

Dans la démonstration, on considère deux triangles directement égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

**15.** Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

**16.** Deux parallèles sont partout équidistantes.

**17.** Par un point pris en dehors d'une droite on peut toujours mener une perpendiculaire à cette droite, et on ne peut mener qu'une.

Cela résulte de ce que cette perpendiculaire doit être aussi perpendiculaire à la parallèle menée à la droite par le point pris en dehors.

**18.** La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

**19.** Deux rectangles de même surface qui ont leurs bases égales, ont leurs hauteurs égales.

**20.** Deux carrés de même surface sont égaux.

**21.** Si par deux sommets d'un triangle on mène les parallèles aux côtés opposés, on forme un parallélogramme dont la surface est égale au double de la surface du triangle.

En effet, le parallélogramme est composé par deux triangles qui sont directement égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

**22.** La surface d'un parallélogramme est égale à la surface d'un rectangle de même base et de même hauteur.

Les triangles équivalents, qui interviennent dans la démonstration sont directement égaux.

**23.** La surface d'un triangle est égale à la moitié de la surface d'un rectangle de même base et de même hauteur.

**24.** Dans un triangle isoscèle, les hauteurs correspondant aux côtés égaux sont égales.

**25.** La surface du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des surfaces des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

On remarquera que, dans la démonstration classique, les triangles équivalents qui interviennent sont directement égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

**26.** Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un autre côté égal, ont leurs troisièmes côtés égaux.

**27.** Dans un triangle isoscèle BAC, les angles B et C opposés aux côtés égaux sont égaux (Le lecteur est prié de faire la figure).

Par le sommet A menons la perpendiculaire AH à la base. Les deux triangles rectangles ABH et ACH, ayant l'hypoténuse égale et un côté commun, ont leurs troisièmes côtés égaux, BH et CH.

Par conséquent, les triangles ABH et ACH ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et évidemment disposés en ordre inverse.

Prenons sur AH une longueur AC′ égale à AC, puis abaissons de C′ la perpendiculaire C′H′ sur le côté AC. Dans le triangle isoscèle C′AC les hauteurs C′H′ et CH, correspondant aux côtés égaux, sont égales et les deux triangles rectangles AC′H′ et ACH, qui ont l'hypoténuse égale et un autre côté égal, ont leurs troisièmes côtés égaux.

Par conséquent les triangles AC′H′ et ACH ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et évidemment disposés en ordres inverses.

Il résulte de ce qui précède que les deux triangles rectangles ABH et A′C′H′ ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre. Par suite, ces deux triangles sont directement égaux

comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

Les angles BAH et C'AH', correspondant aux côtés égaux, sont égaux. Or les angles à la base du triangle isoscèle, B et C, sont respectement complémentaires des angles égaux BAH et C'AH'.

Donc les angles B et C sont égaux (c. q. f. d.).

Pour tous les autres théorèmes, les géomètres à deux dimensions peuvent prendre, sans y rien changer, les démonstrations données par leurs collègues à trois dimensions.

Note. Dès 1870, M. De Tilly a fait la remarque suivante : « Le retournement n'est jamais nécessaire dans la géométrie plane; on l'emploie quelquefois pour démontrer rapidement l'égalité de deux figures, mais cette égalité peut toujours se démontrer autrement » (BB, (2), XXX, p. 35). Pour s'en convaincre, il suffit de lire l'un quelconque de ses exposés de la géométrie plane ou de la trigonométrie plane (ce qui revient au même, puisque tout se réduit à des triangles et même à des triangles rectangles). Voir, par exemple, *Essai de géométrie analytique générale* (M8B, t. XLVII ou *Mathesis* supplément, 1895) pp. 59-63. Dans ce mode d'exposition, on démontre, en géométrie non euclidienne, aussi bien qu'en géométrie euclidienne, que *dans un triangle isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux*. Le postulatum d'Euclide est donc inutile pour établir ce théorème.

Dans la démonstration de M. Tarry, comme dans celle de M. De Tilly, interviennent des relations métriques (les théorèmes 23 et 25 chez M. Tarry) et, malheureusement, elles s'appuient sur la difficile théorie des aires. (P. M.)

---

## UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE LANCRET ET DE SA RÉCIPROQUE,

par M. G. Pirondini, à Parme.

G. Lancret, dans la *Correspondance de l'École Polytechnique* (tome I, pag. 51), démontre le théorème suivant, qui joue un rôle très important dans la théorie des lignes à double courbure :

« *Si l'on développe sur un plan la surface polaire relative à une ligne à double courbure quelconque, le lieu des centres de courbure de cette ligne se transforme suivant la polaire, relative à une certaine origine* O, *de l'arête de rebroussement développée; et les rayons menés du point origine à deux points correspondants de l'arête développée et de sa polaire, sont respectivement égaux aux rayons de la sphère osculatrice et du cercle osculateur pour le point correspondant de la ligne primitive.* »

P. SERRET, dans le Chapitre II de sa « *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure* », après avoir remarqué que *ce théorème a été établi par Lancret à l'aide de considérations qui ne paraissent pas complétement rigoureuses*, démontre le théorème d'une autre façon.

La démonstration est cependant assez compliquée. Quant au théorème réciproque, l'auteur se borne à la remarque : *La réciproque de la proposition précédente est vraie, quoique donnant lieu à une démonstration plus pénible.*

La démonstration suivante paraît être remarquable au point de vue de la rigueur et de la simplicité.

Soit $L_2$ une ligne à double courbure quelconque ; $L_1$ le lieu des centres de courbure ; L le lieu des centres des sphères osculatrices ; $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$, $(\cos l, \cos m, \cos n)$, $s, \rho, r$, les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, l'arc, le rayon de courbure et le rayon de torsion de L. Si $A(x, y, z)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ sont trois points correspondants des lignes L, $L_1$, $L_2$, en posant :

$$AA_1 = H, \quad A_1A_2 = T,$$

on a :

$$(1) \qquad x_1 = x - H\cos\alpha, \quad x_2 = x_1 - T\cos\lambda, \text{ etc.}$$

Il en résulte que les cosinus directeurs de la tangente à $L_2$ sont donnés par les formules suivantes :

$$(2)\ \cos\alpha_2 = \left[\left(\frac{T}{\rho} - \frac{dH}{ds} + 1\right)\cos\alpha - \left(\frac{H}{\rho} + \frac{dT}{ds}\right)\cos\lambda + \frac{T}{r}\cos l\right]\frac{ds}{ds_2}, \text{ etc.}$$

$s_2$ étant l'arc de $L_2$.

Conséquemment les conditions :

$$\Sigma\cos\alpha_2\cos\alpha = 0, \quad \Sigma\cos\alpha_2\cos\lambda = 0,$$

exprimant que L est l'arête de rebroussement de la développable polaire S de $L_2$, donnent :

$$(3) \qquad \frac{dH}{ds} - \frac{T}{\rho} = 1, \quad \frac{dT}{ds} + \frac{H}{\rho} = 0.$$

Que l'on développe la surface S sur un plan. Si, pendant cette opération, on conserve les droites T sur les plans osculateurs de L, les équations (1), ainsi que les équations (2), ont lieu à chaque instant.

En outre, les quantités H, T, $\rho$, $s$ sont invariables pendant le développement, il s'ensuit que, la figure étant développée sur le plan, les multiplicateurs de $\frac{ds}{ds_2}$ dans les équations (2), se réduisent à zéro.

Comme $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ ne peuvent pas être zéro, on doit avoir $ds_2 = 0$ La transformée plane de $L_2$ est donc un point, d'où le théorème de LANCRET.

Si $L_1$ est la polaire d'une ligne plane quelconque L, par rapport à une origine arbitraire O et si A, $A_1$ sont deux points correspondants de ces lignes, en posant :

$$OA = R, \quad OA_1 = T, \quad AA_1 = H,$$

on a :

$$H = R\frac{dR}{ds}, \quad T = R\sqrt{1-\left(\frac{dR}{ds}\right)^2};$$

comme d'ailleurs :

$$\rho = \frac{R\sqrt{1-\left(\frac{dR}{ds}\right)^2}}{-1+\left(\frac{dR}{ds}\right)^2+R\frac{d^2R}{ds^2}},$$

on trouve que les conditions (3) sont vérifiées par identité.

Il suffit donc de passer de la figure plane à la figure de l'espace, par un mouvement contraire à celui qu'on vient d'effectuer, pour avoir les propriétés constituant la réciproque de la proposition de LANCRET.

---

## SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSOÏDE.

par M. C. E. WASTEELS (Gand).

1. Dans le présent article, nous nous proposons de déduire un certain nombre de propriétés de l'ellipsoïde des propriétés correspondantes de la sphère, par une transformation homographique.

Faisons correspondre au point M, qui a pour coordonnées $x, y, z$, un point M' ayant pour coordonnées $x' = ax$, $y' = by$, $z' = cz$.

L'équation d'une sphère, rapportée à son centre et à trois axes rectangulaires, étant $x^2+y^2+z^2=1$, la figure homographique sera l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

Afin d'établir la correspondance entre les propriétés des deux figures, observons que, dans la transformation en question,

1° à tout plan et à toute droite, correspondent respectivement un plan et une droite;

2° l'origine, les plans et les axes des coordonnées sont respectivement leurs propres homologues;

3° le parallélisme des plans et des droites est conservé;

4° il en est de même du rapport de deux segments en ligne droite, de celui des aires de deux figures situées dans un même plan, et enfin, du rapport des volumes de deux figures solides quelconques.

Il résulte de ce qui précède qu'en général, à deux figures homothétiques correspondent encore deux figures homothétiques, les centres d'homothétie étant deux points homologues.

Enfin, dans le cas particulier de la sphère et de l'ellipsoïde, on peut conclure qu'à tout cercle de la première surface et au diamètre perpendiculaire, correspondent, dans la seconde, une section plane (ellipse) et son diamètre conjugué.

**2.** Avant de nous occuper des angles et des arcs, nous allons présenter quelques applications relatives aux volumes. Dans les cas les plus simples, nous nous bornerons à énoncer les propriétés correspondantes des deux figures.

Ainsi :

1° Tous les segments à une base d'une même sphère, ayant leurs bases équidistantes du centre (ou tangentes à une même sphère concentrique), sont égaux.

2° Il en est de même des secteurs sphériques correspondants.

3° Tous les cônes circonscrits à une sphère et ayant leurs sommets sur une sphère concentrique sont égaux; par suite, le volume compris entre la première sphère et chacun de ces cônes est constant.

Tous les segments à une base d'un même ellipsoïde, ayant leurs bases tangentes à un même ellipsoïde concentrique et homothétique, sont équivalents.

Il en est de même des secteurs ellipsoïdaux correspondants.

Si l'on considère les cônes circonscrits à un ellipsoïde et ayant leurs sommets sur un ellipsoïde concentrique et homothétique, le volume compris entre le premier ellipsoïde et chacun de ces cônes est constant.

4° Puisque, dans une même sphère, les volumes des secteurs sont proportionnels aux hauteurs des zones correspondantes, on peut dire que, pour tous les secteurs dont les zones ont leurs bases parallèles à un même plan, les volumes sont proportionnels aux segments que les bases de chaque zone déterminent respectivement sur une droite quelconque.

5° Tous les diamètres de la sphère étant égaux, on peut encore dire que, dans la même sphère, le volume d'un secteur quelconque est proportionnel au rapport de la hauteur de la zone correspondante au diamètre conjugué à ses bases.

Dans un même ellipsoïde, les volumes des secteurs, dont les zones correspondantes ont leurs bases parallèles à un même plan, sont proportionnels aux segments que les bases de chaque zone déterminent respectivement sur une droite quelconque; ces secteurs sont donc proportionnels aux hauteurs des zones qui leur servent de bases.

Si, dans un même ellipsoïde, on considère des secteurs quelconques et que, pour chacun d'eux, on imagine le diamètre conjugué aux bases de la zone correspondante ainsi que le segment qu'elles déterminent sur ce diamètre, le volume d'un secteur quelconque sera proportionnel au rapport du segment correspondant défini ci-dessus au diamètre total.

On sait que, si le côté AB d'un triangle sphérique ABC est fixe, le lieu géométrique du sommet C tel que l'aire du triangle ABC reste constante, se compose de deux petits cercles symétriques par rapport au plan OAB et passant par les points diamétralement opposés à A et B (Théorème de Lexell).

Si l'on considère les pyramides sphériques ayant pour bases les triangles sphériques en question, toutes ces pyramides auront le même volume, puisque le volume s'obtient en multipliant la base par le tiers du rayon.

Ainsi,

6° Si le côté AB de la base ABC d'une pyramide sphérique triangulaire OABC reste fixe, le lieu du sommet C tel que le volume de la

Si le côté AB de la base ABC d'une pyramide ellipsoïdale triangulaire OABC reste fixe, le lieu du sommet C tel que le volume de la pyramide

pyramide reste constant se compose de deux petits cercles passant par les points diamétralement opposés à A et B et symétriques, par rapport au plan OAB.

reste constant, se compose de deux sections planes (ellipses) passant par les points diamétralement opposés à A et B et coupant les cordes conjuguées au plan OAB à égale distance de part et d'autre de ce plan.

3. *Transformation des propriétés relatives aux angles et aux arcs.*

Considérons le rapport de deux arcs d'un cercle quelconque tracé sur la sphère; ce rapport est égal à celui des secteurs correspondants et ce dernier rapport est conservé dans la transformation (4° du n° 1). Il en résulte que le rapport des deux arcs de cercle considérés est égal à celui des secteurs correspondants de la transformée.

Dans les applications, on aura souvent à comparer un arc de cercle au quadrant de la même circonférence; $m$ étant l'arc de la 2e figure répondant à l'arc de cercle de la 1re, nous désignerons par $m_1$ le rapport du secteur correspondant au quart de l'ellipse dont il fait partie, de sorte que le rapport de l'arc de cercle au quadrant sera égal à $m_1$.

Soient maintenant, sur la sphère, deux angles formés d'arcs de grand cercle et ayant leur sommet commun; le rapport de ces angles est le même que celui des arcs de cercle, décrits de leur sommet comme pôle, avec un même rayon arbitraire et compris entre leurs côtés; or, au cercle dont ces arcs font partie correspond, dans la 2e figure, une ellipse dont le plan est conjugué au diamètre passant par le sommet commun des angles transformés (nous dirons encore, dans la suite, que le sommet des angles est le pôle de cette ellipse); les côtés de ces angles déterminent sur l'ellipse deux arcs : d'après ce qui précède, le rapport des deux secteurs correspondants sera égal à celui des angles donnés.

Il résulte de là que si M est l'homologue d'un angle compris entre des arcs de grand cercle de la 1re figure, et que $m$ représente un arc d'ellipse, compris entre les côtés du M et décrit de son sommet comme pôle, la mesure de l'angle de la 1re figure, rapporté à l'angle droit, sera égale à $m_1$. La quantité $m_1$, obtenue en partant de l'angle M, sera désignée dans la suite par $M_1$.

4. Applications.

1° Si l'on prend pour unité de volume le huitième du volume de la

Si l'on prend pour unité de volume le huitième du volume de

sphère, un onglet sphérique a pour mesure le double de celle de son angle rapporté à l'angle droit.

2° Les unités de volume et d'angle étant les mêmes, le volume d'une pyramide sphérique triangulaire de base ABC a pour mesure $A + B + C - 2$.

l'ellipsoïde, un onglet ellipsoïdal d'angle M a pour mesure le double de M.

L'unité de volume étant la même, le volume d'une pyramide ellipsoïdale triangulaire de base ABC a pour mesure $A_1 + B_1 + C_1 - 2$.

---

## SUR LES NOMBRES DE FIBONACCI ;

par M. EMMERICH.

La suite de Fibonacci

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots \qquad (1)$$

est définie par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

et les valeurs initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

On trouve facilement que

$$u_{n+3} = 2u_{n+1} + u_n, \quad \text{d'où} \quad u_{n+3} - u_n = M.2.$$

Ainsi deux nombres de la suite (1) dont les rangs diffèrent d'un multiple de 3 sont en même temps pairs ou impairs. Par conséquent, les nombres $u_3$, $u_6$, $u_9$, ... sont pairs et les autres impairs.

On a

$$u_{n+5} = 5u_{n+1} + 3u_n, \quad \text{d'où} \quad u_{n+5} - 3u_n = M.5.$$

Il résulte de là que les nombres $u_5$, $u_{10}$, $u_{15}$, ... sont des multiples de 5. Cette propriété combinée avec la précédente permet de conclure que les derniers chiffres des nombres $u_0$, $u_3$, $u_{10}$, $u_{15}$, ... sont périodiquement 0, 5, 5, et que les autres nombres de Fibonacci sont premiers avec 5.

Si l'on élimine $u_{n+5}$ et $u_{n+10}$ entre les égalités

$$u_{n+5} - 3u_n = M.5, \quad u_{n+10} - 3u_{n+5} = M.5, \quad u_{n+15} - 3u_{n+10} = M.5,$$

on trouve $u_{n+15} - 27u_n = M.5$, d'où, en multipliant par 3,

$$3u_{n+15} - u_n = M.5.$$

Or, $u_n$ et $u_{n+15}$ étant de même parité, on a même

$$3u_{n+15} - u_n = M.10, \quad 3u_{n+30} - u_{n+15} = M.10.$$

Éliminons $u_{n+15}$ entre ces deux égalités ; il vient

$$9u_{n+50} - u_n = M.10, \quad \text{ou} \quad u_{n+50} + u_n = M.10.$$

Combinant cette dernière relation avec l'égalité

$$u_{n+60} + u_{n+50} = M.10,$$

on trouve

$$u_{n+60} - u_n = M.10.$$

Par conséquent, *les derniers chiffres des nombres de Fibonacci se reproduisent périodiquement de* 60 *en* 60. Ils ne peuvent former une période de moins de termes; c'est ce qui résulte de ce que $u_0$, $u_{15}$, $u_{31}$, sont les seuls nombres terminés par 0 et que $u_{n+30} + u_n = M.30$.

Pour démontrer la dernière propriété, on peut aussi partir des égalités

$$u_{n+5} - 3u_n = M.5, \quad u_{n+10} - 3u_{n+5} = M.5,$$

pour en conclure, d'abord,

$$u_{n+10} - 9u_n = M.5, \quad \text{ou} \quad u_{n+10} + u_n = M.5;$$

ensuite,

$$u_{n+20} - u_n = M.5, \quad u_{n+40} - u_{n+20} = M.5, \quad u_{n+60} - u_{n+40} = M.5;$$

et enfin

$$u_{n+60} - u_n = M.5;$$

comme $u_{n+60}$ et $u_n$ sont de même parité, $u_{n+60} - u_n$ est même divisible par 10.

Note. Pour généraliser, on peut étudier la suite formée par les restes des nombres de Fibonacci, divisés par un même nombre.

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

6. *Analogies entre le cercle, l'hyperbole et la parabole.* 1° Si en chaque point P du prolongement d'une droite AB on élève une ordonnée PM égale à la moyenne géométrique entre les segments PA, PB, le lieu de M est une hyperbole équilatère (Théorème très connu).

2° Si en chaque point P d'une droite AB ou de son prolongement on élève une perpendiculaire PM égale à la moyenne harmonique entre les segments AP, PB, le lieu de M est une parabole passant par A et par B, et ayant pour sommet l'extrémité de la perpendiculaire élevée au milieu AB et égale à $\frac{1}{2}$ AB.

3° Si l'ordonnée PM est moyenne harmonique entre PA et PB, le point M décrit une hyperbole ayant pour asymptotes AB et une droite menée par le milieu de AB et inclinée de 45° sur AB.

×7. *Note d'Arithmologie. Le produit de quatre nombres entiers consécutifs, augmenté du carré de leur demi-somme, est un carré :*

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+(2n+3,^2=(n^2+3n+3)^2.$$

*Le produit de quatre nombres impairs* (pairs) *consécutifs, augmenté du carré de leur demi-somme, est un carré :*

$$n(n+2)(n+4)(n+6)+(2n+6)^2=(n^2+6n+6)^2.$$

Exprimé sous cette forme, l'énoncé des propositions précédentes ne paraît pas susceptible de généralisation. En effet, pour ne citer qu'un exemple, le produit de quatre nombres en progression arithmétique de raison 3, augmenté du carré de leur demi-somme, n'est pas un carré : la somme

$$n(n+3)(n+6)(n+9)+(2n+9)^2$$

est comprise entre

$$(n^2+9.n+10)^2 \quad \text{et} \quad (n^2+9.n+11)^2.$$

Mais en se reportant à l'identité

$$n(n+r)(n+2r)(n+3r)+r^4=(n^2+3nr+r^2)^2,$$

on reconnaît que dans le produit de $r^4=r^2.r^2$, on peut remplacer l'un des deux facteurs égaux $r^2$ par le carré $(2n+3r)^2$ de la demi-somme des quatre nombres en progression.

Et l'on peut écrire :

$$n(n+r)(n+2r)(n+3r)+r^2(2n+3r)^2=(n^2+3nr+3r^2)^2=$$
$$(n^2+3nr+2r^2)^2+(nr+2r^2)^2+(nr+r^2)^2.$$

identité qui peut se traduire ainsi :

Le produit de quatre nombres en progression arithmétique, augmenté du carré du produit de leur demi-somme par la raison est 1° un carré ; 2° la somme de trois carrés. (G. de Rocquigny-Adanson).

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

### Question 767.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 120.)

***Les milieux des cordes interceptées par la circonférence circonscrite à un triangle sur les axes de l'ellipse de Steiner sont séparés harmoniquement par le milieu de la droite joignant le point de Steiner au centre de l'hyperbole de Kiepert et par le complémentaire du point de Lemoine.*** (Énoncé rectifié). (E. Cesáro.)

***Solution par*** M. Emmerich. Les axes de l'ellipse de Steiner $Gx$, $Gy$ étant les bissectrices d'un angle dont les côtés joignent le barycentre commun d'un triangle et de son premier triangle de Brocard à deux points correspondants de ces triangles inversement semblables, les droites $Gx$, $Gy$ sont séparées harmoniquement par GR et GK, R et K désignant les points de Steiner et de Lemoine dans le triangle fondamental. Cela posé, rappelons la proposition suivante due à M. Cesáro : Si l'on projette en X, Y l'orthocentre H d'un triangle ABC sur les axes de Steiner, la droite XY passe par les points K et Q, Q désignant le complémentaire de R. (*Nouv. Ann.* 1887. Voir aussi l'article de MM. Neuberg et Gob : *Sur les axes de Steiner et l'hyperbole de Kiepert.* Ass. franç. 1889.) Les points X, Y, K, Q étant donc harmoniquement associés, il en est de même de leurs complémentaires. Or les complémentaires de X, Y sont les projections de O sur $Gx$, $Gy$, c'est-à-dire les milieux des cordes interceptées par la circonférence circonscrite sur $Gx$, $Gy$, et le complémentaire de Q est le milieu de RQ. Q étant le centre de l'hyperbole de Kiepert, la proposition est démontrée.

M.M. Sollertinsky et Dépréz ont résolu la même question sous l'énoncé rectifié.

---

### Question 996.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 240).

*Le nombre*

$$N = 1.2\,3\ldots(p-1)\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right\}$$

***n'est divisible par $p^2$ que si $p$ est un nombre premier supérieur à*** 3.

(G. Osborne.)

---

(*) A mentionner, p. 86, une solution de la question 1298, due à M. Barisien.

*Solution par* M. Emmerich. En posant $p = 2r + 1$, nous pouvons écrire

$$\frac{N}{(p-1)!} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2r}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2r-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1}\right)$$

$$= (2r+1)\left\{\frac{1}{1.2r} + \frac{1}{2(2r-1)} + \cdots + \frac{1}{i(2r-i+1)} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)}\right\},$$

ce qui montre que N est divisible par $p$ si $p$ est impair.

Le quotient de N par $p$ est une somme de termes de la forme

$$A_i = 1.2 \ldots (i-1)(i+1) \ldots (2r-i)(2r-i+2) \ldots 2r.$$

En supposant $p$ premier, on aura, d'après le théorème de **Wilson**,

$$A_i . i(2r-i+1) \equiv -1, \; mod\,(2r+1),$$

ce qui entraîne $$A_i . i^2 \equiv 1, \; mod\,(2r+1).$$

D'autre part, le théorème de Fermat donne

$$i^{2r} \equiv 1, \; mod\,(2r+1).$$

Les deux congruences combinées conduisent à

$$A_i \equiv i^{2r-2}, \; mod\,(2r+1),$$

donc

$$\frac{N}{p} = \sum_1^r A_i \equiv \sum_1^r i^{2r-2}, \; mod\,(2r+1).$$

Or, on peut démontrer que $\sum_1^r i^{2n}$ est divisible par $2r+1$ si $n$ est un nombre entier quelconque (Il faut exclure le cas $n = 0$, qui répondrait à la supposition $p = 3$). A cet effet, rappelons la formule connue

$$(2n+1)\sum_1^r i^{2n} = r^{2n+1} + \frac{1}{2} C_{2n+1,1} \cdot r^{2n} + B_1 C_{2n+1,3} \cdot r^{2n-1}$$

$$- B_2 C_{2n+1,4} \cdot r^{2n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} B_n C_{2n+1,2n} \cdot r,$$

où $B_1, B_2, B_3, \ldots$ désignent les nombres de Bernoulli.

Cette fonction entière de $r$ sera divisible par $2r+1$ si elle s'évanouit pour $r = -\frac{1}{2}$.

Or, le second membre de la formule, pour $r = -\frac{1}{2}$, devient

$$\frac{1}{2^{2n+1}}\left\{2n - 2^2 B_1 . C_{2n+1,2} + 2^4 B_2 . C_{2n+1,4} - \cdots + (-1)^n 2^{2n} B_n . C_{2n+1,2n}\right\},$$

et la parenthèse se réduit à zéro en vertu d'une propriété connue de la

théorie des nombres de Bernoulli (Voir p. e. le Supplément à *Mathesis*, février 1895 : *Sur les nombres de Bernoulli par M. Hermite*, où l'on trouve la relation

$$2^2B_1C_{2m-1,2}-2^4B_2C_{2m-1,4}+\cdots+(-1)^m2^{2m-2}B_{m-1}C_{2m-1,2m-2}=2^{m-2};$$

il suffit de remplacer dans cette égalité $n+1$ par $m$).

Supposons maintenant $p=2r$. On a

$$S=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2r-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2r-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{r-1}+\frac{1}{r+1}\right)+\frac{1}{r}$$

$$=2r\left\{\frac{1}{1(2r-1)}+\frac{1}{2(2r-2)}+\cdots+\frac{1}{(r-1)(r+1)}\right\}+\frac{1}{r},$$

$$(2r-1)!\,S=2r^2\Sigma A_i+\frac{(2r-1)!}{r}.$$

Si $r\lessgtr 5$ on peut affirmer que tous les $A_i$ sont pairs; car, dans ce cas, deux dénominateurs dans la parenthèse $\{\}$ au moins sont pairs. En supposant $r\lessgtr 5$ on aura donc

$$N=(2r)^2\times\text{nombre entier}+\frac{(2r-1)!}{r}.$$

N sera donc divisible ou non par $(2r)^2=p^2$ suivant que $(2r-1)!$ est divisible ou non par $4r^2$. Soit $r=6$. On a $11!=2^8.3^4.5^2.7.11$ et $4.6^2=2^6.3^2$. En effet; $11!\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{11}\right\}=12^2.837110$.

Pour $r=9$ on a $(2r-1)!=M.2^{15}3^6$ et $4r^2=2^23^2$.

Ainsi nous avons démontré 1° que le nombre N est toujours divisible par $p^2$, si $p$ est un nombre premier supérieur à 3; 2° que le nombre N peut encore être divisible par $p^2$, si $p$ est un nombre pair supérieur à 8.

M. Baschwitz (Berlin) avait également remarqué que la question 686 renfermait des restrictions inutiles.

---

## Question 1030.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 176 et 216.)

***Les plans osculateurs à une quartique gauche en ses points d'intersection avec un plan quelconque rencontrent de nouveau la quartique en quatre points situés dans un même plan.*** (A. Cazamian).

***Solution par*** M. E. Duporcq. Cette propriété n'est, au moins pour les ***biquadratiques gauches***, qu'un cas particulier du théorème suivant, que

j'ai obtenu dans une note intitulée : *Quelques propriétés des biquadratiques gauches*, publiée dans NAM, 1895, 266-270 :

*Soient* $a_1, a_2, a_3, a_4$ ; $b_1, b_2, b_3, b_4$ et $c_1, c_2, c_3, c_4$ *les points où une biquadratique gauche coupe trois plans* $P_a$, $P_b$, *et* $P_c$. *Les plans* $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, *définis respectivement par les triples* $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ *et* $a_4b_4c_4$, *coupent la courbe en quatre autres points* $d_1$, $d_2$, $d_3$ *et* $d_4$ *situés dans un même plan* $P_d$.

---

***Question 1085.**

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 215).

*Par le sommet* S *d'une strophoïde droite on mène deux sécantes rectangulaires, qui rencontrent la courbe en* A, B, A', B'. *Démontrer que la circonférence circonscrite au quadrilatère* ABA'B' *passe par deux points fixes.* (E. N. Barisien).

*Solution par* MM. Emmerich, Soons, Droz, Farny, Mandart, Colart et Deprez. Soient : O le point double, OY la perpendiculaire à SO, O'Z l'asymptote (OO' = SO), E et E' les points de rencontre des sécantes SA, SA' avec OY. On sait que EA = EB = EO, E'A' = E'B' = EO ; donc les triangles AOB, A'O'B' sont rectangles en O et les circonférences circonscrites touchent SO en O. Il résulte de là que $\overline{SO}^2 = SA.SB = SA'.SB'$ ; par conséquent les points A, B, A', B' sont sur une circonférence, qui est de puissance constante par rapport à S. Or, le centre T de cette circonférence est à la rencontre des perpendiculaires élevées aux milieux des cordes AB, A'B' ; la figure SETE' étant un rectangle, T appartient à l'asymptote O'Z. Il suffit maintenant d'appliquer un théorème connu ou d'observer que les points d'intersection U, U' de la circonférence ABB'A' avec SO' vérifient les égalités

$$SO^2 = SU.SU', \quad 2SO' = SU + SU'.$$

---

**Question 1090.**

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 240).

*Deux triangles* ABC, A'B'C' *sont inscrits dans une même circonférence,* 1° *Les droites de Simson de ces triangles relatives à un même point* P *quelconque de la circonférence se coupent sous un angle constant;* 2° *le lieu du point d'intersection de ces droites, lorsque* P *parcourt la circonférence, est une conique. Déterminer les éléments de cette courbe.* 3° *Dans quel cas cette conique dégénère-t-elle?* (Droz-Farny).

*Solution par* M. Quint (La Haye). Appelons O le centre et R le rayon de la circonférence ABC, H et H′ les orthocentres des triangles donnés, ω et ω′ les centres des cercles des neuf points, $p$ et $p'$ les droites de Simson du point P relatives aux deux triangles.

1° On sait que $p$ est perpendiculaire à l'isogonale de AP par rapport à l'angle BAC, et que $p'$ est perpendiculaire à l'isogonale de A′P par rapport à l'angle B′A′C′. Or, lorsque le point P décrit un arc PQ de la circonférence O, les droites AP, A′P tournent d'un même angle; donc leurs isogonales tournent de ce même angle dans le sens contraire et par suite leur angle reste invariable, et il en est de même de celui des droites $p$ et $p'$.

2° Soit M le point de concours des deux droites $p$, $p'$; celles-ci passent par les milieux N, N′ des distances HP, H′P. La distance NN′ étant égale à $\frac{1}{2}$ HH′ ou à ωω′ et l'angle NMN′ étant constant, la circonférence circonscrite au triangle NMN′ a un rayon constant $\rho$; soient L son centre, et L′ le centre d'une circonférence de même rayon $\rho$, construite sur la corde ωω′. La droite L′L sera constamment parallèle à ωN et par suite à OP et égale à $\frac{1}{2}$ OP. Comme les droites AP et NM tournent toujours avec des vitesses angulaires égales et de sens contraires, il en sera de même des rayons OP et PM, qui ont une vitesse angulaire double de celle des droites AP, NM. Il en résulte que la bissectrice de l'angle L′LM est parallèle à une direction fixe $\delta$. Si donc on prend sur la droite PM, dans les deux sens, les longueurs $LU = LU' = LL' = \frac{1}{2}R$, les droites L′U, L′U′ seront l'une parallèle à $\delta$ et l'autre perpendiculaire à $\delta$. Ces droites étant fixes, on a une droite UU′ de longueur constante R, qui se meut entre les droites rectangulaires L′U, L′U′; par conséquent, le point M de cette droite décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant les lignes L′U, L′U′ et ont pour longueurs $2\rho + R$, $2\rho - R$ (ou $R - 2\rho$).

3° Si les triangles ABC, A′B′C′ ont même orthocentre H, $p$ et $p'$ se coupent au milieu de HP et le lieu de M est le cercle des neuf points, commun aux deux triangles donnés.

Supposons les orthocentres H, H′ distincts. Le lieu de M devient l'une des droites L′U, L′U′ lorsque $2\rho = R$. ce qui exige d'abord : $\omega\omega' < 2\rho$, ou $HH' < 2R$; ensuite, l'angle des lignes $p$, $p'$ doit être égal à celui du segment de cercle décrit sur ωω′ comme corde avec le rayon R.

***Question 1227.**

(Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 176).

***Trouver tous les nombres qui soient le double du carré de la somme de leurs chiffres.*** (EMMERICH).

*Solution par* Mlle CECILE WENDT (stud. philosophiae, Vienne). Soient N le nombre cherché, $s$ la somme de ses chiffres; on doit avoir

$$N = 2s^2. \qquad (1)$$

On voit immédiatement qu'aucun des nombres 1, 2,... 9 ne satisfait à l'équation (1).

N ne peut avoir plus de 4 chiffres, car s'il avait 5 chiffres, on aurait $s \leqq 45$, $2s^2 \leqq 4050$, ce qui implique contradiction. A plus forte raison N ne peut avoir plus de 5 chiffres.

L'équation (1) indique que N est un nombre pair. Si nous supposons $N = M.3$, on aura aussi $s = M.3$, d'où $s^2 = M.9$, et par suite $N = M.9$; mais alors $s = M.9$, $s^2 = M.81$, d'où enfin $N = M.162$. L'hypothèse $N = M.3 + 1$ est impossible, car elle donnerait successivement $s = M.3 + 1$, $s^2 = M.3 + 1$, d'où $N = M.3 + 2$. On peut admettre l'hypothèse $N = M.3 + 2$.

Ainsi, les nombres qui résolvent la question ont l'une des deux formes $M.162$, $M.6 + 2$.

Cela posé, considérons les nombres de deux chiffres. Comme on a $N \geqq 10$ et $< 100$, on aura $\frac{N}{2}$ ou $s^2 \geqq 5$ et $< 50$, et $s = 3, 4, 5, 6, 7$. La condition $s = M.9$ ou $N = M.3 + 2$ ne fait retenir que les valeurs $s = 5, 7$. Le nombre $50 = 2.5^2$ satisfait seul au problème.

Passons aux nombres de trois chiffres. On a maintenant $N \geqq 100$ et $< 1000$, d'où $\frac{N}{2}$ ou $s^2 \geqq 50$ et $< 500$; par conséquent $s > 7$ et $< 23$. La condition $s = M.9$ ou $M.3 + 2$, exclut les valeurs de $s$ autres que 8, 9, 11, 14, 17, 18, 20. On trouve ensuite que les seules solutions sont $N = 162, 392, 648$.

Si l'on suppose $N \geqq 1000$ et $< 10000$, on a $\frac{N}{2}$ ou $s^2 \geqq 500$ et $< 5000$, $s \geqq 23$ et $< 70$. D'autre part, la somme des chiffres de N est au plus égale à 36. Par suite, les seules valeurs à examiner sont

$$s = 23, 26, 27, 29, 32, 33, 36.$$

Il n'y en a aucune qui convienne à l'équation $N = 2s^2$.

Solutions analogues par M.M. Angitinus (Vienne, Autriche) et Plakhowo.

*Solution par* M. Soons. 1° Si le nombre demandé a un seul chiffre $x$, l'équation du problème est $x = 2x^2$; elle admet les solutions $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$, dont la première est à rejeter.

2° Si le nombre est formé de deux chiffres $x, y$, on doit avoir

$$10y + x = 2(x + y)^2,$$

d'où, en posant $x + y = n$,

$$9y + n = 2n^2, \quad \text{ou} \quad y = \frac{n(2n-1)}{9}.$$

Les nombres $n$, $2n - 1$ étant premiers entre eux et $y \leqq 9$, on a la seule solution

$$2n - 1 = 9, \quad n = 5, \quad y = 5, \quad x = 0.$$

Le nombre 50 résout donc la question.

3° Supposons un nombre de trois chiffres $x, y, z$, dont la somme $= n$, nous aurons l'équation

$$100z + 10y + x = 2n^2,$$

ou

$$99z + 9y = 2n^2 - n,$$

ou

$$11z + y = \frac{n(2n-1)}{9}.$$

L'un des nombres $n$, $2n - 1$ doit être divisible par 9, et $n \leqq 27$, ce qui conduit aux hypothèses

$$n = 9, 18, 27, \quad \text{ou} \quad 2n - 1 = 9, 27, 45.$$

On en déduit

$$11z + y = 17, \quad 70, \quad 159, \quad 5, \quad 42, \quad 115.$$

Comme $y$ et $z$ ne dépassent pas 9, les nombres 159 et 115 sont écarter. En combinant les équations

$$z = \frac{17 - y}{11}, \quad \frac{70 - y}{11}, \quad \frac{5 - y}{11}, \quad \frac{42 - y}{11},$$

$$x + y + z = 9, \quad 18, \quad 5, \quad 14,$$

on trouve les solutions

$$y = 6, \quad 4, \quad 5, \quad 9;$$
$$z = 1, \quad 6, \quad 0, \quad 3;$$
$$x = 2, \quad 8, \quad 0, \quad 2.$$

D'où les nombres cherchés : 162, 648, 050, 392

4° Considérons un nombre de 4 chiffres $x, y, z, t$, et soit $n$ la somme de ces chiffres. Nous aurons l'équation

$$1000\,t + 100\,z + 10\,y + x = 2n^2,$$

ou

$$111\,t + 11\,z + y = \frac{n(2n-1)}{9}.$$

En observant qu'ici $n \leq 36$, et que $n^2 > \frac{1000}{2}$ ou $n > 22$, on n'a à examiner que les hypothèses

$$n = 27, \quad 36, \quad \text{ou} \quad 2n - 1 = 45, \quad 63.$$

Mais celles-ci ne donnent pas de solution.

5° On voit facilement qu'il n'y a pas de nombres de 5 chiffres qui satisfasse au problème; car la somme des chiffres doit être $\leq 45$ et $\geq \sqrt{\frac{10000}{2}}$.

---

## Question 1270.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 128).

***Chercher le lieu des points symétriques de ceux d'une chaînette par rapport aux pieds des normales à la courbe.*** (H. Brocard.)

*Solution par* M. J. Rose. Soit

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

l'équation de la chaînette. Les coordonnées $(\alpha, \beta)$ d'un point P du lieu cherché, qui correspond au point M$(x, y)$ de la chaînette, sont

$$\beta = -y = -\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \tag{1}$$

$$\alpha = x + 2yy' = x - \beta\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{2}$$

De l'équation (1), on déduit

$$e^{\frac{x}{a}} = -\frac{\beta}{a} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{a^2} - 1}, \quad e^{-\frac{x}{a}} = -\frac{\beta}{a} \mp \sqrt{\frac{\beta^2}{a^2} - 1};$$

par suite l'équation du lieu est

$$\alpha = al\left[-\frac{\beta}{a} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{a^2} - 1}\right] \mp 2\beta\sqrt{\frac{\beta^2}{a^2} - 1},$$

**Note.** La construction de la tangente en P résulte très simplement de la méthode des transversales réciproques, due à M. de Longchamps.

En un point M′ infiniment voisin de M sur la courbe donnée, menons la normale, qui coupe MP en ω et OX en N′; prolongeons M′N′ de N′P′ = M′N′. Si N est le pied de la première normale et qu'on prolonge NP de PR = ωM, N′P′ de P′R′ = ωM′, les droites MM′, PP′ sont des transversales réciproques du triangle ωRR′; par suite, elles rencontrent RR′ en des points U, V qui sont symétriques par rapport au milieu du côté RR′. En passant à la limite, on trouve la construction suivante :

*Portez sur* NP *la longueur* PR *égale au rayon de courbure de la courbe proposée en* M (*ici*, Mω = MN); *menez par* R *une parallèle à* Ox. *La tangente en* M *rencontre cette parallèle en un point* U; *le symétrique* V *de* U *par rapport à* R *appartient à la tangente cherchée.* (J. N.)

---

## Question 1273.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 152.)

*Soient* AA′A″..., BB′B″..., *deux génératrices opposées sur un cylindre circulaire droit*, ABA′B′A″B″... *un arc d'hélice;* (A), (A′).... (B), (B′)... *les plans perpendiculaires à l'axe passant par les points* A, A′,... B, B′,...

*On demande les perspectives de l'hélice sur les plans* (A′), (A″), ...., (B′), (B″), .... *selon que le point de vue est* 1° *en* A; 2° *au centre* O *de la base située dans le plan* (A). (H. Brocard).

*Solution par* M. G. Gérard (Liége). 1° Déterminons d'abord la perspective du tour de spire A′B′A″, A étant le point de vue et (A′) étant le tableau. (Le lecteur est prié de faire la figure).

Soit M un point entre A′ et B′; projetons M en N sur le plan (A′), et menons AM, A′N qui se coupent en P; P est un point du lieu. Prenons un axe polaire tangent en A′ au cylindre, et appelons ρ, ω les coordonnées de N; R le rayon du cylindre; K le rapport constant de la cote MN à l'arc horizontal A′N.

Nous aurons sur la figure

$$\frac{A'P}{PN} = \frac{AA'}{MN}, \quad \text{ou} \quad \frac{A'P}{A'N} = \frac{AA'}{AA' + MN};$$

en remplaçant les lignes par leurs valeurs, il vient

$$\frac{\rho}{2R\sin\omega} = \frac{2\pi RK}{2\pi RK + 2R\omega K}, \quad \text{ou} \quad \rho = 2\pi R\,\frac{\sin\omega}{\pi + \omega},$$

ou encore, en remplaçant $\pi + \omega$ par $\theta$, au signe près,

$$\rho = 2\pi R \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

C'est l'équation d'une *cochléoïde*. Il est aisé de voir que si, au lieu de considérer le premier plan (A') et la première spire A'B'A'', on avait pris le $m^{ième}$ plan ($A^{(m)}$) et la $n^{ième}$ spire au-delà ou en deçà de ce plan, on aurait eu

$$\frac{\rho}{2R\sin\omega} = \frac{2m\pi}{2m\pi + 2n\pi + 2\omega},$$

et, sans s'occuper des signes,

$$\rho = 2m\pi R \frac{\sin\omega}{(m+n)\pi + \omega} = 2m\pi R \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

On retrouve naturellement une cochléoïde, dont la grandeur dépend du plan choisi comme tableau, et dont l'origine ($\theta = 0$) se trouve toujours au point de rencontre de ce plan avec la tangente en A à l'hélice.

Si l'on fait la perspective de l'hélice sur les plans (B), on obtient une série de cochléoïdes dont l'orientation est la même, mais dont le paramètre est différent; c'est $2R(m - \frac{1}{2})\pi$.

2° Prenons maintenant O comme point de vue, et passons tout de suite au cas général. En reprenant la construction de tantôt, il vient

$$\frac{O'P}{PN} = \frac{OO'}{MN}, \quad \text{ou} \quad \frac{O'P}{O'N} = \frac{OO'}{OO' + MN};$$

c'est-à-dire

$$\frac{\rho}{R} = \frac{2m\pi}{2m\pi + 2n\pi + \omega}.$$

Posant $2(m+n)\pi + \omega = \vartheta$, on peut écrire

$$\rho\vartheta = 2m\pi R.$$

La courbe considérée est donc une *spirale hyperbolique*; l'asymptote rectiligne correspond au point A de l'hélice; le point asymptotique correspond au point à l'infini sur le cylindre donné.

Quant aux plans (B), ils fournissent une spirale hyperbolique

$$\rho\vartheta = 2R(m - \tfrac{1}{2})\pi,$$

où

$$\theta = 2[(m+n)\pi + \omega].$$

M. Soons a résolu la même question.

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**293.** A un même petit cercle de la sphère de rayon $r$, on circonscrit un polygone régulier de $n$ côtés et un polygone régulier de $2n$ côtés. Si $a$ et $x$ sont les côtés de ces polygones, la relation entre $a$, $x$ et $r$ s'obtient en éliminant $n$ entre les égalités.

$$\sin r = \operatorname{tg}\frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{n}, \quad \sin r = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x\cot\frac{\pi}{2n}.$$

(EMMERICH.)

**294.** Étant donné un triangle ABC, trouver un point D, tel que si l'on mène les droites DA', DB', DC' parallèles à trois droites données, et qu'on les limite respectivement à BC, CA, AB, on ait $DA' = DB' = DC'$.

Le lieu géométrique des points D tels que $DA' = DB'$, est une droite menée par C, etc.

**295.** On donne une droite AB et un point C sur cette ligne. Trouver sur la perpendiculaire élevée en C sur AB un point X tel que $AX = BX + BC$.

Equation du problème :

$$\sqrt{a^2+x^2} = b + \sqrt{b^2+x^2}; \; x = \frac{a}{2b}\sqrt{a^2-4b^2}.$$

**296.** Etant donnés deux points A et B, on élève en chaque point P de la droite indéfinie AB une perpendiculaire PM proportionnelle au rapport $\frac{AP}{PB}$; lieu du point M.

Axes coordonnés : AB et la perpendiculaire en A. Equation : $y = \frac{Kx}{x-a}$. Le lieu est une hyperbole équilatère. (E. N. BARISIEN.)

**297.** Si $\alpha, \beta, \gamma$ représentent les distances des sommets du triangle ABC au centre I du cercle inscrit, on a

$$\alpha^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\beta^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0.$$

La relation analogue pour le cercle exinscrit $I_a$ est

$$\alpha^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\beta^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)-\gamma^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

En conservant les mêmes notations pour un triangle sphérique on a

$$\cos\alpha\sin(b-c)+\cos\beta\sin(c-a)+\cos\gamma\sin(a-b)=0.$$

**998.** Si les angles A, B, C d'un triangle vérifient la relation

$$\sin A + \sin C = 2 \sin B,$$

on a aussi

$$\cot \tfrac{1}{2} A \cot \tfrac{1}{2} C = 3,$$

$$\cot \tfrac{1}{2} A + \cot \tfrac{1}{2} C = 2 \cot \tfrac{1}{2} B,$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} C = \sin \tfrac{1}{2} B.$$

**999.** Le côté AB d'un triangle ABC est fixe, et le côté AC de longueur constante tourne autour de A. Démontrer que le centre de gravité du triangle décrit une circonférence.

**1000.** Discuter les racines de l'équation

$$x^2 (a^2 - a + 1) + (a + 1) x + 1 = 0.$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1215.** Trouver une courbe telle que la distance du pied de l'ordonnée à la normale soit constante. (G. PETIT-BOIS.)

**1216.** Par les sommets d'un tétraèdre ABCD on mène quatre parallèles AA', BB', CC', DD' limitées aux faces opposées. Trouver un plan $\pi$ qui divise ces droites dans un même rapport.

Plus généralement, si les droites AA', BB', CC', DD' passent par un même point, la détermination du plan $\pi$ dépend d'une équation qui se rattache aux déterminants traités par M. Mansion dans ses *Éléments de la théorie des déterminants*, 6e édition, p. 28. (J. NEUBERG.)

**1217.** On donne un point fixe A, un cercle fixe C de rayon $a$, un cercle mobile C' de rayon $b$, roulant sur le premier. Soit DE le diamètre de C' passant par le centre C. On joint AD, AE, qui rencontrent le cercle C' en M, M'. Trouver le lieu des points M, M'.

Cas où le point A est rejeté à l'infini. (H. BROCARD.)

***1218.** Résoudre les équations

$$\frac{x^2 (y^2 + z^2 + 2yz \cos A)}{\sin^2 A} = \frac{y^2 (z^2 + x^2 + 2zx \cos B)}{\sin^2 B} = \frac{z^2 (x^2 + y^2 + 2xy \cos C)}{\sin^2 C},$$

où

$$A + B + C = \pi.$$

(E. LEMOINE).

## SECTIONS PLANES DU CYLINDRE ET DU CONE,

par M. Fr. Breithof, directeur des travaux graphiques à l'Université de Louvain.

Pour construire la ligne d'intersection de deux surfaces quelconques R et S, on coupe ces deux surfaces par une série de surfaces auxiliaires A dont on peut facilement construire l'intersection avec chacune des deux surfaces proposées. Chaque surface auxiliaire coupe la surface R suivant une ligne L et la surface S suivant une autre ligne M; les points de rencontre des lignes L et M appartiennent aux deux surfaces R et S, donc à leur ligne d'intersection commune.

Si les deux surfaces sont l'une un plan R, l'autre un cylindre S, on coupe le plan et le cylindre, supposés projetés sur deux plans perpendiculaires, par une série de plans auxiliaires parallèles aux génératrices du cylindre et à la trace horizontale du plan.

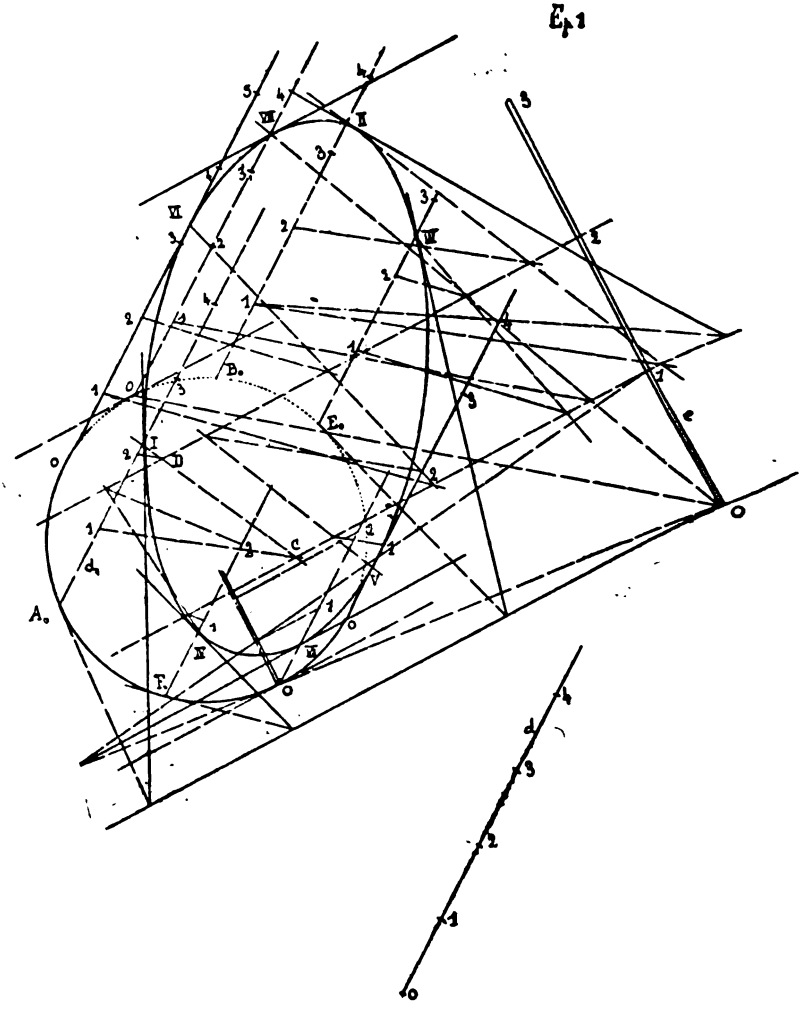
Si les deux surfaces R et S dont on cherche la ligne d'intersection sont, l'une un cône et l'autre un plan, les surfaces auxiliaires seront des plans parallèles à la trace horizontale du plan S et passant tous par le sommet du cône R; ces plans coupent le cône suivant une ou plusieurs génératrices et le plan suivant une droite parallèle à sa trace horizontale; les points de rencontre de la droite et des génératrices considérées appartiennent à la courbe de section plane.

Lorsqu'on se propose de traduire ces problèmes en épures, par la méthode des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires, on est conduit à des dessins longs et compliqués, dans lesquels les erreurs sont difficiles à éviter, à cause du grand nombre de lignes parallèles ou concourantes qu'exigent ces dessins; les mêmes erreurs sont à craindre par l'emploi de la méthode des projections cotées; elles peuvent même devenir plus considérables, par suite de la graduation que l'on est obligé de donner à un grand nombre de droites faisant partie du dessin.

Il est aisé cependant, en projections cotées, d'éviter, en partie, ces difficultés, en suivant, pour la solution du problème, une marche différente de celle qui vient d'être indiquée.

*Section plane du Cylindre.* Supposons un cylindre R, déterminé par sa directrice, une circonférence de cercle située dans le plan de projection, et par la direction de ses génératrices. Recherchons la courbe

d'intersection de ce cylindre avec un plan S représenté par son échelle de pente $e$ (épure 1).




Pour trouver le point de la courbe d'intersection situé sur la génératrice passant par le point $A_0$ de la base du cylindre, cherchons le point de rencontre de cette génératrice $d_1$ et du plan S.

On mène, à cet effet, par la droite $d_1$, un plan quelconque dont on

cherche la droite d'intersection avec le plan S; cette droite d'intersection rencontre la génératrice $d_1$ en un point commun à la droite et au plan et qui appartient à la courbe d'intersection cherchée.

Si, par le point 1 de $d_1$, on mène une droite de direction horizontale quelconque, celle-ci peut être considérée comme étant la direction d'une horizontale d'un plan quelconque mené par $d_1$; faisons la même opération au point 2 de $d_1$. Les droites que nous menons de la sorte rencontrent les horizontales de cotes 1 et 2 du plan S, aux points C et D qui, unis par une droite, déterminent l'intersection des plans considérés. Cette droite CD coupe la génératrice $d_1$ au point I appartenant à la courbe demandée.

Le même procédé donne les points de la courbe situés sur les génératrices passant par les points $B_0$, $E_0$, $F_0$ et marqués dans l'épure II, III et IV.

Remarquons que, pour trouver ces différents points, nous avons mené, par les génératrices sur lesquelles ils sont situés, des plans absolument quelconques; c'est un avantage de la méthode que nous exposons, car il permet, dans la majeure partie des cas, de trouver deux ou plusieurs points de l'intersection des plans auxiliaires et du plan donné, dans les limites imposées à l'épure.

*Points particuliers.* On peut chercher s'il existe des points de la courbe situés dans le plan de projection. Ces points se déterminent immédiatement en prolongeant la trace du plan S, horizontale de cote 0, de façon que celle-ci coupe ou touche la directrice du cylindre. Si cette directrice est coupée en deux points, ceux-ci appartiennent à la courbe et sont situés dans le plan de projection. Si la trace du plan sécant est tangente à la directrice du cylindre, le point de tangence appartient à la courbe qui est, dans ce cas, tangente au plan de projection.

Dans le cas de notre épure, la trace du plan ne coupe ni ne touche la directrice du cylindre; la courbe d'intersection est, par conséquent, située entièrement au dessus du plan de projection; tous ses points ont une cote positive.

*Points situés sur les génératrices du contour apparent.* Pour trouver les génératrices du contour apparent du cylindre, on mène, parallèlement à $d$, deux droites tangentes à la directrice du cylindre. Les point V et VI obtenus sur ces droites, sont les points de la courbe situés sur les génératrices du contour apparent.

*Mener la tangente en un point de la courbe de section plane.* Pour opérer un tracé convenable de la courbe de section plane, il est nécessaire de déterminer les tangentes aux points trouvés. — Recherchons, par exemple, la tangente à la courbe, au point I. Cette tangente n'est autre que la droite d'intersection du plan sécant et du plan tangent au cylindre au point I. Or, ce dernier plan est déterminé par la génératrice $d_1$ et par la tangente en $A_0$ à la base du cylindre, tangente qui nous fournit l'horizontale de cote 0, la trace du plan tangent. Si nous prolongeons cette trace jusqu'à la trace du plan sécant, nous obtenons un point de la droite d'intersection des deux plans considérés; cette droite sera déterminée complètement en joignant ce dernier point au point I de la courbe; c'est la tangente en I. Les tangentes en III et IV ont été obtenues par le même procédé.

Si la trace du plan tangent rencontrait la trace du plan sécant en dehors des limites assignées à l'épure, on pourrait évidemment chercher l'intersection des deux plans au moyen d'horizontales situées en dehors du plan de projection; tel est le cas pour la tangente au point II de la courbe; l'intersection des plans considérés a été obtenue ici en se servant des horizontales de cote 1.

*Construction de quelques tangentes particulières. Tangentes aux points situés sur le contour apparent du cylindre.* En construisant, d'après ce qui précède, les tangentes aux points V et VI, on voit que les plans tangents qui les contiennent, ont leurs traces, ainsi que toutes leurs horizontales, telles que leurs lignes de pente se confondent avec les lignes de pente des génératrices du contour apparent, car ces plans tangents sont perpendiculaires au plan de projection. Les projections des tangentes à la courbe, aux points V et VI, se confondent donc avec les projections des génératrices du contour apparent elles-mêmes. La courbe de section plane touche donc en V et VI les génératrices du contour apparent.

*Tangentes limites. Points limites.* Pour qu'une tangente soit tangente limite, il faut qu'elle soit parallèle au plan de projection. Comme le plan tangent qui la détermine par son intersection avec le plan sécant ne peut être horizontal, le cylindre étant incliné par rapport au plan de projection, il faut, pour qu'un plan tangent puisse contenir une tangente limite, que la direction des horizontales de ce plan soit parallèle

celle des horizontales du plan sécant. L'intersection d'un tel plan ngent avec le plan sécant, la tangente limite, est une horizontale ıralllèle aux horizontales des deux plans; son point de contact est un ɔint limite.

Les tangentes limites sont, dans le cas particulier d'un cylindre à ase circulaire, au nombre de deux et déterminent, sur la courbe, ı point le plus haut et le point le plus bas par rapport au plan de ɔrojection.

Pour opérer la construction graphique des tangentes limites, on mène ıu cylindre des plans tangents dont les horizontales sont parallèles aux ıorizontales du plan sécant. Pour cela, on mène parallèlement à la direc-ion de ces horizontales deux tangentes à la base du cylindre; ces tan-gentes et les génératrices passant par leurs points de contact déterminent les plans tangents. Les intersections de ces derniers plans avec le plan sécant, obtenues aisément grâce à l'emploi de l'échelle de pente des plans tangents fournissent les tangentes limites touchant la courbe aux points limites VII et VIII.

Le point limite VII et la tangente en ce point ont été obtenus par ce dernier procédé. Le point VIII a été trouvé par la méthode ordinaire; la tangente en ce dernier point a été menée, sans constructions auxiliaires, parallèlement à la trace du plan sécant.

La courbe d'intersection du cylindre et du plan s'obtiendra en joignant, les points par un trait continu, dans l'ordre I, VI, VIII, II, III, V, VIII, IV. (*A continuer.*)

---

## ˣNOTES MATHÉMATIQUES.

8. *Géométrie du triangle.* Sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC comme diamètres on décrit trois circonférences $\alpha, \beta, \gamma$. Désignons par $\rho, \rho'$ les rayons des deux cercles qui touchent, le premier intérieurement, le second extérieurement, les trois cercles $\alpha, \beta, \gamma$; par $\rho_1$ le rayon du cercle qui touche $\alpha$ extérieurement, $\beta$ et $\gamma$ intérieurement; par $\rho'_1$ le rayon du cercle qui touche $\alpha$ intérieurement, $\beta$ et $\gamma$ extérieurement, etc.

Soient $r$, $r_1$, $r_2$, $r_3$ les rayons des cercles tritangents, $p$ le demi-périmètre du triangle ABC, et $p_1$, $p_2$, $p_3$ les quantités $p - a$, $p - b$, $p - c$.

Les formules suivantes ont été publiées par W. RUTHERFORD, dans le *Mathematician* (*March*, 1846) :

$$\frac{1}{p-\rho}=\frac{2}{r}-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3},\quad \frac{1}{p-\rho'}=-\frac{2}{r}-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3},$$

$$\frac{1}{p_1-\rho_1}=\frac{2}{r_1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3},\quad \frac{1}{p_1+\rho_1}=-\frac{2}{r_1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3},$$

. . . . . .

Si l'on pose $2d=-r+r_1+r_2+r_3$, on a

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{p}+\frac{r}{2p(p-d-r)},\quad \frac{1}{\rho'}=\frac{1}{p}-\frac{r}{2p(p+d+r)},$$

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{p_1}+\frac{r_1}{2p_1(p_1+d-r_1)},\quad \frac{1}{\rho'_1}=-\frac{1}{p_1}+\frac{r_1}{2p_1(p_1-d+r_1)},$$

. . . . . .

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}=\frac{r}{p^2-(d+r)^2},\quad \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho'_1}=\frac{r}{p_1-(d+r_1)^2}\cdots\cdots$$

$$-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}=\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho'_1}+\frac{1}{\rho'_2}+\frac{1}{\rho'_3}.$$

Ces formules et quelques autres ont été reproduites dans les *Archives de Grunert*, t. VII, pp. 217-221, avec invitation adressée aux lecteurs d'en chercher une démonstration simple et élégante.

Ignorant si les formules de Rutherford ont déjà été vérifiées ou infirmées, nous insèrerons volontiers une solution du problème de calculer les rayons des huit cercles qui touchent les trois cercles $\alpha, \beta, \gamma$.

La formule générale du rayon du cercle touchant trois cercles donnés a été trouvée par M. C. W. Bauer; voir *J. de Schlömilch*, t. V, p. 365 (1860) ou NAM, 1860, p. 440. (LA RÉDACTION).

9. *Rectification d'un arc de cercle.* Soit ACB un arc de cercle moindre qu'une demi-circonférence. Menons la tangente AX, du même côté que l'arc ACB; puis traçons la bissectrice $AB_1$ de l'angle BAX, la bissectrice $AB_2$ de l'angle $B_1AX$, la bissectrice $AB_3$ de l'angle $B_2AX$, etc. Élevons en B sur AB une perpendiculaire, qui rencontre $AB_1$ en $B_1$, en $B_1$ sur $AB_1$ une perpendiculaire qui rencontre $AB_2$ en $B_2$, en $B_2$ sur $AB_2$ une perpendiculaire qui rencontre $AB_3$ en $B_3$, etc. Les droites AB, $AB_1$, $AB_2$, $AB_3$..., tendent vers une limite égale à l'arc ACB. Les triangles OAB, $OAB_1$, $OAB_2$, $OAB_3$..., O désignant le centre du cercle, ont pour limite l'aire du secteur OAB.

La démonstration résulte des égalités

$$\sin\alpha = 2^n \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}\sin\frac{\alpha}{2^n},$$

$$\alpha = \lim \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots}$$

(d'après SCHEFFLER, *Archives de Grunert*, t. XIII, 1849).

## BIBLIOGRAPHIE.

**Traité de géométrie descriptive et géométrie cotée**, par ERNEST LEBON, agrégé de l'Université, professeur de mathématiques au Lycée Charlemagne. Premier volume, à l'usage de la classe de mathématiques élémentaires. Troisième édition, entièrement refondue, 1901. Paris, Delalain (gr. in-8° de VI-280 pages, avec 286 épures dans le texte), prix 5 fr.

*Préface.* — La troisième édition du Premier Volume de notre *Traité de Géométrie descriptive* donne, — avec deux projections ou avec une projection horizontale accompagnée de cotes et de lignes de pente, — l'exposé de toutes les questions relatives à la droite, au plan, aux distances, aux angles, aux sections planes et intersections de polyèdres. Elle contient ainsi le développement complet des matières du Cours de la classe de Mathématiques élémentaires et des programmes des concours d'admission aux grandes écoles du Gouvernement. (La fin des Programmes pour les Écoles Polytechnique, Normale et Centrale est développée dans le Second Volume).

Cette troisième édition diffère de la seconde par une importante addition. En effet, à côté des épures obtenues par l'emploi de deux plans rectangulaires fixes, nous projetons, — en appliquant l'idée émise en 1882 par M. A. MANNHEIM, — un certain nombre de figures sur deux plans rectangulaires de position indéterminée; nous sommes ainsi amené à supprimer la ligne de terre quand elle est inutile ou quand, de cette suppression, il résulte des constructions plus simples ou plus générales.

Ce volume se termine par 186 problèmes gradués à résoudre, dont plusieurs sont numériques. Ils ont été composés ou choisis en vue de faire appliquer les principales questions théoriques.

TABLE DES MATIÈRES. *Géométrie descriptive.* Préface. 1. Définitions et conventions. 2. Le point. 3. La ligne droite. 4. Epure sans ligne de terre. 5. Le plan. 6. Douze problèmes sur la droite et le plan. 7. Intersection de plans. 8. Intersection d'une droite et d'un plan. 9. Droites perpendiculaires, droite et plan perpendiculaires. 10. Méthode de rotation. 11. Méthode de changement de plan de projection. 12. Méthode de rabattement. 13. Six applications du plan de profil. 14. Huit problèmes sur les distances. 15. Dix-huit problèmes sur les angles.

16. Résolution de l'angle trièdre. 17. Projections d'un polygone plan. 18. Représentation des polyèdres. Onze exemples. 19. Sections planes des polyèdres. 20. Intersection d'une droite et d'un polyèdre. 21. Intersection de deux polyèdres. 22. Ombres des polyèdres. 23. Projections d'une circonférence. 24. Projections d'une hélice.

*Géométrie cotée.* 1. Le point et la ligne droite. 2. Le plan. Théorèmes. 3. Les polyèdres. 4. Les surfaces courbes.

*Problèmes gradués à résoudre.* Géométrie descriptive : Épures proposées au Concours d'admission à l'Ecole Navale. Géométrie cotée : Épures proposées au Concours d'admission à l'Ecole Militaire de Saint-Cyr.

---

**Recueil d'exercices et de problèmes d'algèbre élémentaire par B. Lefèvre**, S. J. Seconde édition considérablement augmentée. Namur, Wesmael-Charlier, 1900 (IV-236 p, in-8°). Prix : fr. 2,50.

Nouvelle édition de l'excellent recueil que nous avons annoncé dans *Mathesis.* en 1898 (p. 113). Des additions ont été faites presque à chaque page du recueil et l'ont augmenté de 70 pages. L'auteur a consacré aux maxima et aux minima, aux questions d'intérêt composé et aux opérations viagères de nombreuses pages neuves. On trouve à la fin du volume un formulaire plus complet que celui de la première édition, sept nouvelles tables (inverses des 100 premiers nombres; logarithme du produit 1.2.3... $n$, de $n=1$ à $n=25$; $x^n$ pour $x$ et $n$ de 1 à 9; tables sommaires de mortalité; table pour le calcul des rentes viagères et des assurances; sinus, tangentes et arcs en fonction du rayon; table d'intérêts composés), enfin un abaque des intérêts composés.

Il n'existe pas que nous sachions un recueil d'exercices et de problèmes d'algèbre élémentaire que l'on puisse comparer à celui du P. Lefebvre.

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

### ˣQuestion 1264.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 80.)

*Les symétriques des côtés* AB, BC, CA *d'un triangle respectivement par rapport aux côtés* BC, CA, AB *forment un nouveau triangle* A'B'C'. *Si* R, R' *désignent les rayons des cercles circonscrits aux deux triangles* ABC, A'B'C', *démontrer que*

$$\frac{R'}{R}=\frac{\sin A\sin B\sin C+\sin 2A\sin 2B\sin 2C}{\sin A'\sin B'\sin C'}.$$

---

(*) M. Servais nous a fait remarquer, à propos de la question 1030 (p. 103) que les théorèmes de MM. Cazamian et Duporcq sont établis géométriquement, p. 46 de l'ouvrage de Schroeter, *Die Raumkurve vierter Ordnung erster Species.*

***Les triangles*** ABC, A'B'C' ***ne sont homologiques que lorsqu'ils sont équilatéraux.*** (J. Neuberg).

*Solution par* M. Emmerich. Soit $a \geq b \geq c$, et posons $2C - B = \alpha$, $2A - C = \beta$, $2B - A = \gamma$. On a toujours $\beta > 0$, $\alpha < \pi$, $\gamma < \pi$; mais il peut arriver que $\alpha = 0$ ou $\gamma = 0$ ou $\beta = \pi$. Si une de ces éventualités a lieu, un des sommets du triangle A'B'C' se perd à l'infini. A cause de $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, deux des suppositions $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = \pi$ entraînent la troisième; dans ce cas, AB', BC', CA' sont parallèles et $A = \frac{4}{7}\pi$, $B = \frac{2}{7}\pi$, $C = \frac{1}{7}\pi$. En excluant ces cas, on a pour les angles A', B', C' le tableau suivant :

| | | A' | B' | C' |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha > 0, \gamma > 0$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
| 2 | $\alpha > 0, \gamma < 0, \beta > \pi$ | $\alpha$ | $\beta - \pi$ | $\gamma + \pi$ |
| 3 | $\alpha > 0, \gamma < 0, \beta > \pi$ | $-\alpha + \pi$ | $-\beta + \pi$ | $-\gamma$ |
| 4 | $\alpha < 0, \gamma > 0, \beta > \pi$ | $\alpha + \pi$ | $\beta - \pi$ | $\gamma$ |
| 5 | $\alpha < 0, \gamma < 0, \beta < \pi$ | $-\alpha$ | $-\beta + \pi$ | $-\gamma + \pi$ |
| 6 | $\alpha < 0, \gamma < 0$ | $-\alpha$ | $-\beta + 2\pi$ | $-\gamma$ |

Dans les cas 1, 2, 5, 6 on a $B'C' = AB' + AC'$; les cas 3 et 4 donnent respectivement : $B'C' = AC' - AB'$, $B'C' = AB' - AC'$, On a toujours

$$\frac{AB'}{b} = \frac{\sin C}{\sin B'}, \quad \frac{AC'}{c} = \frac{\sin 2B}{\sin C'};$$

$$AB' = 2R \sin B \sin C : \sin B', \quad AC' = 2R \sin 2B \sin C : \sin C',$$

$$B'C' = 2R' \sin A'.$$

En ayant égard aux différentes hypothèses on trouve

$$\pm \frac{R'}{R} = \frac{\sin B \sin C \sin \gamma + \sin 2B \sin C \sin \beta}{\sin A' \sin B' \sin C'},$$

où le signe + convient aux cas 1, 3, 4, 5, le signe — aux autres. Le numérateur a pour expression

$$\sin B \sin C [\sin A + 2 \cos B \sin (B - A)] + \sin 2B \sin C [2 \cos C \sin 2A - \sin (B - A)] = \sin A \sin B \sin C + \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

Ce résultat nous apprend que $R' = 0$ si $1 + 8 \cos A \cos B \cos C = 0$. Si la distance de l'orthocentre H du triangle ABC au centre O du cercle circonscrit égale $R\sqrt{2}$, les droites AB', BC', CA' concourent en un

point. Dans les cas 2 et 6, on doit avoir $1+8\cos A\cos B\cos C<0$, ce qui se vérifie à l'aide de la relation

$$1+8\cos A\cos B\cos C=\frac{\sin\alpha+2\cos C\sin\gamma}{\sin B};$$

au cas 2) on a $\sin\alpha>0$, $\sin\gamma<0$, $\alpha+\gamma<0$, $2\cos C>1$, puisque $C<60^\circ$.

Les équations de B'C', C'A', A'B' étant

$$y+2z\cos A=0,\quad z+2x\cos B=0,\quad x+2y\cos C=0,$$

on a pour les coordonnées de A' : $-2\cos C$, 1, $4\cos B\cos C$. Les équations de AA', BB', CC' seront alors

$$z=4y\cos B\cos C,\quad x=4z\cos C\cos A,\quad y=4x\cos A\cos B.$$

L'homologie des triangles ABC, A'B'C' exige donc que

$$(8\cos A\cos B\cos C)^2=1;$$

le cas $8\cos A\cos B\cos C+1=0$ étant déjà élucidé, on a

$$1-8\cos A\cos B\cos C=0=[2\cos A-\cos(B-C)]^2+\sin^2(B-C),$$

ce qui exige $A=B=C$. D'ailleurs on trouve $HO=0$.

MM. Déprez et Droz Farny ont résolu la même question. Si l'on pose $HO=D$ la formule donnée prend la forme

$$\frac{RR'}{D^2}=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A'\sin B'\sin C'}.$$

Il résulte de l'analyse de M. Emmerich que la finale de la question 1264 doit être :

Les triangles ABC, A'B'C' ne sont homologiques que lorsque ABC est équilatéral ou que ses angles sont égaux à $\frac{4}{7}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{1}{7}\pi$, ou que l'on a $D^2=2R^2$.

(J. N.).

---

## Question 1293.

(Voir *Mathesis*, (2), t. X, p. 264.)

*Soient* A *un point quelconque d'une ellipse*, B *et* C *les pieds des deux autres normales abaissées du centre de courbure relatif à* A, D *un des points de l'ellipse, conjugués de* A. *Montrer que la distance du centre de l'ellipse à la normale en* D *est dans un rapport constant avec la distance du point* A *à la droite* BC. (E. N. Barisien.)

*Solution par* MM. G. Gérard et Droz Farny. On sait que si les normales en A, A', B, C à l'ellipse concourent en un même point N, la

droite BC passe par les projections sur les axes du symétrique du pôle de AA′ par rapport au centre O de la courbe (Voir *Mathesis*, (2), VIII, 1898, p. 228). Si les points A et A′ viennent à coïncider en A, le pôle de AA′ arrive en A également, et *la corde* BC *joint les projections sur les axes du point diamétralement opposé à* A.

Cela étant, soient OE et AF les deux distances indiquées dans l'énoncé; désignons par $x$, $y$ et $x'$, $y'$ les coordonnées de A et D, par $\theta$ et $\theta'$ les angles que font les diamètres conjugués OA et OD avec le grand axe de l'ellipse.

Puisque la tangente en D est parallèle à OA, la distance OE se mesurera sur OA, et elle aura pour valeur absolue

$$OE = OD \cos AOD = OD \cos(\theta' - \theta).$$

D'un autre côté, si G est le point de rencontre de BC avec le diamètre OA, il est visible que

$$AF = AG \sin AGB,$$

ou

$$AF = \frac{3}{2} OA \sin 2\theta.$$

Par conséquent,

$$\frac{OE}{AF} = \frac{OD \cos(\theta' - \theta)}{\frac{3}{2} OA \sin 2\theta} = \frac{OD(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta')}{3\,OA \sin\theta\cos\theta}.$$

Multipliant les deux termes de cette fraction par OA, il vient

$$\frac{OE}{AF} = \frac{xx' - yy'}{3xy};$$

or, puisque les diamètres OA et OD sont conjugués, il existe entre les coordonnées de A et D les relations bien connues

$$x' = \pm\frac{a}{b}y, \quad y' = \mp\frac{b}{a}x.$$

Il résulte de là que

$$xx' - yy' = \pm\left(x\frac{a}{b}y - y\frac{b}{a}x\right) = \pm xy\frac{a^2 - b^2}{ab}.$$

Finalement

$$\frac{OE}{OF} = \pm\frac{a^2 - b^2}{3ab} = \text{const.}$$

## ×Question 1295.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 264).

*Résoudre par des formules sans dénominateurs les équations*

$$\frac{y}{x-1}=\frac{b-b'}{a-a'}=\frac{a+a'}{b+b'}=\frac{x+1}{y} \qquad (a)$$

*où l'on a*

$$a^2-b^2=a'^2-b'^2=1. \qquad (b)$$

(G. Fontené.)

*Solution par* M. E. Pire, *étudiant à l'École des arts et manufactures* (Gand). En considérant le système

$$(a-a')y=(b-b')(x-1),$$
$$(a+a')y=(b+b')(x+1),$$

on trouve

$$x=\frac{ab-a'b'}{ba'-ab'},\quad y=\frac{b^2-b'^2}{ba'-ab'}.$$

Pour mettre la valeur de $x$ sous forme entière, écrivons

$$x=\frac{ab(a'^2-b'^2)-a'b'(a^2-b^2)}{ba'-ab'},$$

ce qui donne, après réduction,

$$x=aa'+bb'.$$

Pour transformer la valeur de $y$, remarquons que les formules $(b)$ donnent :

$$a^2-1=b^2,\quad b'^2=a'^2-1;$$

d'où

$$(a^2-1)b'^2=(a'^2-1)b^2,\quad \text{ou}\quad b^2-b'^2=b^2a'^2-a^2b'^2.$$

Donc

$$y=\frac{b^2-b'^2}{ba'-ab'}=\frac{b^2a'^2-a^2b'^2}{ba'-ab'}=ba'+ab'.$$

*Autrement.* Si nous comparons la relation trigonométrique.

$$\text{séc}^2\,\alpha=1+\text{tg}^2\,\alpha$$

aux relations de condition

$$a^2=1+b^2,\quad a'^2=1+b'^2.$$

nous voyons que l'on peut poser

$$a=\text{séc}\,\alpha,\quad b=\text{tg}\,\alpha,\quad a'=\text{séc}\,\beta,\quad b'=\text{tg}\,\beta,$$

les valeurs de $x$ et $y$ deviennent alors successivement

$$x = \frac{\text{séc}\,\alpha\,\text{tg}\,\alpha - \text{séc}\,\beta\,\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha\,\text{séc}\,\beta - \text{tg}\,\beta\,\text{séc}\,\alpha} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos^2\beta}}{\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos^2\beta - \sin\beta\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha - \sin\beta)} = \frac{1 + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= \text{séc}\,\alpha\,\text{séc}\,\beta + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta = aa' + bb'$$

$$y = \frac{\text{tg}^2\alpha - \text{tg}^2\beta}{\text{tg}\,\alpha\,\text{séc}\,\beta - \text{tg}\,\beta\,\text{séc}\,\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha - \sin\beta)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \text{tg}\,\alpha\,\text{séc}\,\beta + \text{séc}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta = ba' + ab'.$$

*Solution par M.* Soons. Si l'on combine le premier des rapports (a) successivement avec le deuxième et avec le troisième, on trouve

$$(a - a')y - (b - b')x + b - b' = 0, \qquad (1)$$
$$(b + b')y - (a + a')x + a + a' = 0. \qquad (1')$$

De même, en combinant le quatrième rapport (a) successivement avec le deuxième et avec le troisième, on obtient

$$(b - b')y - (a - a')x - (a - a') = 0, \qquad (2)$$
$$(a + a')y - (b + b')x - (b - b') = 0. \qquad (2')$$

Combinant par addition (1) avec (2') et (1') avec (2), on a

$$ay - bx - b' = 0, \quad by - ax + a' = 0. \qquad (3)$$

Le système (3) donne

$$x = \frac{bb' + aa'}{a^2 - b^2} = aa' + bb', \quad y = \frac{ab' + ba'}{a^2 - b^2} = ab' + a'b.$$

*Solution par* M. Emmerich. En combinant convenablement les numérateurs et les dénominateurs, on trouve

$$\frac{x+y+1}{x+y-1} = \frac{a+b+a'-b'}{a+b-a'+b'}, \quad \frac{x-y+1}{-x+y+1} = \frac{a-b+a'+b'}{-a+b+a'+b'},$$

de ces équations, on déduit $x+y$ et $x-y$ :

$$x+y=\frac{a+b}{a'-b'}=(a+b)(a'+b'),$$

$$x-y=\frac{a-b}{a'+b'}=(a-b)(a'-b').$$

Enfin, les deux dernières égalités donnent par addition et par soustraction

$$x=aa'+bb',\quad y=ab'+a'b.$$

NOTES. *Autres solutions par* MM. BOUTIN, BARISIEN et un ANONYME.

1. M. BARISIEN fait la remarque suivante : L'égalité du premier et du quatrième des rapports $(a)$ donne $x^2-y^2=1$; par conséquent, les trois points $(a, b)$, $(a', b')$, $(aa'+bb', ba'+a'b)$ sont situés sur une hyperbole équilatère.

2. Les formules données appartiennent, au fond, à la théorie des fonctions hyperboliques. On peut évidemment poser $a=\mathrm{Ch}2p$, $a'=\mathrm{Ch}2q$, $x=\mathrm{Ch}2r$ et alors on a $b=\mathrm{Sh}2p$, $b'=\mathrm{Sh}2q$, $y=\mathrm{Sh}2r$, puis successivement

$$\frac{\mathrm{Sh}2r}{\mathrm{Ch}2r-1}=\frac{\mathrm{Sh}2p-\mathrm{Sh}2q}{\mathrm{Ch}2p-\mathrm{Ch}2q},$$

$$\frac{2\mathrm{Sh}r\mathrm{Ch}r}{2\mathrm{Ch}^2r}=\frac{2\mathrm{Sh}(p-q)\,\mathrm{Ch}(p+q)}{2\mathrm{Sh}(p-q)\,\mathrm{Sh}(p+q)}\quad\text{ou}\quad \mathrm{Coth}r=\mathrm{Coth}(p+q),$$

$$r=p+q,\quad 2r=2p+2q,$$

$$x=\mathrm{Ch}2r=\mathrm{Ch}(2p+2q)=\mathrm{Ch}2p\mathrm{Ch}2q+\mathrm{Sh}2p\mathrm{Sh}2q=aa'+bb',$$

$$y=\mathrm{Sh}2r=\mathrm{Sh}(2p+2q)=\mathrm{Sh}2p\mathrm{Ch}2q+\mathrm{Sh}2q\mathrm{Ch}2p=a'b+ab'.$$

Ceci ne diffère pas essentiellement de la seconde solution de M. PIRE (voir notre *Précis de la théorie des fonctions hyperboliques*, remarque finale). (P. M.)

---

## Question 1291 ou 1301.

(Voir *Mathesis*, (2), X, 240; (3), I, 40).

*Démontrer que si les aires du cercle osculateur et de la conique osculatrice, en un point quelconque d'une courbe, sont mesurées par un même nombre, celui-ci est proportionnel au cube de l'arc.* (E. CESÀRO).

*Solution par* MM. VERHEUGEN (Gand) et G. GÉRARD (Liége). Dans la *Géométrie intrinsèque* de M. E. CESÀRO, on trouve (p. 59) la formule suivante :

$$ab=\frac{27\rho^3}{[9\rho^2+4\rho_1^2-3\rho\rho_2]^{\frac{3}{2}}},\qquad (1)$$

où $a$ et $b$ sont les axes de l'ellipse osculatrice en un point d'une courbe, $\rho$ le rayon de courbure en ce point, $\rho_1$ le rayon de courbure au point correspondant de la première développée, $\rho_2$ celui de la seconde développée.

Dans la question qui nous occupe, on suppose

$$ab = \rho^2.$$

Donc (1) devient

$$\rho^2 = \frac{27\rho^5}{[9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2]^{\frac{5}{2}}}$$

ou successivement

$$[9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2]^{\frac{5}{2}} = 27\rho^5$$

$$9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2 = [27\rho^5]^{\frac{2}{5}} = 9\rho^2$$

$$4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2 = 0. \qquad (2)$$

Soient $ds$, $ds_1$, $ds_2$ respectivement les différentielles des arcs de la courbe, de la première et de la seconde développée. La différentielle, $d\alpha$, de l'angle de deux tangentes étant le même pour les trois courbes, on a

$$d\rho = ds_1, \quad d\rho_1 = ds_2;$$

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}, \quad \rho_1 = \frac{ds_1}{d\alpha}, \quad \rho_2 = \frac{ds_2}{d\alpha};$$

d'où

$$\rho_1 = \frac{\rho d\rho}{ds}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_1 d\rho_1}{d\rho}.$$

Remplaçons cette valeur de $\rho_2$ dans (2), elle devient :

$$4\rho_1^2 - 3\rho\rho_1 \frac{d\rho_1}{d\rho} = 0,$$

ou

$$4\rho_1 d\rho = 3\rho d\rho_1;$$

en intégrant, il vient, A étant une constante,

$$\tfrac{4}{3}\log\rho = \tfrac{4}{3}\log A\rho_1,$$

ou, C étant une autre constante,

$$\rho^{\frac{4}{3}} = C\rho_1.$$

Or, on a vu plus haut que $\rho_1 = \frac{\rho d\rho}{ds}$. Donc

$$\rho^{\frac{4}{3}} = \frac{C\rho d\rho}{ds}, \quad ds = C\rho^{-\frac{4}{3}} d\rho.$$

en intégrant,

$$s - s_0 = \frac{3}{2} C\rho^{\frac{2}{3}}.$$

Finalement, K étant une constante,

$$(s - s_0)^5 = K\rho^2,$$

c'est-à-dire la relation annoncée.

NOTE. M. Gérard fait les deux remarques suivantes : 1° la formule de M. Cesáro se trouve aussi NAM, 1890, p. 143. 2° Comme $\rho d^2 = a^2 b^2$, $d$ étant la distance du centre de la conique à la tangente au point de contact avec la courbe, on a $\rho = d$. Donc *le contact a constamment lieu au point de Fagnano de la conique* (*Mathesis*, 1900, (2), X, 105-109).

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1319.** Construire un triangle ABC, connaissant la somme $b + c$ et les longueurs des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A.

×**1320.** De l'équation $a \sin x + b \sin y + c \sin z = 0$, déduire

$$p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y) + p_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z-x) - p_2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y-z) - p_3 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y-z) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z-x) = 0,$$

où l'on a posé

$$a+b+c = 2p, \quad -a+b+c = 2p_1, \quad a+b+c = 2p_2, \quad a+b+c = 2p_3$$

(GRUNERT.)

**1321.** Le lieu des sommets des triangles équilatéraux qui ont pour bases les divers rayons de courbure d'une ellipse, se compose de deux courbes d'aire équivalente à celle de l'ellipse. (E. N. BARISIEN.)

×**1322.** Etant données trois droites OX, OY, OZ issues d'un même point O, et trois autres droites O'X', O'Y', O'Z' issues d'un même point O', on demande de faire tourner le faisceau O'(X'Y'Z'), de manière que les points d'intersection de O'X' avec OX, de O'Y' avec OY et de O'Z' avec OZ deviennent les sommets d'un triangle ABC semblable à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$.

## THÉORÈME SUR LES CUBIQUES ;

par M. Stuyvaert, à Gand.

1. L'équation d'une cubique plane rapportée au triangle formé par trois tangentes d'inflexion est

$$(ax + by + cz)^3 = kxyz.$$

Si le triangle de référence est réel, on sait que la courbe est non singulière ou possède un point isolé.

La droite $ax + by + cz = 0$ joint les points d'inflexion $I_a$, $I_b$, $I_c$, situés respectivement sur les côtés BC, CA, AB du triangle de référence.

Si l'on joint le point $I_a$ successivement à A, C, $I_b$ et à un point $M(x, y, z)$ de la courbe, et si ce dernier rayon coupe AC en $N(x', 0, z')$, on a

$$\frac{x'}{\mu x} = \frac{0}{\mu y + \nu c} = \frac{z'}{\mu z - \nu b},$$

d'où

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{c}{y}$$

et par suite

$$\frac{x'}{z'} = \frac{cx}{cz + by}.$$

D'autre part, les coordonnées $x$, $z$ de $I_b$ sont proportionnelles à $c$ et $-a$; on aura donc

$$(CI_bAN) = \frac{0 - \infty}{-\frac{c}{a} - \infty} : \frac{0 - \frac{cx}{cz + by}}{-\frac{c}{a} - \frac{cx}{cz + by}} = \frac{ax + by + cz}{ax}.$$

Appelons $h_a$, $h_b$, $h_c$ les rapports anharmoniques des faisceaux des quatre droites suivantes, menées respectivement des trois points d'inflexion $I_a$, $I_b$, $I_c$ : 1° la tangente au point considéré, 2° la droite joignant les trois points d'inflexion, 3° la droite menée au point de rencontre des deux autres tangentes d'inflexion, 4° le rayon mené à un point quelconque de la courbe. Dès lors, l'égalité précédente donne, pour le produit de ces trois rapports anharmoniques,

$$h_a h_b h_c = \frac{(ax + by + cz)^3}{abcxyz},$$

ou, à cause de l'équation de la courbe,

$$h_a h_b h_c = \frac{k}{abc}.$$

**2.** Si la courbe considérée est singulière, le point isolé $(x_1, y_1, z_1)$ se trouve sur les coniques

$$3a\,(ax_1 + by_1 + cz_1)^2 = ky_1z_1,$$
$$3b\,(ax_1 + by_1 + cz_1)^2 = kz_1x_1,$$
$$3c\,(ax_1 + by_1 + cz_1)^2 = kx_1y_1,$$

et aussi sur la courbe donnée ; d'où, par un calcul facile,

$$27\,abc = k.$$

Dans ce cas, on a donc

$$h_a h_b h_c = 27.$$

Si, à présent, le point M considéré plus haut est le point singulier $(x_1, y_1, z_1)$, on a

$$h_a = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{ax_1}$$

et deux valeurs analogues pour $h_b$ et $h_c$ ; mais les équations des coniques ci-dessus font voir que l'on a $ax_1 = by_1 = cz_1$ ; donc

$$h_a = h_b = h_c = 3,$$

résultat qui conduit à des propriétés connues et qu'on peut d'ailleurs établir par d'autres méthodes.

**3.** Corrélativement, si l'on a une quartique plane tricuspidale, les tangentes aux points de rebroussement A, B, C se coupent en un point O, rencontrent respectivement les côtés opposés du triangle ABC en des points P, Q, R et coupent une tangente quelconque de la courbe en X, Y, Z ; alors on a

$$(\mathrm{AOPX}) \times (\mathrm{BOQY}) \times (\mathrm{CORZ}) = \text{constante}.$$

Cette constante est égale à 27 quand la courbe a une tangente double, et si XYZ est cette tangente double, chacun des rapports précédents vaut 3.

Si la courbe est tangente à la droite de l'infini, en appelant celle-ci XYZ, on trouve

$$\mathrm{AP} \times \mathrm{BQ} \times \mathrm{CR} = 27\ \mathrm{OP} \times \mathrm{OQ} \times \mathrm{OR};$$

on en déduit facilement que le produit des distances du point O aux trois côtés du triangle ABC vaut le $\frac{1}{27}$ du produit des hauteurs de ce triangle.

4. La trace, sur un plan, de la développable osculatrice à une cubique gauche est une quartique de troisième classe, ayant trois rebroussements aux points de rencontre A, B, C de la cubique gauche avec le plan; le point de rencontre O des tangentes en A, B, C à cette quartique est le pôle du plan ABC dans le système focal défini par la cubique gauche, ou c'est le point commun aux trois plans osculateurs en A, B, C. La tangente double de la quartique est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche.

Cela étant, les théorèmes correspondant, pour les cubiques gauches, aux relations du n° 3 ci-dessus s'énoncent très aisément.

Voici un exemple : dans toute parabole gauche, le pôle du plan de trois points A, B, C de la courbe est distant des côtés du triangle ABC de trois longueurs dont le produit est $\frac{1}{27}$ du produit des hauteurs de ce triangle.

---

## SUR LE POINT DU CERCLE CIRCONSCRIT DONT LES COORDONNÉES NORMALES SONT $\frac{a}{b^2 - c^2}$, ETC.;

par M. E. Lemoine.

M. Neuberg rencontre ce point à la fin d'une note qui termine une solution donnée par M. Déprez de la question 1160 (*Mathesis*, 1901, p. 78) et il ajoute : Ce point jouit-il de propriétés remarquables ?

On rencontre ce point très fréquemment dans la géométrie du triangle, mais je ne crois pas qu'il en ait été fait d'étude particulière; on le notait en passant, voilà tout. Cependant il a une certaine *importance*, il jouit de fort nombreuses propriétés; en voici quelques unes qui la mettent en lumière.

Soit M un point du cercle circonscrit; si l'on joint M à un sommet, les bissectrices des angles que fait cette droite avec le côté opposé ont une même direction, quel que soit le sommet considéré. Nous disons pour abréger que M est le point correspondant à ces directions.

Si, à l'aide des formules données (*Mathesis*, p. 50, 1901), on cherche le point correspondant aux axes de diverses coniques remarquables du triangle, on en trouve un grand nombre qui ont le point $\frac{a}{b^2 - c^2}$, ... pour point M correspondant à la direction de leurs axes.

Par exemple :

1° La conique $\Sigma\sqrt{x\cos A}=0$, qui a pour centre le point de Lemoine K et touche les côtés aux pieds des hauteurs.

2° Les ellipses de Cesáro qui ont pour centre le point de Lemoine et sont le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux trois côtés est constante.

3° La conique $\Sigma yz\cos A=0$ qui a pour centre K et touche en A, B, C les conjuguées harmoniques des droites AO, BO, CO par rapport aux angles BAC, CBA, ACB (O est le centre du cercle ABC).

4° La conique qui passe par les milieux des côtés du triangle ABC et par les pieds des symédianes.

5° La conique qui passe par les six points de rencontre des côtés du triangle de référence avec les parallèles aux côtés menées par le centre du cercle ABC.

Voici quelques propriétés de ce point M :

1° Si la droite de Lemoine coupe les côtés en A', B', C', les circonférences AB'C', BC'A', CA'B' passent en M.

2° Il résulte de là que M est le foyer de la parabole de Neuberg, qui est inscrite au triangle ABC et touche la droite de Lemoine (équation : $\Sigma\sqrt{a(b^2-c^2)x}=0$).

3° M est le point inverse du réciproque du point de Steiner.

4° La droite qui joint le point de Tarry au barycentre recoupe le cercle circonscrit en M.

5° Si aux points où la droite d'Euler OH coupe BC, CA, AB on élève des perpendiculaires sur ces côtés, on forme un triangle homologique avec ABC; M est le centre d'homologie de ces deux triangles.

6° On a

$$AM=\frac{(b^2-c^2)R}{a.OH}.$$

7° Le carré de la distance de M au point de Steiner a pour expression

$$\frac{(b^2-c^2)^2\,(c^2-a^2)^2\,(a^2-b^2)^2}{4S^2.\overline{OH}^2.[(p^2-3r)^2-12S^2]}.$$

## SUR LES BISSECTRICES D'UN TRIANGLE.

par M. C. E. Wasteels (Gand).

Dans le n° de *Mathesis* de mars dernier, nous avons exposé quelques théorèmes de la géométrie générale : nous avons démontré (p. 67, n° 3) que, *dans tout triangle, à un plus grand angle (ou, ce qui revient au même, à un plus grand côté) correspond une plus petite bissectrice.*

Dans cette note nous donnons, d'après M. L. Gérard(*), une généralisation de ce dernier théorème, en supposant que BB′ et CC′ se coupent à l'intérieur du triangle ABC en un point *quelconque* I de la bissectrice de l'angle A (Voir fig. 1, p. 66 et fig. 2, p. 67).

Si l'on a

$$AB > AC,$$

on aura aussi

$$BB' > CC'.$$

En effet, si IB > IC, la démonstration du n° 3 est encore applicable.

« Si IB = IC, on a

$$\textit{angle}\ BCD = IBC = BCI \quad \text{et} \quad \textit{angle}\ CBD = ACB > ABC;$$

donc, C′ est sur CD entre C et D ; donc CC′ < CD ou CC′ < BB′.

Si IB < IC (fig. 2), l'angle ICB est plus petit que IBC ou BCD, et comme CBC′ < BCB′ ou CBD, le point C′ est *à l'intérieur du triangle* CBD. D'autre part, $IB_1 = IB < IC$, et comme le point C est entre B′ et $B_1$ et que l'*angle* IAC *est aigu*, il résulte de la théorie des perpendiculaires et des obliques que

$$IB' > IC > IB_1.$$

Comme $C_1$ est aussi entre B′ et $B_1$, on a $IC_1 < IB'$ ; donc l'angle $IB'C_1 < IC_1B'$, ce qui revient à dire que l'angle BDC est moindre que AC′C. Donc, à fortiori, C′DC < DC′C ; par conséquent,

$$CC' < DC \quad \text{ou} \quad CC' < BB'.$$

Le théorème qu'on vient de démontrer peut s'énoncer ainsi : *Si, par un point fixe* I *de la bissectrice d'un angle* A, *on mène une sécante rencontrant les deux côtés de l'angle en* B *et* B′, *la longueur* BB′ *diminue à mesure que l'angle aigu* AIB′ *augmente.* »

---

(*) Voir *Bulletin des sciences mathématiques et physiques élémentaires* de L. Gérard, 6e année, 1900-1901, p 211. Tout ce qui est entre guillemets est extrait de l'article de M. Gérard.

## SECTIONS PLANES DU CYLINDRE ET DU CONE,

par M. Fr. Breithof, directeur des travaux graphiques à l'Université de Louvain.

(*Fin;* v. p 113-117).

***Section plane du cône.*** Supposons un cône R donné par sa directrice, une circonférence de cercle, située dans le plan de projection et son sommet, le point A, situé à 16 unités de hauteur au-dessus du plan de projection. Cherchons la courbe d'intersection de ce cône avec un plan représenté par son échelle de pente *d* (épure **2**).

La méthode exposée plus haut, pour la recherche de la section plane d'un cylindre, peut encore être suivie dans le cas qui nous occupe. Les opérations à exécuter seront cependant un peu plus longues, car nous devons ici, pour la recherche d'un point quelconque de la courbe, graduer la génératrice sur laquelle est situé ce point. Ce problème est cependant facilité si l'on a soin de prendre comme sommet du cône un point placé à un nombre pair d'unités de hauteur au-dessus du plan de projection.

Pour trouver le point de la courbe appartenant à la génératrice passant par le point F de la base, cherchons le point de rencontre de cette droite et du plan sécant. Nous menons, à cet effet, par la génératrice considérée, un plan de direction quelconque, coupant le plan sécant suivant la droite; cette dernière rencontre la génératrice au point I de la courbe.

La même opération a été effectuée pour trouver les points II, III et IV situés respectivement sur les génératrices passant par $B_0$, $C_0$ et $D_0$.

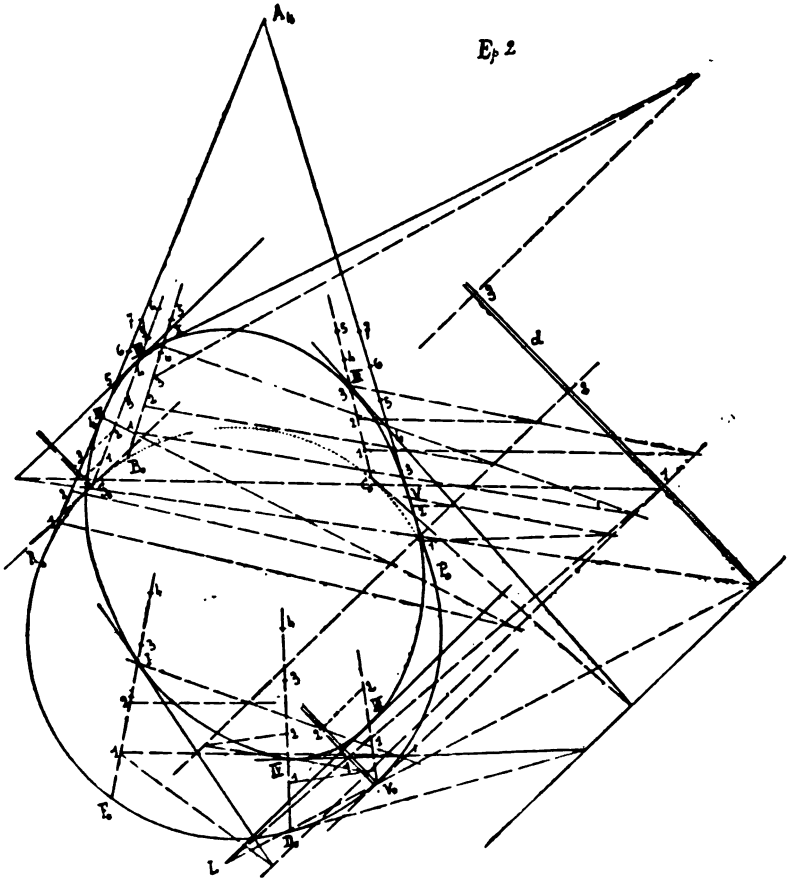
***Points particuliers.*** Il n'y a pas de points dans le plan de projection.

***Points situés sur les génératrices du contour apparent.*** Les points V et VI de la courbe, situés sur les génératrices du contour apparent ont été trouvés par la méthode exposée ci-dessus.

***Construire la tangente en un point de la courbe de section plane.*** Pour mener la tangente en un point IV de la courbe, on construit, comme on sait, en ce point, le plan tangent au cône et l'on recherche l'intersection de ce plan tangent et du plan sécant.

Le plan tangent au point IV est déterminé par la génératrice du cône passant par ce point et par la tangente à la base au point $D_0$. Pour trouver l'intersection de ce plan et du plan sécant, on prolonge la tangente à la base, horizontale de cote 0, du plan tangent, jusqu'à son point de rencontre avec la trace du plan sécant, horizontale de cote 0 de ce dernier plan; ce point, uni au point IV de la courbe, fournit la droite

d'intersection des deux plans en question, la tangente à la courbe au point IV. Si la tangente à la base en $D_0$ rencontrait la trace du plan sécant en dehors des limites assignées à l'épure, l'intersection du plan sécant et



du plan tangent se trouverait en cherchant le point d'intersection d'horizontales de mêmes cotes, différentes de O, des deux plans en question.

*Tangentes situées sur les génératrices du contour apparent.* Aux points V et VI, les projections de ces tangentes se confondent avec les projections des génératrices du contour apparent; la courbe touche ces génératrices.

*Tangentes limites. Points limites.* Pour trouver ces tangentes, on mène

au cône un plan tangent dont les horizontales sont parallèles aux horizontales du plan sécant; l'horizontale commune à ces deux plans est la tangente limite demandée; elle rencontre la génératrice touchée du plan tangent au point limite.

Pour opérer graphiquement la solution de ce problème, menons, parallèlement à la droite $d$, deux tangentes à la base du cône, joignons les points de contact $V_0$, $S_0$ au sommet A; les tangentes à la base et les droites $V_0A_{16}$, $S_0A_{16}$ déterminent les plans tangents.

Afin de trouver facilement l'intersection du plan tangent mené suivant $V_0A_{16}$ avec le plan sécant, traçons l'échelle de pente de ce plan tangent.

Si nous joignons les points de cotes 1 et 0 des échelles de pente des deux plans, la droite d'intersection de ces plans passera par le point L, rencontre des droites 0,0 et 1,1.

Menons, par L, une perpendiculaire a $d$; elle nous fournit l'intersection du plan sécant et du plan tangent, par conséquent, la tangente limite. Son point de rencontre avec la génératrice $V_0A_{16}$ est le point limite VII. C'est le point le plus bas de la courbe.

Nous obtenons, par le même procédé, la tangente limite en un point VIII de la génératrice $S_0A_{16}$; VIII est le point le plus haut de la courbe. Celle-ci s'obtient en joignant, par un trait continu, les différents points obtenus, dans l'ordre II, III, V, VII, IV, I, VI, VIII.

---

## SUPPLÉMENT.

Nous offrons aux lecteurs de *Mathesis*, en supplément, un tiré à part de la note *Su di un sistema di equazioni del primo grado*, que nous avons publiée dans les n^os^ de février et de mars de la revue *Le Matematiche pure ed applicate*. Ils trouveront dans cet article, une démonstration *élémentaire* de la formule

$$a^n - C_{n,1}(a-1)^n + C_{n,2}(a-2)^n - \cdots + (-1)^n C_{n,n}(a-n)^n = 1.2.3\ldots n,$$

et d'autres formules plus générales (*).

---

(*) Page 1, ligne 8, lire $\alpha_1$ au lieu de $\alpha_n$; page 2, ligne 4, lire $a_n$ au lieu de $a_0$; form. (5), suppléer $\alpha_0$ avant $\alpha_1$; page 3, ligne 7 en rem., lire $1.2.3\ldots n$ au lieu de $1,2,3,\ldots n$; page 5, ligne 6, lire $n=4$; ligne 18, lire $\alpha^n$ au lieu de $\alpha_n$; ligne 32, lire $b-1$; page 6, form. (38), lire $(c-2)^p\ldots$; page 7, ligne 6, lire $+b_k$ et $+l_k$; ligne 16, lire $\mu_i$ au lieu de $\mu$; ligne 18, lire $+a_1$ au lieu de $+1$; page 8, suppléer $=$ après $\varpi_1$ et $\varpi_5$.

Nous saisissons volontiers cette occasion de recommander la nouvelle Revue, publiée sous la direction du Professeur *Cristoforo Alasia*, et éditée par *S. Lapi*, à Citta di Castello (Prix : 10 fr. pour l'Italie, 12 fr. pour les pays de l'Union postale). Elle publie, chaque mois, des notes et des mémoires de mathématiques élémentaires ou supérieures, pures ou appliquées. Elle fait de préférence appel aux questions basées sur des données pratiques. « Il y a là, en effet, comme le fait observer M. Alasia, un domaine peu exploré et dont la richesse semble ignorée. La Mécanique, l'Astronomie, la Physique, l'Art de l'Ingénieur, mille faits d'observation constante fournissent une série inépuisable de sujets de questions d'utilité et d'intérêt général. » E. Gelin.

---

## DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE LANCRET.

Extrait d'une lettre de M. A. Demoulin.

Dans le numéro de *Mathesis* d'avril 1901, M. Pirondini a donné une démonstration simple et élégante d'un théorème de Lancret et de sa réciproque. La méthode du trièdre mobile permet d'établir cette proposition sans aucun calcul.

Soient, en conservant les notations de M. Pirondini, $(L_2)$ une courbe donnée, $(L_1)$ le lieu des centres de courbure et (L) le lieu des centres des sphères osculatrices. Attachons à tout point A de cette dernière courbe le trièdre principal $Axyz$ dont les arêtes $Ax$, $Ay$, $Az$ sont respectivement la tangente, la normale principale et la binormale. Le plan $xAy$ coupe à angle droit la courbe $(L_2)$ en un point $A_2$ dont nous appellerons $(x, y, 0)$ les coordonnées relatives. Le centre de courbure de $(L_2)$ en $A_2$ est un point $A_1$ projection de $A_2$ sur $Ax$.

La tangente en $A_2$ à $(L_2)$ étant parallèle à $Az$, les composantes de la vitesse de ce point suivant les axes $Ax$, $Ay$ sont nulles, d'où les deux équations

$$\left.\begin{aligned} 1 - ry + \frac{dx}{ds} &= 0, \\ rx + \frac{dy}{ds} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$s$ et $r$ désignant l'arc et la courbure de la courbe (L).

Dans ces équations, ne figure pas la torsion de la courbe (L); par

suite, si l'on déforme la développable polaire de la courbe $(L_2)$ de manière que les génératrices rectilignes soient conservées et si l'on suppose en outre que les plans osculateurs de (L) ainsi que les points $A_2$ et $A_1$ correspondants soient entraînés dans ce mouvement, à chaque instant, la relation entre les lieux des points A, $A_1$, $A_2$ sera la même que primitivement. Si la courbe (L) devient une courbe plane (L') et la courbe $(L_1)$ une courbe plane $(L'_1)$, *la courbe* $(L_2)$ *se réduira à un point*. En effet, les équations (1) ne cesseront pas de subsister et, interprétées dans le plan, elles expriment la fixité du point dont les coordonnées sont $(x, y)$ relativement aux axes formés par la tangente et la normale de la courbe (L'). Il est donc établi que $(L'_1)$ est la podaire (*) de (L') par rapport au point O en lequel se réduit la courbe $(L_2)$, ce qui constitue le théorème de Lancret. La réciproque n'est pas moins évidente. Etant données, dans un plan, une courbe (L') et sa podaire $(L'_1)$ par rapport à un point O, si l'on appelle $(x, y)$ les coordonnées de ce point par rapport à la tangente et à la normale en un point variable de (L'), on pourra écrire les équations (1) et ces équations subsisteront lorsqu'on déformera le plan avec conservation des tangentes de (L'); de là résulte la réciproque en question.

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**1°**. *Sur la lemniscate de Bernoulli.* Le tome XI (année 1848) des *Archives de Grunert* renferme une note intéressante sur la lemniscate de Bernoulli, par Bierens de Haan. Nous croyons utile de résumer ici les résultats les plus simples énoncés par le savant géomètre hollandais.

1. La lemniscate est le lieu des points M dont le produit des distances à deux points fixes, F et F' est égal à $\frac{1}{4}\overline{F'F}^2$.

La courbe a un point double d'inflexion au milieu O de FF'; elle coupe encore la droite FF' en deux autres points A, A'. Les tangentes OX', OY' au point double sont inclinées de 45° sur OA.

En prenant pour axes OFX et la perpendiculaire OY en O, on a, pour équation $(OA = a)$,

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2);$$

---

(*) Dans l'article de la livraison d'avril de *Mathesis*, on a imprimé plusieurs fois, par erreur, *polaire*, pour *podaire* (*Réd.*).

si l'on fait OM $= r$, MOA $= \theta$ on trouve l'équation polaire

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Si l'on prend pour axes les tangentes OX′, OY′, on obtient

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy, \quad r^2 = a^2 \sin 2\theta.$$

2. Le demi-axe $a$ est moyen proportionnel entre le rayon vecteur OM et la normale polaire en M.

3. Les coordonnéas $\alpha$, $\beta$ du centre et le rayon R du cercle osculateur au point M ont pour expression

$$\alpha = \frac{2a^2 \cos^3\theta}{3r}, \quad \beta = -\frac{2a^2 \sin^3\theta}{3r}, \quad R = \frac{a^2}{3r}.$$

Ce cercle rencontre encore la courbe en un point ayant pour rayon vecteur $r^2 : \sqrt{4a^2 - 3r^2}$.

4. Les tangentes OX′, OY′, et les tangentes menées à la boucle OA parallèlement à OX′, OY′ forment un carré dont le côté $= \frac{1}{2} a \sqrt[4]{\frac{27}{4}}$. Si N est le point de contact de la tangente parallèle à OX′, l'angle NOF $= 15°$ et ON $= a \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$; le rayon vecteur ON divise en deux parties équivalentes l'aire comprise entre OA et le quadrant ONA.

5. L'aire comprise entre l'axe, un rayon vecteur OM et l'arc AM de la courbe vaut la moitié de celle du triangle qui a pour côtés le rayon OM, la normale en M et la perpendiculaire élevée en O sur OM.

6. La lemniscate est la courbe podaire de O par rapport à l'hyperbole équilatère qui a pour axe transverse AA′; c'est aussi une courbe inverse de cette hyperbole.

11. *Sur la question 699* (Voir *Mathesis*, p. 77). Dans sa *Théorie des Nombres*, p. 215, Ed. Lucas, qui nous avait transmis cette question en 1889 ou 1890, la traite sous le nom de *problème des ménages*, circonstance que nous avions complètement oubliée au moment où nous avons rédigé la réponse à la question 699.

Lucas termine sa note en ces termes : « Nous ne connaissons aucune solution simple de cette question, dont l'énoncé donne lieu à l'étude du nombre des permutations discordantes de deux permutations déjà discordantes et, plus généralement, du nombre des permutations discordantes de deux permutations quelconques. » (J. N.)

## BIBLIOGRAPHIE.

**I. Determinanti teoria ed applicazioni** con tutte le più recenti ricerche per E. Pascal, Prof. ordinario nella R. Università di Pavia. Hoepli. Milano, 1897 (VII, 33 p. in 18 cartonné). Prix : 3 fr.

**E. Pascal. Die Determinanten.** Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Berichtigte deutsche Ausgabe von Dr. H. Leitzmann. Leipzig, Teubner, 1900 (XVI, 276 p. in-8 cartonné). Prix : 10 marcs.

Il existe des manuels de la théorie des Déterminants, excellents au point de vue de l'exposition des principes, par exemple, ceux de Baltzer et de M. Muir. Mais ils ne sont pas au courant des recherches récentes sur la matière. A ce point de vue, l'ouvrage le meilleur et le plus complet est celui de M. E. Pascal dont M. Leitzmann vient de publier une traduction allemande; cette traduction a été revue et augmentée par l'auteur et par le traducteur, de propositions et d'applications variées et de nombreuses notes historiques et bibliographiques. La première partie, §§ 1-8, pp. 1-35, contient les principes généraux relatifs aux déterminants quelconques, la seconde, §§ 9-65, pp. 36-254, les propriétés des déterminants spéciaux ou des propriétés spéciales des déterminants quelconques. Les préfaces, les tables et les renseignements bibliographiques occupent le reste du volume.

Nous recommandons vivement le livre de M. Pascal aux professeurs qui ont besoin d'un manuel solide et complet de la théorie des déterminants.

(P. M.)

---

**Collection Scientia. L'élimination**, par H. Laurent. Paris, Carré et Naud, 1900. (74 p. in-8 cartonné). Prix : 2 francs.

Monographie — fatalement incomplète, parce qu'elle est trop peu étendue — sur une théorie algébrique bien difficile. *Introduction* : but de la théorie de l'élimination (pp. 5-6). *Chapitre I.* Élimination entre deux équations, en partant surtout de la théorie des fonctions symétriques (six méthodes). (pp. 7-29). *Chapitre II.* Élimination dans le cas général, principalement d'après la méthode de Bézout. Extension partielle aux équations transcendantes (pp. 30-73). *Appendice.* Continuité des fonctions algébriques implicites : Esquisse d'une démonstration élémentaire (pp. 74-75). — L'exposé de M. Laurent correspond à peu près à l'état de la science à l'époque où Serret publiait son *Algèbre supérieure*; il ne tient pas compte des travaux de Kronecker et de ses élèves (D'après Tannery, *Bulletin de Darboux*, 1900 (2), XXIII[1], 1re partie, pp. 177-179; G. Loria, *Bollettino*, 1900, III, pp. 86-87)..

---

**Mathematische Unterhaltungen und Spiele**, von Dr. W. Ahrens, in Magdeburg. Mit 1 Tafel und vielen Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1901 (XII-428 p. in-8, cartonné). Prix : 10 marcs.

Recueil extrêmement intéressant, analogue à l'ouvrage inachevé de Lucas : *Récréations mathématiques* et aux *Mathematical Recreations* de Rouse Ball dont

nous avons parlé autrefois dans *Mathesis*. L'auteur a exclu de son livre les récréations trop simples, ou celles qui ne présentaient pas de côté mathématique; il en a exclu aussi des questions en réalité très difficiles comme, par exemple, le problème de la quadrature du cercle. Il a essayé d'élucider chaque récréation complètement au point de vue scientifique et bibliographique, mais en mettant en petit texte ce qui ne peut être compris que par les mathématiciens.

SOMMAIRE. 1. Les traversées difficiles (le loup, le chèvre et le chou, etc.). 2. Un problème de Tait. 3. Systèmes de numération (la tour de Hanoï, le baguenaudier, etc.). 4. Avec des vases pleins qui renferment $a$ litres et $b$ litres de liquide, en mettre $c$ dans un troisième vase. 5. Le parquetage. 6. Petites récréations. 7. Les marelles. 8. Le solitaire. 9. Le problème des huit reines. 10. Le problème des cinq reines. 11. Le problème du cavalier au jeu des échecs. 12. Les carrés magiques. 13. Les carrés d'Euler. 14. Les jeux des demoiselles de Kirkman et autres arrangements. 15. Le jeu de Josèphe. 16. Un peu d'*analysis situs*. 17. Ponts et labyrinthes. 18. Jeu de Hamilton. 19. Le problème des quatre couleurs dans les cartes géographiques. 20. Le taquin ou jeu des quinze 21. Le jeu de dominos. 22. Le calendrier. 23. Constructions géométriques au moyen de plis [Construire 1. Un carré; 2. Un triangle équilatéral; 3. Un triangle rectangle de base et de hauteur données; 4. Un hexagone régulier; 5. Un octogone régulier. 6. Diviser une ligne en moyenne et extrême raison. 7. Construire une ellipse d'axe donné et dont les carrés des axes sont dans le rapport de l'axe donné à une autre ligne(*)].

(P. M.).

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(**).

### Question 415.

(Voir *Mathesis*, (1), t. V, p. 46.)

*On donne deux coniques* S, S' *et un point* A *sur* S. *Démontrer qu'il n'existe que quatre coniques osculatrices à* S *en* A *et osculatrices aussi à* S'. *Déterminer les points d'osculation de* S'. (E. DEWULF.)

*Solution par* M. STUYVAERT. M. SERVAIS a déjà reconnu, par l'application de la transformation quadratique (*Mathesis*, 1888, p. 34) que

---

(*) Voici cette construction : Soit $AB = 2a$ l'axe donné, C un point sur le prolongement de BA, tel que $AC : BC = b^2 : a^2$. Menez CD perpendiculaire sur CB, joignez DA, DB. La perpendiculaire AP en A à DA rencontre DB en un point situé sur l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. — Les constructions du chapitre 23 sont empruntées à l'ouvrage : *Geometrical Exercises in Paper-Folding* by SUNDARA ROW. Madras, Addison and Co, 1893. — D'après la *Géométrie du Compas* de MASCHERONI, il est clair qu'on peut faire ainsi toutes les constructions de la géométrie élémentaire.

(**) Nous avons oublié de mentionner, p. 33, une bonne solution de la question 1285, par M. PLAKHOVO.

l'énoncé doit être modifié et qu'il existe, en réalité, *six* coniques répondant à la question; il ajoute qu'il convient de chercher combien de ces coniques sont réelles.

Voici d'autres manières d'aborder la question.

*Première méthode.* Le triangle de référence étant formé par deux tangentes $x_1$, $x_3$ à S′ et par leur corde de contact $x_2$, l'équation de S′ peut s'écrire

$$x_2^2 = x_1 x_3,$$

ou, sous forme paramétrique,

$$x_1 : x_2 : x_3 = \theta^2 : \theta : 1.$$

Soient

$$S = 0, \quad t = 0, \quad d = 0,$$

les équations respectives de la conique S, de sa tangente en A et d'une autre droite passant par A. Les coniques Σ osculatrices à S en A sont représentées par

$$\Sigma \equiv S + t(\lambda t + \mu d) = 0. \tag{1}$$

Remplaçons, dans cette relation, $x_1$, $x_2$, $x_3$ par $\theta^2$, $\theta$, 1; nous aurons une égalité du quatrième degré en $\theta$, dont les racines seront les paramètres des points d'intersection de S′ avec la conique Σ et dont les coefficients seront linéaires en $\lambda$, $\mu$; pour que Σ et S′ soient osculatrices, il faut et il suffit que trois racines $\theta$ soient égales, ce qui s'exprime par l'évanouissement des invariants de la forme biquadratique binaire. Or, ces deux invariants contiennent, respectivement au second et au troisième degré, les coefficients de la forme, donc aussi $\lambda$ et $\mu$; par suite, il y a six systèmes de valeurs de $\lambda$ et $\mu$ qui vérifient la question.

Ce raisonnement peut être présenté sous la forme condensée que voici. Les coniques Σ osculatrices à S en A ont en commun trois points infiniment voisins, forment donc un réseau et déterminent, sur S′, des groupes d'une involution du quatrième ordre et du second rang, douée de six points triples qui sont les points de contact de S′ avec les coniques cherchées.

*Autrement :* les coniques Σ qui passent par un point B de S′ déterminent, sur cette courbe, une involution du troisième ordre et du premier rang, douée de quatre points doubles C; la conique Σ touchant S′ en un point C la coupe encore en deux points B; entre les points B et C il y a donc une correspondance (2, 4) et, d'après le principe de

Chasles, il existe six coïncidences. A présent, si l'on cherche l'enveloppe de la droite BC, les tangentes communes à cette enveloppe et à S′ déterminent les points d'osculation.

*Deuxième méthode.* Prenons A pour sommet et la tangente en A à S pour un côté du triangle de référence, lequel sera, en outre, autopolaire par rapport à S′; l'équation de cette dernière courbe est alors

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0,$$

tandis que celle de S est de la forme

$$a x_1^2 + 2h x_1 x_2 + b x_2^2 + 2g x_2 x_3 = 0.$$

Les coniques Σ osculatrices à S en A sont représentées par

$$a x_1^2 + 2\mathrm{H} x_1 x_3 + \mathrm{B} x_2^2 + 2g x_2 x_3 = 0,$$

H et B étant deux paramètres variables.

Les coniques passant par les points d'intersection de S′ et Σ sont données par

$$(a + k\alpha) x_1^2 + 2\mathrm{H} x_1 x_2 + (\mathrm{B} + k\beta) x_2^2 + 2g x_2 x_3 + k\gamma x_3^2 = 0,$$

où $k$ est un paramètre arbitraire; il existe trois valeurs de $k$ pour lesquelles la conique $\Sigma + k\mathrm{S}'$ dégénère en deux droites et ces valeurs de $k$ sont racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a + k\alpha & \mathrm{H} & 0 \\ \mathrm{H} & \mathrm{B} + k\beta & g \\ 0 & g & k\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\alpha\beta\gamma k^3 + k^2(a\beta\gamma + \mathrm{B}\alpha\gamma) + k\,(a\mathrm{B}\gamma - \mathrm{H}^2\gamma - g^2\alpha) - ag^2 = 0.$$

Pour que les coniques Σ et S′ soient osculatrices, il faut et il suffit que les trois couples de droites appartenant au faisceau $\Sigma + k\mathrm{S}'$ se confondent, ou que l'équation en $k$ ait trois racines égales, ce qui s'exprime par les relations

$$\left(\frac{a\beta + \mathrm{B}\alpha}{\alpha\beta}\right)^2 = 3\,\frac{a\mathrm{B}\gamma - \mathrm{H}^2\gamma - g^2\alpha}{\alpha\beta\gamma},$$

$$\left(\frac{a\beta + \mathrm{B}\alpha}{\alpha\beta}\right)^3 = -\,\frac{27ag^2}{\alpha\beta\gamma}.$$

Elles donnent trois valeurs de B et trois couples de valeurs correspondantes de H, donc six coniques Σ répondant à la question. Des trois valeurs de B, une seule est réelle. A chaque système de valeurs de B

et H, répondent une valeur de $k$ et une conique $\Sigma + kS'$ décomposable en deux droites, dont le point commun est un point d'osculation cherché. Le nombre total de ces points est six, et il y en a au moins quatre imaginaires.

---

**Question 1048.**

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 280).

*Trouver une construction simple pour déterminer deux points correspondants de la transformation définie par l'équation générale du second degré,*

$$Au^2 + 2Bzu + Cz^2 + 2Du + 2Ez + F = 0$$

*entre deux variables complexes $u$ et $z$.*

*Solution par* M. Emmerich. Si $A \gtrless 0$, on peut écrire

$$(Au + Bz + D)^2 = v^2,$$

ou

$$v^2 = (B^2 - AC)z^2 + 2(BD - AE)z + D^2 - AF.$$

Après avoir construit les coefficients

$$B^2 - AC = L, \quad 2BD - 2AE = M, \quad D^2 - AF = N$$

on cherchera le point $R \equiv v^2$ d'après la solution de la question 1166 (Voir *Mathesis*, (2) X, p. 26). La construction des deux valeurs $v_1$, $v_2$ de $v$ se fait en portant sur les deux directions de la bissectrice de l'angle ROI la moyenne géométrique de OR et OI (OI est le vecteur unitaire pris sur l'axe $Ox$). Les valeurs de $Au$ s'obtiennent alors par

$$Au_1 = v_1 - Bz - D, \quad Au_2 = v_2 - Bz - D.$$

$u_1$, $u_2$ seront les sommets de triangles directement semblables au triangle OAI et construits sur des bases qui joignent l'origine aux points $Au_1$, $Au_2$.

Si $A = 0$, l'équation se ramène à

$$2(Bz + D)u + Cz^2 + 2Ez + F = 0.$$

On construit les points

$$-2Bz - 2D = P, \quad Cz^2 + 2Ez + F = Q,$$

et le sommet du triangle construit sur la base OI et directement semblable au triangle OPQ représente le point $u$.

---

**×Question 1961.**

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 80).

***Soient l, m, n les projections d'une longueur donnée*** MM' ***sur les trois côtés d'un triangle*** ABC. ***Quelle orientation faut-il donner à*** MM' ***pour que*** $mn + nl + lm$ ***soit maximum ou minimum?*** (E. LEMOINE).

***Solution par*** M. EMMERICH. Menons par le point M, qui est arbitraire, des demi-droites $MA_1$, $MB_1$, $MC_1$ parallèles à BC, CA, AB, et soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varphi$ les angles que fait un axe quelconque MX avec $MA_1$, $MB_1$, $MC_1$ et avec la direction MM'. En supposant $MM' = 1$, on a

$$mn + nl + lm = \Sigma \cos(\varphi - \beta)\cos(\varphi - \gamma)$$
$$= \frac{1}{2}\Sigma \cos(2\varphi - \beta - \gamma) + \frac{1}{2}\Sigma \cos(\beta - \gamma).$$

Le maximum et le minimum cherchés correspondent à l'équation $\Sigma \sin(2\varphi - \beta - \gamma) = 0$, ce qui donne

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\Sigma \sin(\beta + \gamma)}{\Sigma \cos(\beta + \gamma)}.$$

Prenons sur MX une longueur $MN = 1$, et construisons les symétriques $N_1$, $N_2$, $N_3$ de N par rapport aux bissectrices des angles $B_1MC_1$, $C_1MA_1$, $A_1MB_1$; les coordonnées des points $N_1$, $N_2$, $N_3$ par rapport à MX et à une perpendiculaire seront

$\cos(\beta+\gamma)$, $\sin(\beta+\gamma)$; $\cos(\gamma+\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha)$; $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$.

Par suite, le centre de gravité P du triangle $N_1N_2N_3$ a pour coordonnées $\frac{1}{3}\Sigma \cos(\beta+\gamma)$, $\frac{1}{3}\Sigma \sin(\beta+\gamma)$. On en conclut que les deux directions correspondant l'une à un maximum et l'autre à un minimum de la somme $mn + nl + lm$ sont les deux bissectrices des angles formés par les droites indéfinies MX et MP.

NOTE. M. Déprez a résolu la même question. Il démontre que les directions cherchées sont celles des axes de l'ellipse qui touche en A, B, C les bissectrices extérieures des angles du triangle ABC.

Pour démontrer ce résultat, on peut observer que l'équation d'une conique circonscrite à ABC est

$$fYZ + gZX + hXY = 0.$$

ou

$$X \equiv p - x\cos\delta - y\sin\delta,$$
$$Y \equiv p' - x\cos\delta' - y\sin\delta',$$
$$Z \equiv p'' - x\cos\delta'' - y\sin\delta''.$$

Supposons les axes de la courbe parallèles aux axes coordonnés; alors le coefficient de $xy$ dans l'équation cartésienne doit être nul; ce qui exige

(1) $\qquad f\sin(\delta'+\delta'')+g\sin(\delta''+\delta)+h\sin(\delta+\delta')=0.$

Or, si dans la solution de M. Emmerich, MX coïncide avec l'une des directions cherchées, on a $\operatorname{tg} 2\varphi=0$, donc $\Sigma\sin(\beta+\gamma)=0$. Cette condition se ramène à l'égalité (1), où $f=g=h=1$.

---

## ×Question 1963.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 80.)

*Démontrer la formule*

$$1+C_{m-1,1}=C_{m-2,2}+C_{m-3,3}+\cdots=u_{m-1}$$

$C_{m,n}$ *désigne le nombre des combinaisons de* $m$ *objets* $n$ *à* $n$; *le dernier terme du premier membre est* $C_{\frac{1}{2}m(m+1),\frac{1}{2}(m-1)}$ *ou* $C_{\frac{1}{2}m,\frac{1}{2}m}$ *suivant que* $m$ *est impair ou pair;* $u_m$ *est le* $(m+1)^e$ *terme de la suite de Fibonacci, ou* $u_0=0$, $u_1=1$. (A. Boutin.)

*Solution par* MM. Cardoso-Laynes (Livourne) *et* Emmerich. Pour $m=2$ on a $1+C_{1,1}=2=u_3$; pour $m=3$ on a $1+C_{2,1}=3=u_4$, etc...; il suffit donc de démontrer, $f_m$ désignant l'expression du premier membre de la formule proposée, que l'on a

(1) $\qquad f_m=f_{m-1}+f_{m-2}.$

Supposons d'abord $m=2k+1$; alors

(2) $f_{2k-1}=1+C_{2k-2,1}+C_{2k-3,2}+C_{2k-4,3}+\cdots+C_{k+1,k-2}+C_{k,k-1}$,

(3) $f_{2k}=1+C_{2k-1,1}+C_{2k-2,2}+C_{2k-3,3}+\cdots+C_{k+2,k-2}+C_{k+1,k-1}+C_{k,k}$;

d'où l'on tire

$$f_{2k-1}+f_{2k}=1+[1+C_{2k-1,1}]+[C_{2k-2,1}+C_{2k-2,2}]+$$
$$+[C_{2k-3,2}+C_{2k-3,3}]+\cdots+[C_{k+1,k-2}+C_{k+1,k-1}]+[C_{k,k-1}+C_{k,k}].$$

Or

(4) $\qquad C_{r,s}+C_{r,s+1}=C_{r+1,s+1},\quad C_{r,0}=1;$

on peut donc écrire

(5) $$f_{2k-1}+f_{2k}=1+C_{2k,1}+C_{2k-1,2}+C_{2k-2,3}+\cdots$$
$$+C_{k+2,k-1}+C_{k+1,k}=f_{2k+1}.$$

Si $m$ est pair, en opérant par la même méthode sur les égalités (3). (5), on aura

$$f_{2k}+f_{2k+1}=f_{2k+2}.$$

## Question 1979.

(Voir *Mathesis*, (2), X. p. 176.)

*Sur les côtés du triangle* ABC *comme bases on construit trois triangles isosceles semblables* $A_1BC$, $B_1CA$, $C_1AB$. *Lorsque l'angle* $A_1BC$ *varie, les points de concours* $A_2$, $B_2$, $C_2$ *des couples de droites* $(BC_1, CB_1)$, $(AB_1, BA_1)$, $(CA_1, AC_1)$ *décrivent trois hyperboles. Les droites* $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ *concourent en un même point* P, *qui décrit une droite. Si* $A'_1BC$, $B'_1CA$, $C'_1AB$ *sont trois triangles isosceles dont l'angle à la base est complémentaire de l'angle* $A_1BC$, *et que* $A'_2$, $B'_2$, $C'_2$ *désignent les points de concours des couples* $(BC'_1, CB'_1)$, $(AB'_1, PA'_1)$, $(CA'_1, AC'_1)$, *les droites* $A_2A'_2$, $B_2B'_2$, $C_2C'_2$ *concourent au centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

(J. Neuberg.)

*Solution par* MM. Emmerich *et* Déprez. En prenant l'angle $A_1BC = \varphi$ dans le sens positif si les triangles sont construits extérieurement, on a les équations de

$$CB_1 : \qquad \frac{x}{y} = -\frac{\sin(C+\varphi)}{\sin\varphi} = -\sin C\cot\varphi - \cos C;$$

$$BC_1 : \qquad \frac{x}{z} = -\frac{\sin(B+\varphi)}{\sin\varphi} = -\sin B\cot\varphi - \cos B.$$

En éliminant $\cot\varphi$ on trouve pour le lieu du point $A_2$ :

$$\frac{\sin(B-C)}{x} + \frac{\sin B}{y} - \frac{\sin C}{z} = 0.$$

Ce lieu est une hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC et dont les asymptotes sont les parallèles aux bissectrices de l'angle A, menées par le milieu du côté BC.

L'équation de $AA_2$ est

$$y : z = \sin(B+\varphi) : \sin(C+\varphi).$$

On voit immédiatement que les droites $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ concourent au point P défini par les égalités

$$x : y : z = \sin(A+\varphi) : \sin(B+\varphi) : \sin(C+\varphi),$$

d'où, par élimination de $\varphi$ :

$$x\sin(B-C) + y\sin(C-A) + z\sin(A-B) = 0,$$

le lieu du point P est donc une droite.

Les coordonnées de $A_2$ étant

$$-\sin(B+\varphi)\sin(C+\varphi), \quad \sin\varphi\sin(B+\varphi), \quad \sin\varphi\sin(C+\varphi),$$

celles du point $A'_2$ seront

$$-\cos(B-\varphi)\cos(C-\varphi),\quad \cos\varphi\cos(B-\varphi),\quad \cos\varphi\cos(C-\varphi).$$

En tenant compte des identités

$$\sin(B+\varphi)\cos(C-\varphi)-\sin(C+\varphi)\cos(B-\varphi)=\sin(B-C)\cos 2\varphi,$$
$$\sin(B+\varphi)\cos\varphi-\cos(B-\varphi)\sin\varphi=\sin B\cos 2\varphi,$$
$$\cos(C-\varphi)\sin\varphi-\sin(C+\varphi)\cos\varphi=-\sin C\cos 2\varphi,$$

l'équation de $A_2A'_2$ pourra s'écrire

$$x\sin\varphi\cos\varphi\sin(B-C)+y\sin B\sin(C+\varphi)\cos(C-\varphi)$$
$$-z\sin C\sin(B+\varphi)\cos(B-\varphi)=0,$$

ou bien

$$\{x\sin(B-C)+y\sin B-z\sin C\}\sin\varphi\cos\varphi+$$
$$\{y\cos C-z\cos B\}\sin B\sin C=0,$$

et l'on voit que les deux parenthèses s'évanouissent en supposant

$$x=\cos A,\quad y=\cos B,\quad z=\cos C.$$

En général, quand des couples de points $A_1, A'_1$ marquent sur la médiatrice du côté BC une involution, les droites $A_2A'_2$ .... tournent autour d'un point fixe.

---

## Question 1296.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 264).

*On a, dans un sac, $nk$ boules formant $n$ séries numérotées de 1 à $k$; on distribue au hasard $k$ boules à chacune de $n$ personnes, quelle est la probabilité pour que chacune des $n$ personnes ait en mains la série complète des $k$ numéros.* (A. Boutin).

*Solution par* M. G. Verheugen (Gand) et Soons. Soient $C_{m,n}$ le nombre des combinaisons de $m$ éléments pris $n$ à $n$, et $P_n$ celui des permutations de $n$ éléments, de sorte que $C_{m,n}=\dfrac{P_m}{P_{m-n}.P_n}$.

On peut prendre de $C_{nk,k}$ manières $k$ boules d'un sac qui en contient $nk$. Supposons que chaque boule ait, outre son numéro, un indice indiquant la série à laquelle elle appartient, de sorte que les boules seront marquées comme il suit : $1_1, 2_1, 3_1 \ldots k_1$; $1_2, 2_2, \ldots k_2$; $1_n, 2_n, \ldots k_n$. Cela étant, on pourra prendre autant de fois une série de $k$ boules numérotées de 1 à $k$, qu'il y aura de termes dans le développement du produit :

$$(1_1+1_2+1_3+\cdots+1_n)(2_1+2_2+2_3+\cdots+2_n)(\cdots)\cdots(k_1+k_2+\cdots+k_n);$$

or, puisqu'il y a $k$ facteurs dans ce produit de $n$ termes chacun, on aura $n^k$ termes dans le développement.

Par conséquent, la probabilité pour une première personne A sera

$$\frac{n^k}{C_{nk,k}} = P_k \frac{n^k P_{(n-1)k}}{P_{nk}}.$$

Si nous supposons maintenant A en possession de ses $k$ boules numérotées de 1 à $k$, il restera $(n-1)k$ boules formant $(n-1)$ séries numérotées de 1 à $k$. La probabilité relative à une personne B, s'obtiendra en remplaçant dans la probabilité de A, $n$ par $n-1$; relativement à une troisième personne C, $n$ par $n-2$, etc. On aura donc pour ces probabilités successivement

$$P_k \frac{n^k P_{(n-1)k}}{P_{nk}}, \quad P_k \frac{(n-1)^k P_{(n-2)k}}{P_{(n-1)k}}, \quad P_k \frac{(n-2)^k P_{(n-3)k}}{P_{(n-2)k}}, \quad \ldots,$$

$$P_k \frac{2^k P_k}{P_{2k}}, \quad P_k \frac{1}{P_k}.$$

La probabilité demandée sera donc

$$(P_k)^n . n^k . (n-1)^k . (n-2)^k . \ldots 2^k . 1^k \frac{P_{(n-1)k} . P_{(n-2)k} . \ldots P_k . 1}{P_{nk} . P_{(n-1)k} . \ldots P_{2k} . P_k},$$

ou, après réduction,

$$\frac{(P_k)^n (P_n)^k}{P_{nk}}.$$

*Solution par* M. M. Emmerich. Soient $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ les personnes qui reçoivent suivant l'ordre chacune $k$ boules. $A_1$ peut recevoir $k$ boules de $C_{nk,k}$, $A_2$ de $C_{(n-1)k,k}$, $A_3$ de $C_{(n-2)k,k}$, ... $A_n$, de $C_{k,k}$ manières. Le nombre total des cas possibles sera donc

$$C_{nk,k} . C_{(n-1)k,k} . C_{(n-2)k,k} \ldots C_{k,k} =$$

$$\frac{(nk)!}{k![(n-1)k]!} . \frac{[(n-1)k]!}{k![(n-2)k]!} . \frac{[(n-2)k]!}{k![(n-3)k]!} \ldots \frac{k!}{k!1} = \frac{(nk)!}{(k!)^n}.$$

$A_1$ peut recevoir le numéro 1 de $n$ manières, de même les numéros 2, 3, ... $k$; le nombre des cas favorables pour $A_1$ sera donc $n^k$. Pour avoir le nombre des cas favorables pour $A_1$ et $A_2$ il faut observer que $A_1$ et $A_2$ peuvent recevoir le numéro 1 de $n(n-1)$ manières, de même les numéros 2, 3, ... $k$; le nombre cherché sera alors $[n(n-1)]^k$; ... Le nombre total des cas favorables sera donc $(n!)^k$, et la probabilité cherchée sera

$$\frac{(n!)^k (k!)^n}{(nk!)},$$

résultat symétrique par rapport à $n$ et $k$.

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

### Concours de 1901.

Soient $Ox$, $Oy$, deux axes de coordonnées rectangulaires; soient $a$ et $a'$ les abscisses de deux points A et A' de l'axe $Ox$, et $b$ l'ordonnée d'un point B de l'axe $Oy$. On considère toutes les hyperboles équilatères ($H_\lambda$) circonscrites au triangle AA'B.

I. — Calculer les coordonnées $x_1$, $y_1$, du quatrième point M de rencontre de la circonférence circonscrite au triangle AA'B avec l'hyperbole ($H_\lambda$). Montrer qu'en désignant par $\lambda$ un paramètre variable, ces coordonnées peuvent être mises sous la forme

$$x_1 = \frac{A + B\lambda}{1 + \lambda^2} \qquad y_1 = \lambda x_1 + b,$$

et donner les valeurs des constantes A et B.

II. — Vérifier par le calcul que le diamètre de l'hyperbole qui est mené par le point M passe par un point fixe, quel que soit $\lambda$.

Le démontrer géométriquement.

III. — Trouver le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées aux hyperboles ($H_\lambda$) parallèlement à une direction donnée, et examiner en particulier le cas où cette direction est celle des axes de coordonnées.

N. B. — Les candidats conserveront toutes les notations indiquées.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**1001.** Ramener l'un à l'autre les déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & ab+bc+ca & abc \\ 1 & b+c+d & bc+cd+db & bcd \\ 1 & c+d+a & cd+da+ac & cda \\ 1 & d+a+b & da+ab+bd & dab \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

(STUDNIČKA).

Retranchons de la 2e colonne de $\Delta$ la 1re multipliée par $a+b+c+d$, et de la 3e colonne la 1re multipliée par $ab+ac+ad+bc+bd+cd$; en dénotant le déterminant par sa 1re ligne, nous aurons

$$\Delta = | \; 1 \quad -d \quad -d(a+b+c) \quad abc \; |.$$

Multiplions les lignes respectivement par $d$, $a$, $b$, $c$ et divisons ensuite la 4e colonne par $abcd$; il vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} d & d^2 & d^3(a+b+c) & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin, retranchons de la 3e colonne la 2e multipliée par $a+b+c+d$.

**1002.** Vérifier que

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+c} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b+a} \\ \frac{1}{c+b} & \frac{1}{c+a} & -\frac{1}{c} \end{vmatrix} = 0.$$

(J. N.).

**1003.** Vérifier que

$$\begin{vmatrix} -a+b+c & b & c \\ a & a-b+c & c \\ a & b & a+b-c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

(J. N.).

**1004.** Vérifier que

$$\begin{vmatrix} -2bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & -2ca & a^2 \\ b^2 & a^2 & -2ab \end{vmatrix} = -2abc \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

(J. N.).

**1005.** On donne sur le prolongement du côté AB d'un rectangle ABCD un point E, et l'on demande de mener par E une droite qui rencontre les côtés BC, AD et le prolongement de CD en des points X, Y, Z tels que les aires ZDY, ABXY soient dans un rapport donné $m : n$.

Si l'on fait

$$AB = a, \quad BC = b, \quad AY = y, \quad DZ = z, \quad BX = x, \quad BE = d,$$

on a les équations

$$\frac{z(b-y)}{a(x+y)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{x}{d} = \frac{y}{a+d} = \frac{b-y}{z}.$$

L'élimination de $y$ et $z$ conduit à une équation du second degré en $x$.

**1006.** La longueur $2d$ du diamètre perpendiculaire à une asymptote d'une hyperbole est donnée par la formule

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}.$$

**1007.** Dans un triangle ABC, on trace une droite AD vers un point D de la base BC. Mener par B une droite qui rencontre AD, AC en des points E, F tels que les triangles BED, AEF soient équivalents, ou que le triangle ABE soit équivalent au quadrilatère DEFC.

Dans le premier cas, la droite DF est parallèle à AB; dans le second cas, les triangles ABD, BCF sont équivalents, ce qui conduit à mener DG parallèle à AB jusqu'à la rencontre en G avec AC, et à prendre CF = AG.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1823.** Étant donnés un cercle O et une droite Δ, on décrit un cercle tangent à Δ et ayant son centre en un point quelconque M de la circonférence O. Le lieu des centres de similitude de ces deux cercles se compose de deux coniques. (E. N. Barisien.)

**1824.** Étant donnés dans un plan deux points fixes O, O′, faisons correspondre à un point variable P les deux points $P_1$, $P_2$ où la droite OP est coupée par le cercle ayant le centre P et PO′ pour rayon : démontrer que lorsque P décrit une droite $g$, le lieu du point correspondant est en général une cubique de sixième classe passant par O, normale en O′ à OO′, et touchant aux points circulaires les droites isotropes issues de O. Construire l'asymptote réelle de la cubique; les deux autres antitangentiels de O; les points où la cubique est coupée par $g$ et les tangentes en ces points.

Examiner les cas particuliers de $g$ passant par O ou par O′, et ceux de $g$ médiatrice de OO′, ou située à l'infini. (V. Retali).

×**1825.** Soient E, F les points d'intersection des côtés opposés AB et CD, AD et BC d'un quadrilatère ABCD inscrit à un cercle de centre O et de rayon R. Démontrer la relation

$$OE.\,OF\cos EOF = R^2.$$

**1826.** On projette le point de Steiner S d'un triangle ABC en A′, B′, C′ sur les parallèles menées par A, B, C aux côtés BC, CA et AB. Démontrer que les tangentes menées en A′, B′, C′ respectivement aux cercles ASA′, BSB′, CSC′ concourent en un même point.

(G. Gérard.)

**Rectifications.** — Page 82, ligne 11, lire $\overline{PA}^2 = 6a^2 - 2a(x+y+z)$; p. 103, ligne 4, lire $2x - 2$; lignes 10 et 12, lire $r \gtrless 5$.

## SUR DEUX FAMILLES DE COURBES;

par M. E. N. Barisien.

1. Considérons l'équation en coordonnées cartésiennes

$$y^2 = x^2 \frac{x^m}{a^m - x^m}. \qquad (1)$$

Pour $m = 1$, elle représente une cissoïde droite. Lorsque $m$ est pair et positif, la courbe (1) est à centre et se compose de *deux* courbes analogues à la cissoïde; pour les autres valeurs positives de $m$ sa forme est analogue à celle *d'une* cissoïde.

Si on pose $y = x \operatorname{tg} \varphi$, on trouve les *équations paramétriques*

$$x = a \sin^{\frac{2}{m}} \varphi, \quad y = a \frac{(\sin \varphi)^{\frac{2}{m}+1}}{\cos \varphi}.$$

L'aire U comprise entre la courbe (1) et l'asymptote $x = a$ est finie. En effet,

$$\frac{dU}{d\varphi} = y \frac{dx}{d\varphi} = \frac{2a^2}{m} \sin^{\frac{4}{m}} \varphi;$$

d'où pour l'aire totale

$$U = \frac{4a^2}{m} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{\frac{4}{m}} \varphi d\varphi.$$

Si $m = 1$, on retrouve l'expression connue $\frac{3}{4}\pi a^2$. Les valeurs $m = 2$, $4$, $\frac{1}{2}$ donnent

$$U = \frac{1}{2}ma^2, \quad a^2, \quad \frac{35}{32}\pi a^2.$$

Si l'on fait $m = \frac{1}{p}$, on obtient

$$U = 2\pi a^2 p \frac{1.3.5....(4p-1)}{2.4.6....(4p)}.$$

2. Considérons encore l'équation

$$y^2 = x^2 \frac{a^m + x^m}{a^m - x^m},$$

qui, pour $m = 1$, représente une strophoïde droite.

Si l'on pose $y = x \cot \varphi$, on obtient les équations paramétriques

$$x = a(\cos 2\varphi)^{\frac{1}{m}}, \quad y = a \cot \varphi (\cos 2\varphi)^{\frac{1}{m}}.$$

Il en résulte, pour l'aire U,

$$\frac{dU}{d\varphi} = y\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{4a^2}{m}(\cos 2\varphi)^{\frac{2}{m}-1}\cos^2\varphi.$$

Lorsque $m$ est pair et positif, l'origine est un centre et un point double d'inflexion, avec deux tangentes inclinées de 45° sur l'axe des $x$; les droites $x = +a$ et $x = -a$ sont des asymptotes. Les valeurs impaires et positives de $m$ donnent une courbe comprenant une boucle qui est comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = -a$, et deux branches infinies ayant pour asymptote la droite $x = a$; l'origine est un point double avec les tangentes $y = \pm x$.

Dans les deux cas, l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote du côté des $x$ positifs a pour expression

$$U = -\frac{8a^2}{m}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(\cos 2\varphi)^{\frac{2}{m}-1}\cos^2\varphi d\varphi.$$

Si l'on remplace la limite $\frac{1}{4}\pi$ par $\frac{1}{2}\pi$, l'intégrale précédente représente, dans le cas de $m$ impair et positif, l'excès de l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote, sur l'aire de la boucle. Pour $m = 1$ on trouve ainsi $\pi a^2$.

La proposition suivante présente quelque intérêt :

*Les deux courbes*

$$y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}, \quad y^2 = x^2\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$$

***sont asymptotes l'une de l'autre. L'aire comprise entre les deux branches de courbes qui sont asymptotes, est équivalente à l'aire de la boucle de la première courbe.***

---

## CONTRIBUTION A LA GÉOMÉTRIE DE L'ELLIPSOÏDE.

par M. C. E. Wastkels (Gand).

Dans un précédent article (pp. 94-98), j'ai exposé quelques principes simples permettant d'étendre à l'ellipsoïde la plupart des propriétés de la sphère ; je me propose d'en présenter ici quelques nouvelles applications. (Sur la signification de l'indice $s$, voir l'article précédent n° 3, p. 97.)

1° Les arcs de grand cercle AB et AC, tangents en B et C à un petit cercle de la sphère, sont égaux.

2° Les arcs AB et AC étant fixes, si l'on mène un troisième arc de grand cercle tangent au même petit cercle et formant avec les premiers un triangle AMN extérieur au cercle, le périmètre de ce triangle sera constant.

3° Si un triangle sphérique A'B'C' est le triangle polaire d'un triangle sphérique ABC, réciproquement, ABC sera le triangle polaire de A'B'C'.

4° Dans deux triangles polaires, les angles de l'un sont les suppléments des côtés opposés de l'autre, de sorte que, les angles rapportés à l'angle droit étant désignés par A, B, C, A', B', C', et les côtés opposés, rapportés au quadrant, par $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, on aura

$$A+a'=2,$$

et cinq autres relations analogues.

5° Dans tout triangle sphérique, les trois hauteurs se coupent en un même point.

Si, d'un point A d'un ellipsoïde, on mène les arcs AB et AC, situés dans des plans diamétraux et tangents en B et C à une section plane quelconque, on aura $AB_s=AC_s$.

Les arcs AB et AC étant fixes, si l'on mène un troisième arc analogue tangent à la même ellipse et formant avec les premiers un triangle AMN extérieur à cette ellipse, on aura $AM_s+MN_s+NA_s=C''$.

La définition des triangles polaires tracés sur l'ellipsoïde étant analogue à celle des triangles polaires de la géométrie sphérique, on voit sans peine que, si un triangle ellipsoïdal A'B'C' est le triangle polaire d'un triangle ellipsoïdal ABC, réciproquement, ABC sera le triangle polaire de A'B'C'.

Si l'on désigne les angles de deux triangles polaires par A, B, C, A', B', C', et les côtés opposés par $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, on aura

$$A_s+a_s'=2,$$

et cinq autres relations analogues.

Si, par chaque sommet d'un triangle ellipsoïdal, on mène un arc situé dans un plan diamétral conjugué de celui du côté opposé, ces trois arcs se couperont en un même point.

6° Dans tout triangle sphérique, les trois médianes se coupent en un même point.

Si, par chaque sommet d'un triangle ellipsoïdal, on mène un arc situé dans un plan diamétral passant par le milieu de la corde qui sous-tend le côté opposé, ces trois arcs se couperont en un même point.

7° Dans tout triangle sphérique, les arcs de grand cercle perpendiculaires aux milieux des côtés, se coupent en un même point. Ce point est le pôle du cercle circonscrit au triangle.

Dans tout triangle ellipsoïdal, les arcs déterminés par les plans diamétraux conjugués des cordes qui sous-tendent les trois côtés se coupent en un même point. Ce point est le pôle de l'ellipse circonscrite au triangle.

8° Dans tout triangle sphérique, les trois bissectrices intérieures se coupent en un même point. Ce point est le pôle du cercle inscrit au triangle.

Si, par les sommets d'un triangle ellipsoïdal ABC, on mène des arcs de plans diamétraux divisant intérieurement les angles A, B, C respectivement en A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″ tels que $A_0' = A_0''$, $B_0' = B_0''$, $C_0' = C_0''$, ces trois arcs se couperont en un même point. Ce point est le pôle de l'ellipse inscrite au triangle.

9° Le pôle du cercle inscrit à un triangle sphérique est en même temps le pôle du cercle circonscrit au triangle polaire. Les rayons sphériques de ces deux cercles sont complémentaires.

Le pôle de l'ellipse inscrite à un triangle ellipsoïdal est en même temps le pôle de l'ellipse circonscrite au triangle polaire. Si $r$ et $R'$ désignent deux arcs de section diamétrale menés du pôle à chacune de ces ellipses, on aura $r_0 + R_0' = 1$.

Parmi les théories applicables aux figures tracées sur l'ellipsoïde, signalons encore celle de l'*axe radical* et celle des *pôles et polaires* par rapport à une section plane.

## SUR LES TRIANGLES ORTHOLOGIQUES;

par M. J. Neuberg.

Les développements suivants, sans apporter aucun fait nouveau, peuvent intéresser nos jeunes lecteurs à cause de leur forme analytique.

**1.** Soient $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $(x'_1, y'_1)$... les coordonnées rectangulaires des sommets de deux triangles ABC, A'B'C'. Les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur B'C', C'A', A'B' ont pour équations

$$(x - x_1)(x'_2 - x'_3) + (y - y_1)(y'_2 - y'_3) = 0,$$
$$(x - x_2)(x'_3 - x'_1) + (y - y_2)(y'_3 - y'_1) = 0,$$
$$(x - x_3)(x'_1 - x'_2) + (y - y_3)(y'_1 - y'_2) = 0.$$

Supposons qu'elles concourent en un même point D. Alors leurs équations doivent être compatibles; mais si on les ajoute membre à membre, les coefficients de $x$ et de $y$ se réduisent à zéro. On en conclut la condition

$$\Sigma x_1(x'_2 - x'_3) + \Sigma y_1(y'_2 - y'_3) = 0,$$

que nous écrivons ainsi

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y'_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

en convenant de dénoter un déterminant par sa première ligne lorsque les autres se déduisent de cette ligne par une permutation tournante des indices.

La forme de ce résultat montre immédiatement que les perpendiculaires abaissées des sommets du second triangle sur les côtés correspondants du premier concourent également en un même point D'.

Deux triangles ABC, A'B'C' qui jouissent de cette propriété, sont dits *orthologiques;* D et D' en sont les centres d'orthologie.

**2.** Si le triangle ABC est orthologique avec A'B'C' et avec B'C'A', on doit avoir les équations de condition (1) et

$$\begin{vmatrix} x_1 & x'_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y'_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

En ajoutant les égalités (1) et (2) membre à membre on trouve

$$\begin{vmatrix} x_1 & x'_1 + x'_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 + y'_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

En retranchant de la deuxième colonne de chacun des déterminants (3) la dernière multipliée par $\Sigma x'_1$ ou par $\Sigma y'_1$, on obtient

$$\begin{vmatrix} x_1 & x'_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Il résulte de là que *si deux triangles sont doublement orthologiques, ils le sont triplement.* (LEMOINE).

**3.** L'équation (3) admet l'interprétation suivante : *Si* ABC *est orthologique avec* A'B'C' et B'C'A', *il est également orthologique avec le triangle qui a pour sommets les milieux* C'', A'', B'' *des droites* AB, BC, CA; il y a même triple orthologie.

Plus généralement, *si* C'', A'', B'' *sont des points qui divisent les côtés du triangle* ABC *dans un même rapport* $n : m$, *les triangles* ABC, A''B''C'' *sont triplement orthologiques.* En effet, des équations (1), (3), (4), on déduit, par exemple,

$$\left| x_1 \quad mx_1' + nx_2' \quad 1 \right| + \left| y_1 \quad my_1' + ny_2' \quad 1 \right| = 0.$$

On peut même généraliser davantage. En effet

$$\left| x_1 \quad mx_1' + nx_2' + px_3' \quad 1 \right| + \left| y_1 \quad my_1' + ny_2' + py_3' \quad 1 \right| = 0;$$

donc, *étant donnés deux triangles triorthologiques* ABC, A'B'C' *tout triangle isobarique avec* ABC *est triorthologique avec tout triangle isobarique avec* A'B'C'.

Nous appelons ici triangle isobarique avec ABC un triangle qui a pour sommets trois points dont les coordonnées barycentriques par rapport à ABC sont de la forme $(m, n, p)$, $(n, p, m)$, $(p, m, n)$.

**4.** Soient A'B'C', A''B''C'' deux triangles orthologiques avec ABC; si $(x_1', y_1') \cdots$ sont les coordonnées des points $A_1' \cdots$ on a les deux égalités

$$\left| x_1 \quad x_1' \quad 1 \right| + \left| y_1 \quad y_1' \quad 1 \right| = 0, \qquad (1)$$

$$\left| x_1 \quad x_1'' \quad 1 \right| + \left| y_1 \quad y_1'' \quad 1 \right| = 0. \qquad (5)$$

D'où l'on déduit

$$\left| x_1 \quad mx_1' + nx_1'' \quad 1 \right| + \left| y_1 \quad my_1' + ny_1'' \quad 1 \right| = 0. \qquad (6)$$

Il en résulte que *si le triangle* ABC *est orthologique avec deux autres triangles* A'B'C', A''B''C'', *il est également orthologique avec tout triangle* $A_1B_1C_1$ *dont les sommets divisent dans un même rapport les droites* A'A'', B'B'', C'C''.

Le centre d'orthologie du triangle variable $A_1B_1C_1$ par rapport au triangle fixe ABC décrit une droite; le centre d'orthologie du triangle fixe ABC par rapport au triangle variable $A_1B_1C_1$ décrit une hyperbole équilatère. Ces deux lieux s'établissent facilement, soit par la géométrie, soit par le calcul.

## PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE(*),

par M Soons (Tirlemont).

Si à un triangle donné ABC on circonscrit un triangle A'B'C' semblable au triangle ABC, le triangle A'B'C' peut-être placé de six manières différentes par rapport au triangle ABC.

Pour chaque disposition, il y a une infinité de solutions dont les sommets sont situés sur des circonférences déterminées, passant par deux des points A, B, C.

Les trois circonférences qui correspondent à une disposition quelconque se coupent en un même point, qui est le centre de similitude de tous les triangles correspondants. On a donc six de ces points. L'un de ces points est l'orthocentre, deux autres sont les points de Brocard.

Les trois derniers jouissent de quelques propriétés assez curieuses. Comme ils sont situés d'une façon symétrique dans le triangle, il suffit d'en considérer un.

Le triangle A' B' C' étant disposé de façon que A' est opposé à A, B' à C et C' à B, la circonférence ABB' est tangente à $a$ en B, la circonférence ACC' touche $a$ en C, celle qui est circonscrite à A'BC est égale au cercle circonscrit et passe par H. Les deux premières sont les *circonférences adjointes* (ABB), (ACC), la lettre répétée indiquant qu'il y a contact au point correspondant avec un côté du triangle ABC. Soit $\varphi$ le point commun.

1. Le produit des rayons des deux premières vaut $R^2$. En effet,

$$2R' \sin B = c = 2R \sin C, \quad 2R'' \sin C = b = 2R \sin B,$$

d'où
$$R'R'' = R^2.$$

2. Le point $\varphi$ se trouve sur la médiane AM. En effet, l'axe radical A$\varphi$ des cercles (ABB), (ACC) doit passer par le milieu de la tangente commune BC. On peut remarquer que

$$M\varphi = \frac{a^2}{4m}, \quad A\varphi = \frac{4m^2 - a^2}{4m} = \frac{bc \cos A}{m},$$

$m$ désignant la longueur de la médiane AM.

---

(*) La question traitée par M. Soons n'est pas entièrement nouvelle; voir par exemple, le paragraphe *sur les figures semblablement variables* de notre Note sur la Géométrie récente du triangle, dans le *Traité de Géométrie par Rouché et de Comberousse, et Mathesis*, (1) X, p. 166. Quoi qu'il en soit, l'article de M. Soons peut intéresser beaucoup de lecteurs de *Mathesis*. (J. N.)

3. L'angle $\varphi CB = \varphi AC$ et $\varphi BC = \varphi AB$; donc si l'on prolonge AM de $MA_1 = AM$, le triangle $\varphi BC$ est semblable à $BAA_1$ ; d'où

$$\frac{C\varphi}{B\varphi} = \frac{b}{c},$$

donc $\varphi$ est le point de rencontre du cercle d'Apollonius relatif à BC, avec la médiane AM.

4. La perpendiculaire au milieu de la corde commune $A\varphi$ passe par les centres des cercles adjoints et du cercle d'Apollonius. Elle passe aussi par le milieu de AH, H étant l'orthocentre de ABC; car $HA_1$ est un diamètre du cercle BCH qui passe par $\varphi$, l'angle $HBA_1$ étant droit.

5. $\varphi$ est la projection de H sur la médiane; car on vient de démontrer que l'angle $A_1\varphi H$ est droit.

6. Le triangle podaire de $\varphi$ est isoscèle, et ses côtés égaux sont tangents à la circonférence décrite sur $A\varphi$ comme diamètre.

Soient R, S, T les projections de $\varphi$ sur BC, BA, AC.

Dans le quadrilatère inscriptible $\varphi TCR$, l'angle $\varphi TR = \varphi CR = \varphi AC$; de même *angle* $\varphi TS = \varphi AS$; donc $STR = A$ et TR touche la circonférence; de même *angle* $TSR = A$.

7. Les tangentes RT, RS sont égales aux perpendiculaires BX, CY abaissées des sommets B et C sur la médiane.

En effet, $\varphi B$ étant le diamètre du cercle circonscrit au triangle $\varphi RS$, on a $RS = \varphi B \sin ABC$; or, le triangle $MB\varphi$ étant semblable au triangle $MA_1C$, l'angle $ABC = M\varphi B$. Par conséquent, $RS = B\varphi \sin M\varphi B = BX$.

8. Le point $\varphi$ est symétrique par rapport à M de l'extrémité $A_2$ de la médiane dans le cercle circonscrit. Cela résulte de l'égalité

$$MB \cdot MC = MA \cdot M\varphi = MA \cdot MA_2.$$

Il est aussi symétrique par rapport à BC de l'extrémité $A_3$ de la symédiane AK dans le même cercle. En effet, $A_2A_3$ étant parallèle à BC, on a $MA_2 = MA_3 = M\varphi$.

Ses coordonnées normales sont

$$x : y : z = \operatorname{tg} A : 2 \sin C : 2 \sin B;$$

on les déduit facilement de

$$\frac{\varphi S}{\varphi T} = \frac{\sin \varphi AS}{\sin \varphi AT} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{\varphi R}{\varphi S} = \frac{\sin CB\varphi}{\sin AB\varphi} = \frac{\sin \varphi AB}{\sin AB\varphi}.$$

## ×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**12**. *Sur la quadrature du cercle* (Extrait d'une lettre de M. le Dr. Quint, à la Haye). Tout passe, tout revient, surtout dans les questions qui se rapportent à la quadrature du cercle.

La note empruntée aux *Archives de Grunert* 1849 (*Mathesis*, page 118), donne une construction géométrique d'une formule d'Euler trouvée en 1737. Mais ce qui est bien curieux, en 1899, M. Goering a publié une brochure « *Die Auffindung der rein-geometrischen Quadratur des Kreises* (Dresden, Schürmann) » où il donne tout à fait la même construction que M. Scheffler.

La rectification est très approchée. Quand on prend

$$\pi = \frac{2}{\cos\frac{1}{4}\pi\,\cos\frac{1}{8}\pi\cdots\cos\frac{1}{2048}\pi},$$

on trouve

$$\pi = 3{,}1415927.$$

×**13**. *Nouvelle démonstration d'un théorème de géométrie élémentaire.* Les élèves ont généralement de la peine à bien présenter la démonstration du théorème suivant et de sa réciproque :

*Le lieu des points* C *dont les distances à deux points fixes* A, B *sont dans un rapport constant* $\lambda$, *est une circonférence.*

Voici comment on pourrait procéder. Si CA > CB, construisons (vers l'extérieur du triangle CAB) l'angle BCO = CAB et soit O le point de rencontre du second côté de cet angle avec AB. Les triangles OCA, OBC étant équiangles, on a

$$\frac{OA}{\overline{OC}} = \frac{OC}{OB} = \frac{CA}{CB} = \lambda, \qquad (1)$$

d'où l'on déduit (en faisant le produit des deux premiers rapports)

$$\frac{OA}{\overline{OB}} = \lambda^2, \quad \overline{OC}^2 = OA.OB.$$

La première relation montre que le point O est fixe; de la seconde, on déduit que OC a une longueur constante.

Réciproquement, si C est un point quelconque de la circonférence (O, OC), l'égalité $\overline{OC}^2 = OA \,.\, OB$ ou $OA : OC = OC : OB$ montre que

les triangles OCA, OBC sont semblables; on a ensuite les proportions (1), etc. (G. TARRY.)

×§ 4. *Sur la question d'examen 985 :* Résoudre un triangle ABC, connaissant un côté BC = $a$, la longueur de la bissectrice de l'angle BAC et l'angle ADB = $\theta$. La bissectrice AD = $\alpha$ et l'angle ADB = $\theta$ déterminent la hauteur AE = $h$ et la différence $\delta$ = 2DAE des angles à la base. Cette position de $\delta$ n'étant pas favorable, traçons un cercle de centre A et de rayon AB < AC qui coupe BC en F. Ce procédé nous donne l'angle FAC = $\delta$. Le prolongement de FA rencontre la perpendiculaire élevée en B sur BC au point G de sorte que GB = 2$h$. Le point A se trouve alors sur une parallèle à BC et sur un segment de cercle passant par C et G et capable de l'angle GAC = 180° — $\delta$.

La parallèle passe par le milieu de GC. Or, si l'on mène par un point d'une corde GC d'un segment une droite quelconque autre que GC, elle rencontre la périphérie du segment une fois et seulement une fois. La question a donc toujours une solution et seulement une si l'on veut que AB < AC. — Le second point de rencontre de la parallèle et du cercle donne un triangle A'BC dans lequel C — B = 180° — $\delta$.

Une autre manière de représenter l'angle B — C = $\delta$ est fournie par la tangente AH au cercle circonscrit. Le triangle rectangle AHE dans lequel AE = $h$, l'angle AHE = $\delta$ ou = 180° — $\delta$ donne AH, et comme $\overline{HA}^2$ = HB.HC, on a, en désignant le milieu de BC par I,

$$HI^2 = AH^2 + \tfrac{1}{4} BC^2.$$

Si le sommet A et les pieds E, D de la hauteur et de la bissectrice sont fixes, les points B et C sont en involution hyperbolique avec l'origine H et avec le point double D. Cela résulte de ce qui précède.

On peut aussi partir des ponctuelles projectives B, C et porter de chaque point C vers D la longueur CB' de la base donnée. On a ainsi les deux ponctuelles projectives superposées B, B' et il s'agit de déterminer leurs éléments doubles. (EMMERICH.)

---

## BIBLIOGRAPHIE.

S. ORTU CARBONI. Esercizi di Geometria elementare. Oltre 1350 con razionali avviamenti alle soluzioni. Livorno, Giusti, 1901 (VIII-170 p. in-18). Prix : 1 franc.

Collection très bien graduée de 1350 exercices de géométrie élémentaire, avec des indications très sommaires sur la voie à suivre pour les résoudre. Il y a 563

exercices sur la géométrie plane (pp. 1-74), 328 sur la géométrie solide (pp. 75-112), 459 sur la géométrie plane et la géométrie solide (équivalence; similitude; polygones et polyèdres réguliers; rectifications, quadratures et cubatures; relations segmentaires: questions d'examens).

---

**Traité de Géométrie** par E Rouché et Ch. de Comberousse. Septième édition, revue et augmentée, par E. Rouché, membre de l'Institut, etc. Géométrie plane (XLII-548 p.). Géométrie dans l'espace (XVIII-664 p.). Paris, Gauthier-Villars. 1900. Prix : 7,50 fr. et 9,50 fr.

Il a paru un compte rendu critique de la sixième édition de cet ouvrage dans *Mathesis*, 1892, Supplément, pp. 1-12 (ou *Revue des questions scientifiques*, 1892, 2e série, t. I, pp. 250-261). Nous y renvoyons le lecteur et nous nous contentons de signaler les principaux changements introduits par M. Rouché dans la 7e édition du *Traité de Géométrie*. 1° Un paragraphe sur la symétrie a été introduit à la fin du premier livre (I, pp. 51-56). 2° Théorie des cercles isogonaux dans le plan (I, pp. 293-296). 3° Solution de Poncelet et M. Fouché pour le problème : mener un cercle tangent à trois cercles donnés. 4° Démonstration de la transcendance de $\pi$, d'après M Hilbert, au lieu de la démonstration de M. Lindemann.

Il y a trois notes nouvelles. La première (Note IV du tome I, pp. 517-548) est consacrée à la *Géométrographie* et est due à l'inventeur même de cette section de la science, M. E. Lemoine, qui l'a exposée autrefois dans *Mathesis*. Depuis la publication du *Traité de Géométrie*, M. Lemoine a étendu ses curieuses recherches à l'espace.

La note II du tome II sur la Géométrie non euclidienne (pp. 575-593) a été partiellement remaniée. L'introduction en est restée la même; mais la trigonométrie non euclidienne qui était exposée dans la 6me édition d'après Battaglini (en admettant au fond un postulat indémontrable de cette manière), est remplacée par une étude de M. Poincaré où il fait connaître ses idées fondamentales sur les premiers principes de la Géométrie.

La note III du tome II (pp. 595-641) est due à M. Neuberg, qui y condense sous une forme simple les principaux résultats de la théorie des transformations linéaires et quadratiques, dont la connaissance est aujourd'hui indispensable en Géométrie. Cet exposé clair et méthodique sera extrêmement précieux à ceux qui désirent s'initier rapidement aux méthodes de la géométrie moderne, en leur permettant de compléter et de coordonner les développements relatifs à la projectivité et à la réciprocité des formes fondamentales et qui sont un peu disséminés dans le traité.

Les expressions « radiées », « feuillées » valent-elles mieux que les équivalentes « faisceaux de rayons », « faisceaux de plans »? (*).

---

(*) Le mot faisceau revient si souvent qu'il nous a paru désirable de disposer de deux mots simples pour désigner le faisceau de droites et le faisceau de plans.

Dans la détermination des éléments doubles de deux systèmes plans projectifs superposés, due à Chasles, ne doit-on pas établir que les coniques $\Sigma$ et $\Sigma'$ n'ont pas un contact du troisième ordre au point R intersection des droites AB et A'B', p. ex ainsi : on suppose $B \equiv A'$ et les trois points A, A', B' non en ligne droite, ce qui est toujours possible si les systèmes plans ne sont pas perspectifs. La conique $\Sigma$ passe par B et est tangente en ce point à la droite BB'; la courbe $\Sigma'$ est tangente en B à la droite AB (Voir v. STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, n° 301).

Voici le sommaire des matières traitées dans la note Formes perspectives. Transformations linéaires. Transformations quadratiques. Inversions triangulaires. Hyperboles équilatères circonscrites à un triangle. Transformations par points réciproques. Ellipses de Steiner. Figures orthogonalement affines. Figures affines superposées. Système de deux figures semblables superposées. Système de trois figures directement semblables. Exercices (où se trouvent résumées les propriétés de coniques remarquables étudiés par MM. Artt, Brocard, Jeřabek, Lemoine, de Longchamps, Mandart, etc.). (CL. S.)

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Question 1128.

(Voir *Mathesis*, t. XVII, p. 215.)

*Soient* O *le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC, *et* I *le centre du cercle inscrit, qui touche* BC, CA, AB *en* A', B', C'. *La parallèle à la droite* OI *menée par* A' *rencontrant la circonférence* I *en* $\alpha$, *démontrer que la perpendiculaire abaissée de* $\alpha$ *sur la droite* B'C' *rencontre la circonférence* I *au point de contact* F *de cette circonférence avec la circonférence des neuf points de* ABC. (DROZ-FARNY).

---

Le terme *feuillée* est emprunté à la *Géométrie de position* par M. L. Bertrand; cet auteur emploie ainsi les expressions *lignée* pour ponctuelle, *biquotient* pour rapport anharmonique, *système primaire* pour *forme du premier ordre*.

La terminologie, en géométrie moderne, aurait besoin d'être fixée définitivement. Par exemple, des auteurs se sont servis du mot *projectivité* pour des transformations non linéaires; du mot *affinité* qui avait déjà une signification déterminée, pour désigner une transformation (*Verwandtschaft*) quelconque. Les figures polaires réciproques de Poncelet ont donné lieu à la dénomination *de figures réciproques*, qui correspond plutôt à l'idée de *réversibilité* ou d'*involution*: Chasles avait proposé *figures corrélatives*. Les transformations les plus usitées dans la géométrie du triangle, à savoir l'*inversion triangulaire*, la *transformation par points réciproques* ou par *droites harmoniquement associées* avaient été primivement appelées transformations par points isogonaux, par points isotomiques, par polarité trilinéaire. (J. N.)

*Solution par* M. Emmerich. On peut ramener la démonstration de cette proposition à celle que M. Binder (*) a donnée en 1872 du célèbre théorème de Feuerbach. Je me sers à cet effet de considérations analogues à celles qu'on trouve dans un programme scolaire de 1882 par M. H. Schubert (*).

A'$\alpha$ étant parallèle à IO et $\alpha$F parallèle à IA, l'angle A'$\alpha$F est égal à OIK, où K désigne le point de rencontre de AI avec la circonférence O. Menons alors le rayon IE parallèle à AO, et traçons la droite FE qui rencontre BC en D. On a d'abord *angle* A'EF = A'$\alpha$F = OIK, par conséquent, A'ED=AIO. AO et la hauteur AL formant des angles égaux avec AI, il en est de même de IE et IA'; A'E sera donc perpendiculaire à AK. Comme A'D est aussi perpendiculaire à OK, les angles EA'D et IKO ou IAO sont égaux, et les triangles A'ED et AIO sont semblables. De là, on conclut

$$A'E.\ AO = A'D.\ AI.$$

D'un autre côté, on a

$$2\ A'I.AO = KI.AI,$$

donc

$$A'E.KI = 2\ A'D\ A'I.$$

Comme A'E.KI est le double du quadrilatère A'IEK, A'D.A'I sera le double du triangle A'IK; d'où l'on conclut que KD est parallèle à A'I, c'est-à-dire que D est le milieu de BC.

N désignant le point de rencontre de AK et BC, M. Binder conclut alors des triangles semblables BKN et AKB que $\overline{KB}^2 = \overline{KI}^2 = KN.KA$, donc aussi par projection $\overline{DA'}^2 = DN.DL$. De DN.DL = DE.DF, on déduit que le quadrilatère NLFE est inscriptible et que l'angle LFD = END = A'IE = LAO. M étant le centre du cercle des neuf points, on sait que ML = MD et que les droites homologues MD et AO sont parallèles. On voit donc que l'angle LFD = $\frac{1}{2}$ LMD; par conséquent, le point F est sur la circonférence des neuf points. Les triangles isosceles FIE, FMD étant semblables, puisque IE est parallèle à MD, on conclut que F, I, M sont en ligne droite et que F est le point de contact des cercles I et M.

Note. Nous publions cette démonstration bien qu'elle nous paraisse trop compliquée, dans l'espoir qu'un lecteur réussira à la simplifier ou à la rendre plus naturelle.

---

(*) Voir le programme de M. I. Lange. *Geschichte des Feuerbachschen Kreises*; Berlin 1894, p. 27, 28.

La démonstration la plus simple du théorème de Feuerbach consiste à transformer par rayons recteurs réciproques le cercle I, le cercle exinscrit I', et la quatrième tangente commune à ces deux cercles, en prenant pour cercle d'inversion celui qui a pour diamètre la distance des points de contact de BC avec les cercles L et I'.

On trouve alors que F est à l'intersection du cercle I avec la droite joignant le milieu D de BC au symétrique E de A' par rapport à AI. (J.N.)

---

## Question 1190.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 240).

*On considère les paraboles tangentes à trois droites données a, b, c. Soient* F *le foyer de l'une de ces courbes, et* A, B, C *les points où elle touche a, b, c.*

1° *Démontrer que les droites* FA, FB, FC, *pivotent autour de trois points fixes* (Soons). 2° *On mène à la parabole considérée une quatrième tangente d parallèlement à une direction fixe*; D *étant le point de contact, le rayon* FD *tourne autour d'un point fixe* (Plücker). 3° *Les cordes* DA, DB, DC *tournent autour de trois points fixes* (J. N.). 4° *Le point* D *décrit une conique* (J. N.).

*Solution par* M. J. Degueldre. Désignons par A', B', C' les points d'intersection des tangentes *b* et *c*, *c* et *a*, *a* et *b*. Le foyer F de la parabole considérée se meut sur la circonférence circonscrite au triangle A'B'C'; soient I et P les points d'intersection de cette circonférence avec FA et FD. Cela posé :

1° L'angle AFC étant constant, l'angle AFB' qui en vaut la moitié l'est aussi; l'arc B'I est donc invariable et AF pivote autour du point I, où la parallèle menée par A' à *a* coupe la circonférence A'B'C'. La même démonstration peut se répéter avec les droites FB et FC.

2° L'angle des tangentes *a* et *d* étant constant, il en est de même de l'angle AFD; par suite, le point I étant fixe, le point P l'est aussi et FD pivote autour de P.

3° Appelons S et N les points d'intersection de *d* avec *a* et *c*. On sait que les droites B'M, NM menées parallèlement aux tangentes *d*, *a* se coupent en un point M de leur corde de contact DA. Cela étant, les points M et A marquent le premier sur B'M, le second sur *a* deux ponctuelles

projectives; en effet, l'un de ces points étant donné, la parabole est déterminée et l'autre s'ensuit. Ces ponctuelles sont même perspectives, car lorsque la tangente $d$ est menée par B', les points homologues A et M se réunissent en B' qui devient un élément uni; la droite MA ou DA pivote donc autour d'un point fixe que nous désignerons par K. L'analogie montre que les cordes DB, DC pivotent aussi chacune autour d'un point fixe.

4° La tangente $d$ engendre un faisceau de droites parallèles projectif avec le faisceau engendré par la droite KD. L'intersection D de leurs rayons homologues décrit donc une conique.

M. Déprez a traité les 1° et 2° de la question comme ci-dessus. Pour le 3°, il s'appuie sur cette propriété que les cordes de contact AB, BC, CA d'une parabole inscrite au triangle $abc$ pivotent autour des sommets du triangle anticomplémentaire de $abc$; en appliquant cette propriété aux deux triangles $abd$, $acd$, il détermine la corde DA et observe que cette droite marque sur les parallèles menées à $d$ par les points $ab$, $ac$ des ponctuelles semblables. Enfin, il déduit le 4° de ce que le triangle ACD se déforme de manière que les côtés pivotent autour de trois points fixes et que deux sommets parcourent deux droites fixes.

M. B. Buysens a résolu la même question en s'appuyant sur la propriété de l'hexagone de Brianchon.

Solution analytique par M. Audibert dans l'hypothèse où le triangle $abc$ est rectangle.

---

## Question 1257.

(Voir *Mathesis*, (2), X. p. 56.)

*Si $l$, $m$, $n$ sont les projections des côtés d'un triangle sur une même direction, quelle doit être cette direction pour que $l^2+m^2+n^2$ soit maximum ou minimum?* (E. Lemoine).

*Solution par* M. E. Césaro. Soient $a^2$ et $b^2$ les sommes des carrés des projections des côtés du triangle sur les axes de l'ellipse de Steiner. Les coordonnées des sommets du triangle par rapport à ces axes vérifient les relations

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad y_1+y_2+y_3=0,\quad x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0,$$

et les projections des côtés sur une droite faisant l'angle $\theta$ avec l'axe des $x$ sont

$$l=(x_2-x_3)\cos\theta+(y_2-y_3)\sin\theta;\ \text{etc.}$$

D'ailleurs la multiplication de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \text{ par } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

conduit immédiatement à l'identité

$$\Sigma (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) = 3\Sigma x_1 y_1 - \Sigma x_1 . \Sigma y_1 = 0.$$

Donc

$$l^2 + m^2 + n^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta.$$

Il en résulte que *les directions demandées sont précisément celles des axes de l'ellipse de Steiner*.

*Solution par* M. Emmerich. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varphi$ les inclinaisons de BC, CA, AB et de la direction cherchée sur un même axe $x'x$; $u^2$ désignant la somme $l^2 + m^2 + n^2$, on a

$$\frac{u^2}{4R^2} = \Sigma \sin^2 A \cos^2 (\alpha - \varphi) = \Sigma \sin^2 A \frac{1 + \cos 2(\alpha - \varphi)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma \sin^2 A + \frac{1}{2} [M \cos 2\varphi + N \sin 2\varphi)],$$

où

$$M = \Sigma \sin^2 A \cos 2\alpha, \quad N = \Sigma \sin^2 A \sin 2\alpha.$$

Or, si l'on pose $\operatorname{tg} \lambda = \frac{N}{M}$, on peut écrire

$$\frac{u^2}{2R^2} = \Sigma \sin^2 A + \frac{M \cos (2\varphi - \lambda)}{\cos \lambda};$$

d'où l'on conclut que les valeurs extrêmes de $u^2$ correspondent à

$$2\varphi - \lambda = 2n\pi \quad \text{ou} \quad (2n + 1)\pi;$$

les directions cherchées sont donc définies par

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \quad \text{ou} \quad = -\cot \frac{\lambda}{2};$$

ce sont celles des bissectrices des angles formés par $x'x$ avec une droite inclinée de l'angle $\lambda$ sur $x'x$.

Si l'on fait coïncider $x'x$ avec BC, on trouve

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{\sin (B - C)}{\sin A} \frac{\sin V}{\sqrt{1 - 4 \sin^2 V}},$$

V désignant l'angle de Brocard. D'où l'on conclut (voir Emmerich, *die Brocard'sche Gebilde*) que $2\varphi$ est l'un des angles que BC fait avec le

côté $B_1C_1$ du premier triangle de Brocard; par suite, les directions cherchées sont celles des axes de l'ellipse de Steiner ou celles des asymptotes de l'hyperbole de Kiepert.

M. Déprez a résolu la même question en rapportant la figure aux axes de l'ellipse de Steiner et en désignant les coordonnées A, B, C par

$$(\mathfrak{A}\cos\alpha, \mathfrak{B}\sin\alpha),\ [\mathfrak{A}\cos(\alpha+120^\circ), \mathfrak{B}\sin(\alpha+120^\circ)]$$
$$[\mathfrak{A}\cos(\alpha+240^\circ), \mathfrak{B}\sin(\alpha+240^\circ)].$$

Si $\varphi$ est l'angle de l'axe de projection avec l'axe des $x$, il trouve

$$l^2+m^2+n^2=\frac{9}{2}(\mathfrak{A}^2\cos^2\varphi+\mathfrak{B}^2\sin^2\varphi);$$

d'où il conclut qu'un maximum $\frac{9}{2}\mathfrak{A}^2$ et un minimum $\frac{9}{2}\mathfrak{B}^2$ correspondent respectivement au grand et au petit axe de l'ellipse de Steiner.

---

## Question 1260.

(Voir *Mathesis*, (2, X, pp. 56 et 257).

*En chaque point* M *d'une courbe donnée* $\Sigma$ *on mène la symétrique* $t'$ *de la tangente* $t$ *à* $\Sigma$ *par rapport à l'ordonnée de* M; *cette droite enveloppe une nouvelle courbe* $\Sigma'$. *Comment construit-on le point de contact de* $t'$ *avec* $\Sigma'$? *Cas particulier de la chaînette* (Enoncé abrégé).

*Solution par* M. E. Cesàro. Soit $\theta$ l'inclinaison de la tangente à une courbe sur une droite fixe. La courbe peut être *définie*, quant à la forme, par l'équation $\rho=\varphi(\theta)$, qui donne le rayon de courbure en fonction de $\theta$. Soient $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque par rapport à la tangente et à la normale à la courbe donnée, en un point variable M. On sait que, lorsque M se déplace infiniment peu sur la courbe, les variations de $x$ et $y$, par rapport aux premiers axes, sont

$$\partial x=dx-yd\theta+ds,\quad \partial y=dy+xd\theta. \tag{1}$$

La droite dont il faut chercher l'enveloppe est représentée par l'équation

$$x\sin 2\theta+y\cos 2\theta=0, \tag{2}$$

dont la dérivation par rapport à $\theta$, faite en tenant compte des relations (1), dans lesquelles on suppose $\partial x=0$, $\partial y=0$, donne

$$x\cos 2\theta-y\sin 2\theta=\rho\sin 2\theta, \tag{3}$$

équation d'une droite perpendiculaire à la précédente, et passant par le point $x=0$, $y=-\rho$. Donc *le point cherché* $M_1$, *est la projection, sur*

*la droite considérée, du point symétrique, par rapport à* M, *du centre de courbure de la courbe en ce point.* On retrouve, en particulier, la construction du centre de courbure de l'hyperbole équilatère en remarquant que, dans ce cas, $M_1$ est le centre de la courbe. Maintenant les équations (2) et (3) donnent les coordonnées de $M_1$ :

$$x = \tfrac{1}{2}\rho \sin 4\theta, \quad y = \tfrac{1}{2}\rho \cos 4\theta - \tfrac{1}{2}\rho;$$

puis, par substitution de ces résultats dans les formules (1),

$$\frac{\delta x}{\cos 2\theta} = -\frac{\delta y}{\sin 2\theta} = 3\rho \cos 2\theta \,.\, d\theta + \sin 2\theta \,.\, d\rho.$$

Telle est donc l'expression de l'arc élémentaire $ds_1$ de la seconde courbe. D'ailleurs l'angle de contingence est évidemment $\pm d\theta$. Donc $ds_1 = \rho_1 d\theta$, et, par suite,

$$\rho_1 = 3\varphi(\theta) \cos 2\theta + \varphi'(\theta) \sin 2\theta.$$

Cette équation caractérise la seconde courbe. Par exemple, la chaînette et la parabole étant caractérisées par les équations respectives

$$\rho = \frac{a}{\cos^2\theta}, \quad \rho = \frac{a}{\cos^3\theta},$$

on trouve $\rho_1 = \rho + 2a$, $\rho_1 = 3\rho$. Donc, si la première courbe est une chaînette, la seconde est *parallèle à une chaînette égale :* celle-ci est symétrique de la première par rapport à la base commune. Si la première courbe est une parabole, la seconde est une parabole trois fois plus grande; etc.

---

## Question 1276.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 152).

*Étant donnée une hyperbole équilatère dont* $\overline{AB}$ *est l'axe transverse et une parabole ayant pour foyer le centre de l'hyperbole et pour directrice la tangente au sommet* B, *une tangente mobile de la parabole coupe l'hyperbole aux points* $H_1$, $H_2$ : *on demande l'enveloppe des ellipses qui ont* $H_1H_2$ *pour diamètre et passent par les deux points fixes* A, B. (V. Retali).

*Solution par* MM. E. N. Barisien, Déprez et G. Gérard. L'hyperbole équilatère ayant pour équation

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0. \qquad (1)$$

l'équation de la parabole de l'énoncé est

$$y^2 - 2ax - a^2 = 0. \qquad (2)$$

La tangente au point M $(x_1, y_1)$ de cette parabole a pour équation

$$yy_1 - a(x + x_1) - a^2 = 0, \tag{3}$$

avec la condition

$$y_1^2 - 2ax_1 - a^2 = 0. \tag{4}$$

L'équation générale des coniques qui passent par les points de rencontre de l'hyperbole avec l'axe des $x$ et avec la tangente (3), c'est-à-dire qui passent par les quatre points $H_1$, $H_2$, A, B, s'écrit

$$\lambda(x^2 - y^2 - a^2) + y(yy_1 - ax - ax_1 - a^2) = 0,$$

ou

$$\lambda x^2 + (y_1 - \lambda)y^2 - axy - a(x_1 + a)y - \lambda a^2 = 0. \tag{5}$$

Les coordonnées du centre sont données par les équations

$$2\lambda x - ay = 0, \tag{6}$$

$$2(y_1 - \lambda)y - ax - a(x_1 + a) = 0. \tag{7}$$

En éliminant $x$ et $y$ entre les équations (3), (6) et (7), on exprime que le centre de la conique (5) est situé sur la tangente (3). Retranchons (3) et (7); il vient

$$2(y_1 - \lambda)y - yy_1 = 0,$$

d'où $\lambda = \frac{y_1}{2}$, et l'équation générale (5) devient

$$y_1(x^2 + y^2) - 2axy - 2a(x_1 + a)y - a^2y_1 = 0.$$

En y substituant $x_1$ tirée de (4), on obtient pour cette équation générale en fonction de $y_1$

$$y_1(x^2 + y^2) - 2axy - y(y_1^2 + a^2 - a^2)^2 y_1 = 0. \tag{8}$$

Cette conique sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que $y_1$ sera supérieur, inférieur ou égal à $a$.

L'équation (8) ordonnée par rapport à $y_1$ s'écrit

$$yy_1^2 - y_1(x^2 + y^2 - x^2) + ay(2x + a) = 0;$$

d'où l'on conclut l'équation de l'enveloppe

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 - 4ay^2(2x + a) = 0.$$

Cette courbe est une quartique bicirculaire ayant pour points doubles les deux sommets A et B de l'hyperbole donnée; le point double $(x = -a, y = 0)$ est isolé. C'est donc une courbe fermée, ayant deux branches se coupant au point $(x = a, y = 0)$. Le coefficient angulaire des tangentes en ce point est $\mp \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarques I. Cette courbe a été signalée récemment par M. H. Brocard dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (question 1755, février 1900). M. V. Retali, en étudiant cette courbe a reconnu qu'on peut lui inscrire un hexagone de Steiner. C'est un des rares exemples de quartiques binodales. (Barisien).

II. Le lieu des centres des coniques (8) est la cubique unicursale

$$2x(x^2 - y^2) + a(x^2 + y^2) = 0.$$

(Barisien, Déprez).

En prenant pour axes coordonnés l'axe transverse de l'hyperbole et la tangente en B, M. Soons trouve pour l'équation de l'enveloppe

$$y = \pm\sqrt{2ax} \pm 2\sqrt{(a-x)x}$$

et observe que la parabole $y^2 = 4ax$ et l'ellipse $y^2 + 4x^2 - 4ax = 0$ jouent le rôle de diamètres.

---

## ×Question 1801.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 88.)

*Étant donnés trois points* A, B, C, *mener par un point* D, *situé en dehors du plan* ABC *sur une perpendiculaire* DE *au milieu de* AB, *une droite perpendiculaire à* DE *et équidistante des points* B *et* C.

*Solution par* MM. Emmerich *et* Soons. Supposons le problème résolu par la droite DH, de sorte que les perpendiculaires BB', CC' abaissées sur DH soient égales. Joignons les milieux F, F' de BC, B'C' respectivement. Un premier lieu du point F' est le plan perpendiculaire sur ED en D. Les triangles rectangles égaux BB'F', CC'F' font voir que BF' = CF' ; un second lieu de F' sera donc le plan perpendiculaire sur BC en F. Des triangles rectangles égaux BB'C', CC'B' on conclut que BC' = CB' ; par conséquent, les triangles BB'C, CC'B ont leurs côtés égaux, de même les médianes correspondantes B'F, C'F. FF' est donc perpendiculaire sur DH, et un troisième lieu du point F' est la sphère de diamètre FD.

*Solution par* M. Colart. La droite cherchée se trouve dans le plan mené par D perpendiculairement à DE. Soient B'et C' les projections de B et C sur ce plan, $a$ et $b$ les projetantes BB' et CC' ; $x$ et $y$ les distances B'B'' et C'C'' et B' et C' à la droite cherchée. Nous désignerons par (O, R) le cercle de centre O et de rayon R.

On doit avoir

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2, \quad \text{d'où} \quad x^2 - y^2 = b^2 - a^2.$$

Par suite, l'axe radical MZ des cercles (B′, $x$) et (C′, $y$) est le même que celui des cercles (B′, $b$) et C′, $a$). Comme cet axe radical passe par le milieu M de B″C″, on a la solution suivante : On joint D au milieu I de B′C′ et le point M où l'axe radical de (B′, $b$) et (C′, $a$) coupe la circonférence de diamètre ID est un second point de la droite cherchée.

---

## ×Question 1818.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 112.)

*Résoudre les équations*

$$\frac{x^2(y^2+z^2+2yz\cos A)}{\sin^2 A}=\frac{y^2(z^2+x^2+2zx\cos B)}{\sin^2 B}=\frac{z^2(x^2+y^2+2xy\cos C)}{\sin^2 C},$$

où $A+B+C=\pi$. (Lemoine).

I. Si l'on considère $x$, $y$, $z$ comme les coordonnées normales absolues MA′, MB′, MC′ d'un point M par rapport au triangle de référence ABC, on a

$$\frac{1}{MA^2}=\frac{y^2+z^2+2yz\cos A}{\sin^2 A},\ \ldots;$$

par suite le système proposé revient à chercher un point M dont les coordonnées tripolaires MA, MB, MC soient inversement proportionnelles aux valeurs absolues des coordonnées normales. On en conclut que les triangles MBC′, MCB′ sont semblables; donc les angles MBC′, MCB′ sont égaux.

Or, cette égalité, d'après la situation relative des points $A_1$, B, $M_1$, C, peut indiquer que ces points appartiennent à une même circonférence. Mais on constate sans difficulté qu'effectivement tout point de la circonférence ABC vérifie les égalités

$$MA.MA'=MB.MB'=MC.MC'.$$

Si la situation relative des points A, B, M, C est autre, on déduit, des égalités des angles MBC′ et MCB′, MCA′ et MC′A, MAB′ et MA′B. que le point M est l'orthocentre du triangle ABC.

II. Soient X, Y, Z les coordonnées de l'inverse triangulaire M′ du point M. En remplaçant $x$, $y$, $z$ par $\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}$, on change le système proposé en

$$\frac{Y^2+Z^2+2YZ\cos A}{\sin^2 A}=\frac{Z^2+X^2+2ZX\cos B}{\sin^2 B}=\frac{X^2+Y^2+2XY\cos C}{\sin^2 C}. \quad (1)$$

On en conclut que M' est équidistant des points A, B, C; donc M' est le centre du cercle ABC ou est un point quelconque à l'infini. On retrouve ainsi la première solution.

III. Si l'on remplace cos A par sa valeur tirée de

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A,$$

le premier des rapports (1) devient, successivement,

$$\frac{(Y^2 + Z^2) \sin B \sin C + YZ (\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)}{\sin^2 A \sin B \sin C},$$

$$\frac{(Y \sin B + Z \sin C)(Y \sin C + Z \sin B) - YZ \sin^2 A}{\sin^2 A \sin B \sin C},$$

$$\frac{Y \sin B + Z \sin C}{\sin^2 A}\left(\frac{Y}{\sin B} + \frac{Z}{\sin C}\right) - \frac{YZ}{\sin B \sin C},$$

$$\frac{\Sigma X \sin A}{\sin^2 A}\left(\frac{Y}{\sin B} + \frac{Z}{\sin C}\right) - \frac{\Sigma YZ}{\sin B \sin C},$$

de sorte que le système (1) prend la forme

$$\frac{\Sigma X \sin A}{\sin^2 A}\left(\frac{Y}{\sin B} + \frac{Z}{\sin C}\right) = \frac{\Sigma X \sin A}{\sin^2 B}\left(\frac{Z}{\sin C} + \frac{X}{\sin A}\right) = \frac{\Sigma X \sin A}{\sin^2 C}\left(\frac{X}{\sin A} + \frac{Y}{\sin B}\right).$$

On en conclut que les équations proposées sont vérifiées si l'on pose

1° $$\Sigma X \sin A = 0, \quad \text{ou} \quad \Sigma \frac{\sin A}{x} = 0;$$

2° $$\frac{Y}{\sin B} + \frac{Z}{\sin C} = \lambda \sin^2 A,$$

$$\frac{Z}{\sin C} + \frac{X}{\sin A} = \lambda \sin^2 B,$$

$$\frac{X}{\sin A} + \frac{Y}{\sin B} = \lambda \sin^2 C,$$

$\lambda$ étant une inconnue auxiliaire. La dernière solution donne

$$\frac{X}{\sin A} = \frac{1}{2}\lambda (\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A) = \lambda \sin B \sin C \cos A, \ldots;$$

donc $$X : Y : Z = \cos A : \cos B : \cos C. \qquad \text{(J. N.)}$$

*Solution par* M. Emmerich. Par les substitutions $yz = u$, $zx = v$, $xy = w$ on met le système sous la forme

$$v^2 + w^2 + 2vw \cos A = \lambda^2 \sin^2 A, \quad w^2 + u^2 + 2wu \cos B = \lambda^2 \sin^2 B,$$

$$u^2 + v^2 + 2uv \cos C = \lambda^2 \sin^2 C.$$

La seconde et la troisième équation peuvent s'écrire

$$(w + u\cos B)^2 = (\lambda^2 - u^2)\sin^2 B, \quad (v + u\cos C)^2 = (\lambda^2 - u^2)\sin^2 C;$$

d'où, en éliminant $\lambda^2 - u^2$ :

$$(v + u\cos C)^2\sin^2 B - (w + u\cos B)^2\sin^2 C = 0,$$

$$[u\sin(B-C) + v\sin B - w\sin C][u\sin B + C) + v\sin B + w\sin C] = 0.$$

On a donc

$$A_1 \equiv u\sin(B-C) + v\sin B - w\sin C = 0,$$

ou

$$A_2 \equiv u\sin(B+C) + v\sin B + w\sin C = 0.$$

De même on a quatre autres relations linéaires $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Comme $A_1A_2\sin^2 A + B_1B_2\sin^2 B + C_1C_2\sin^2 C \equiv 0$, le système a *quatre* solutions résultant des combinaisons 1) $A_1 = 0$, $B_1 = 0$; 2) $A_1 = 0$, $B_2 = 0$; 3) $A_2 = 0$, $B_1 = 0$; 4) $A_2 = 0$, $B_2 = 0$. Les combinaisons 2), 3), 4) se déduisent de 1) en changeant respectivement A, B, C en — A, — B, — C. En posant $A + B + C = 2p$ on a les solutions

$$\sin(p-A),\ \sin(p-B),\ \sin(p-C); \quad -\sin p,\ \sin(p-C),\ \sin(p-B);$$
$$\sin(p-C),\ -\sin p,\ \sin(p-A); \quad \sin(p-B),\ \sin(p-A),\ -\sin p.$$

Si $A + B + C = \pi$, les équations $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, $C_2 = 0$ se confondent avec $u\sin A + v\sin B + w\sin C = 0$, c'est-à-dire que tous les points de la droite à l'infini répondent au système. Quant à $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, ils donnent le point H.

P. S. Notre solution était rédigée quand nous avons pu constater que Grunert a fait des calculs semblables aux précédents dans une question analogue. (J. N.)

---

## ×QUESTIONS D'EXAMEN.

**1008.** Trouver deux nombres rationnels $x$, $y$ dont la somme soit égale à la somme de leurs cubes.

Cela revient à résoudre l'équation indéterminée

$$x^2 - xy + y^2 = 1, \quad \text{ou} \quad x(x-y) = (1+y)(1-y),$$

ou le système

$$x = \lambda(1+y), \quad \lambda(x-y) = 1-y,$$

$\lambda$ étant une indéterminée. On trouve

$$x = \frac{2\lambda - \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda + 1}, \quad y = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda + 1}.$$

**1009.** Résoudre l'équation

$$\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a+x-\sqrt{2ax+x^2}}=\frac{m}{n}.$$

*Solution*

$$x'=a\frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{mn}},\quad x''=-a\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}{2\sqrt{mn}}.$$

Vérifier les deux racines.

**1010.** A un carré donné inscrire un pentagone régulier dont un côté repose sur un côté du carré.

On construit sur le côté AB du carré ABCD, vers l'intérieur, un pentagone régulier ABEFG; les droites qui joignent le milieu de AB aux points E, F, G rencontreront respectivement BC, CD, DA en trois sommets du pentagone cherché.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1227.** Si l'on convient de représenter $\sin(\sin x)$ par $\sin_2 x$, $\sin(\sin_2 x)$ par $\sin_3 x$, etc., démontrer que la vraie valeur de l'expression

$$\frac{x^{n-1}\sin_n x-\sin^n x}{x^{n+4}},$$

pour $x=0$, est égale à $\frac{n(n-1)}{36}$. (SCHLÖMILCH.)

**1228.** Étant donnés dans un plan deux points fixes O, O', faisons correspondre à un point variable P, l'intersection du rayon $OP_1$ avec la médiatrice du segment $O'P_1$ : démontrer que si $P_1$ décrit une droite $h$, le lieu de P est, en général, une cubique unicursale ayant le point double en O, passant par les deux antipoints de OO' et ayant un foyer simple en O'. Construire les tangentes au point double et les intersections de la cubique avec $h$. Cas particulier de $h$ passant par O'. (V. RETALI).

**1229.** Les cercles d'Apollonius d'un triangle se coupent deux à deux sous des angles égaux à 120°. (E. LEMOINE).

×**1230.** Deux cercles de centres O, O' se coupent en deux points A, B. On mène les diamètres AOD, AOD' et la bissectrice de l'angle OAO', qui coupe les deux circonférences respectivement en C, C'. On mène aussi en A les tangentes aux cercles O, O'; soient E', E les points où elles rencontrent l'autre cercle. Cela posé :

1° La corde commune AB est moyenne proportionnelle entre les cordes BC, BC';

2° La tangente commune aux deux cercles est moyenne proportionnelle entre les cordes DE, D'E'.

# LE CINQUIÈME LIVRE DE LA MÉTAGÉOMÉTRIE,

par M. P. BARBARIN, professeur au Lycée de Bordeaux.

Dans son admirable *Essai sur les Principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (1878; extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques de Bordeaux*, 1882), M. De Tilly a fait entre les trois géométries *usuelle* (Euclide), *abstraite* (Lobatschefsky), et *doublement abstraite* (Riemann), un parallèle magistral dont on ne saurait trop recommander la lecture. Nous nous proposons de reprendre l'étude du savant académicien pour le livre V qui est si important, en entrant le plus possible dans le détail. Nous nous placerons d'ailleurs exclusivement au point de vue de l'Enseignement, qui divise ce livre en quatre parties, disposées à peu près dans l'ordre suivant par la presque unanimité des auteurs :

1° *Relations de position entre la droite et le plan; plans et droites normaux.* 2° *Droites et plans parallèles.* 3° *Angles dièdres.* 4° *Angles trièdres et polyèdres.*

Nous conserverons cette division usuelle autant que possible.

## I. Relations de la droite et du plan.

Pour la commodité de l'écriture, nous désignerons par les notations abrégées GE, GL, GR les trois systèmes de géométrie euclidien, lobatschefskien, riemannien. La ligne droite est (P. MANSION, *Premiers principes de Métagéométrie*) l'être géométrique caractérisé par la définition 4 et les postulats I, II, IV d'Euclide. Le plan est aussi l'être géométrique caractérisé par les définitions précédentes et la définition 7. Il s'ensuit que tous les théorèmes de la première partie du cinquième livre euclidien qui ne s'appuient que sur les notions précédentes sont du domaine de la géométrie générale. Nous croyons inutile de les signaler en détail, mais leur démonstration doit être complétée par quelques remarques essentielles.

En GR, toute droite coupe tout plan qui ne la renferme pas en deux points M et M′ distants de $2\Delta$, et inversement, toute droite qui a deux points M et M′ dans un plan appartient à ce plan tout entière si MM′ diffère de $2\Delta$. Nous prouverons que toute droite AB non située

dans un plan P a avec ce plan une normale commune et une seule. Deux plans non coïncidents se coupent d'ailleurs toujours.

En GL, une droite AB non située dans un plan P peut occuper par rapport à lui trois positions :

1° ou elle le rencontre en un point M et un seul;

2° ou elle est parallèle à une certaine droite CD du plan; nous prouverons que AB est aussi parallèle à toutes les parallèles à CD que renferme le plan;

3° ou elle n'est ni sécante ni parallèle à aucune ligne du plan; nous prouverons que AB et P ont une normale commune et une seule.

Deux plans lobatschefskiens qui ont un point commun se coupent, ou coïncident; mais s'ils n'ont aucun point commun, il peut se faire que certaines lignes de l'un soient parallèles à certaines lignes de l'autre, ou qu'au contraire aucune ligne du premier ne soit sécante ni parallèle à aucune ligne du second. Nous montrerons également que dans le dernier de ces deux cas, il existe une droite perpendiculaire commune aux deux plans, et une seule. Ces dernières propriétés ne jouent aucun rôle dans la preuve des huit théorèmes de la première partie du livre V; elles seront seulement démontrées à la fin de la troisième partie. Si nous les avons énoncées à cette place, c'est pour mieux préciser par avance les positions possibles des éléments, droites et plans, que nous aurons à envisager.

*Droites perpendiculaires à un plan.* Toutes les droites perpendiculaires à un plan P ont, en GR, deux points communs O, O′ situés de part et d'autre de ce plan, et à la distance 2Δ l'un de l'autre, et tous les points du plan sont à une distance égale à Δ de O et de O′, ce qui fait dire que O et O′ sont les *centres* du plan P. Par un point donné A, l'on peut tracer une droite normale à un plan P. En GL, cette droite est unique quel que soit A; en GR il en est de même tant que A diffère de O ou O′; mais si A coïncide avec l'un de ces points, toute droite joignant A au plan lui est normale.

*Plans perpendiculaires à une droite.* Tous les plans perpendiculaires à une droite D sont externes les uns aux autres en GL, et ne peuvent avoir un seul point commun sans coïncider; mais en GR ils ont une ligne commune D′ qui peut être regardée comme le lieu des centres de la droite D dans tous les plans renfermant cette droite. Par tout point

A non situé sur D', on peut mener un plan normal à D et un seul ; tandis que si A est situé sur D', tout plan passant par D' est normal à D. Inversement, D est aussi le lieu des centres de D' dans chacun de ces plans ; c'est ce qui fait appeler D et D' *droites réciproques*.

Le théorème dit *des trois perpendiculaires* appartient à la géométrie générale, ainsi que ses réciproques et ses applications habituelles ; il en est de même de la proposition concernant les relations de perpendiculaire et obliques issues d'un même point, à condition de préciser en GR le sens de ces termes. Toute oblique AM ayant deux points de rencontre M et M' avec le plan P, l'un d'eux M est généralement à une distance de A inférieure à Δ ; c'est cette distance que nous appellerons *longueur de l'oblique* ; la longueur de la perpendiculaire se définira de même.

*Droites orthogonales*. Soient deux droites D et D' ; si d'un point quelconque M de D on abaisse la perpendiculaire MM' sur D', il peut arriver que M' soit invariable de position ; alors D est renfermée tout entière dans le plan normal à D' mené par M'. Soit tirée M'M'' perpendiculaire sur D ; le plan des droites M'M'' et D' est alors normal à D au point M'', et par suite, D et D' sont orthogonales, M'M'' leur étant normale commune. Pour qu'un plan soit normal à D, il faut et il suffit qu'il renferme deux droites orthogonales à D, sécantes, parallèles, ou ayant une normale commune qui n'est pas dans un même plan avec D.

## II. Droites et plans admettant une normale commune.

La plupart des propositions concernant les droites et plans parallèles qui constituent la seconde partie du V^e^ livre de Géométrie usuelle, tirent leur vérité surtout de ce que ces éléments admettent une normale commune : Envisagées sous ce point de vue, elles appartiennent donc à la Géométrie générale, pourvu que nous sachions, si cela est possible, leur attribuer des énoncés applicables à tous les cas. C'est ce que nous allons essayer de faire.

Théorème I. *Deux droites* AB, CD *perpendiculaires à un plan* P *sont dans un même plan* Q, *et normales à la ligne d'intersection* AC *des deux plans.*

Théorème II. *Réciproquement, si de deux droites* AB, CD *d'un plan* Q *normales à une ligne* AC *de ce plan, l'une* AB *est perpendiculaire*

*à un plan* P *contenant* AC, *l'autre* CD *est aussi perpendiculaire au plan* P.

Démonstrations et figures habituelles.

Théorème III. *Si* AB *et* CD *sont dans le même plan et normales à* AC, *la perpendiculaire* AE *menée de* A *sur un plan quelconque* P *contenant* CD *est aussi perpendiculaire à* AB.

Car CD est perpendiculaire au plan CAE, donc AB (Th. II) est perpendiculaire à ce plan et par suite à AE (fig. 1).

Théorème IV. *Si* AE *est à la fois normale à* AB *et au plan* P, *tout plan passant par* AB *coupe ce plan suivant* CD *ayant avec* AB *la normale commune* AC.

Tirons AC perpendiculaire sur CD (fig. 1), et dans le plan ABCD soit AB′ perpendiculaire sur AC; la droite AE est, d'après le théorème III, normale commune à AB′ et au plan P; donc AB′ est dans le plan perpendiculaire à AE au point A, et se confond avec AB.

Théorème V. *Soient* AE *normale commune à la droite* AB *et au plan* P, D *un point quelconque de ce plan; dans le plan* DAB *traçons* AC *perpendiculaire sur* AB, *et abaissons* DC *perpendiculaire sur* AC; DC *est tout entière dans le plan* P.

En effet, dans la figure 1, le plan ABD coupe P suivant une droite passant par D et perpendiculaire sur AC d'après le th. IV; donc cette ligne n'est autre que DC.

Remarque. 1° La démonstration précédente suppose que du point D on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur AC; c'est ce qui arrive toujours en GL, et ce qui a lieu aussi en GR quand D est bien *quelconque*. Dans le cas particulier où D est à la rencontre de AB avec P, le plan ABD devient indéterminé, et sa section par le plan P est une droite quelconque DC de ce plan; en y prenant DC = DA = Δ, AC est encore normale commune à AB et CD.

2° Des théorèmes III, IV et V résulte cette conséquence : *Pour qu'une droite* AB *ait avec un plan* P *une normale commune* AE, *il faut et il suffit qu'elle ait une normale commune* AC *avec une ligne* CD *du plan située dans un même plan avec elle.*

Puisque deux droites riemanniennes quelconques situées dans le même plan ont une normale commune que l'on sait construire (Voir notre article : *Constructions sphériques à la règle et au compas*, dans *Mathesis*,

mars 1899, page 60), toute droite riemannienne a avec tout plan riemannien une normale commune et une seule, que l'on sait aussi construire. Cette normale a deux pieds A, A′ opposés sur la droite, et deux pieds E, E′ opposés sur le plan.

Toute droite lobatschefskienne qui n'est ni sécante ni parallèle à aucune ligne d'un plan lobatschefskien a aussi avec ce plan une normale commune et une seule que l'on sait tracer.

Nous nous occuperons des plans normaux à une même droite à la fin du paragraphe suivant.

### III. Angles dièdres, plans perpendiculaires.

Dans la partie du livre V où l'on étudie les angles dièdres, peu de chose est à changer à la forme classique des démonstrations pour les rendre tout à fait générales; la seule observation importante se rapporte à la définition de l'angle plan d'un dièdre. M. De Tilly fait très justement observer que la preuve de son invariabilité devrait être donnée indépendamment de la théorie des parallèles, et substitue le raisonnement suivant au raisonnement ordinaire. Soient (fig. 2) un dièdre et deux sections normales à l'arête AB, donnant les angles CAD, EBF. Prenons le milieu I de AB, et soit la section normale GIK de ce point. On peut détacher et retourner le système GIKEBF pour le faire coïncider avec GIKCAD, en plaçant IK et IG du premier sur IG et IK du second, B tombant en A; alors CAD et EBF coïncident.

Il suffit d'ajouter trois lignes à cette figure pour en tirer une démonstration du théorème presque identique à celle qui sert en Géométrie euclidienne, et procédant comme elle de l'égalité de deux triangles. Prenons AC = BE, et AD = BF; GI est médiatrice de AB et CE, donc CE (Th. II) est perpendiculaire au plan GIK, et ainsi de DF; donc CE et DF sont dans le même plan (Th. I), et GK leur est médiatrice commune; alors les quadrilatères CGDK et EGFK sont égaux et CD égale EF. L'égalité évidente des triangles CAD, EBF entraîne celle des angles de même nom.

La projection d'une droite sur un plan, l'angle d'une droite avec un plan n'offrent aucune remarque saillante. Toutefois, si la trace sur le plan P du plan qui y projette la droite D est une ligne illimitée D′, la projection proprement dite de toute la droite D n'est, en GL, qu'une portion de D′ limitée dans les deux sens ou illimitée dans un seul.

*Projection d'un angle droit.* Théorème VI. *La proj droit sur un plan est un angle droit quand la projetan normale commune à un côté de l'angle et au plan de proj*

Théorème VII (1re réciproque). *Un angle projeté droit, et qui a un côté normal à la projetante du somme*

Théorème VIII (2e réciproque). *Un angle droit pr angle droit a au moins un côté normal à la projetante d*

(Démonstrations et figures habituelles, *mutatis muta*

Les principes de la Géométrie descriptive sont donc ment l'épure d'un point ne donne pas directement éloignement vis-à-vis de deux plans de projection re déduira ces distances d'un quadrilatère trirectangle plan de profil, et qu'il faudra préalablement rabattre.

*Droites parallèles à un plan.* Une droite a un point normale commune avec un plan quand elle a un point normale commune avec sa projection sur ce plan; ces coexistent en GR, mais sont distinctes et incompatibl même des cas où ni l'une ni l'autre n'a lieu; ceci se droite est parallèle (sens lobatschefskien) à une ligne d

Théorème IX. *Une droite* AB *parallèle à une droite* C *parallèle à sa projection ab sur le plan* (fig. 3).

Car AB et *ab* sont dans le même plan perpendicul peuvent avoir en commun ni un point ni une normale GE); sans cela AB et CD qui sont, par définition, da auraient aussi en commun un point ou une normale (T et *ab* sont parallèles. De même CD et *ab*.

Théorème X. Réciproque. *Toute droite* $\overline{AB}$ *parallèle sur un plan* P *est aussi parallèle à toute ligne du plan à* $\overline{CD}$ *par exemple.* Car faisons passer par AB et C un section avec P est CD′; CD′ ne coupe pas AB puisqu coupent pas; CD′ n'a pas davantage de normale comm AB aurait une normale commune avec P et conséqu enfin par C l'on ne peut mener à $\overline{ab}$ qu'une seule pa point *b* vers lequel $\overline{AB}$ et $\overline{ab}$ sont aussi parallèles; d confondent.

Nous dirons que AB parallèle à *ab* est parallèle au p parallèle à AB.

Théorème XI. *Par une droite* D′ *on sait généralement mener deux plans parallèles à une droite* D.

Par un point A de D′ traçons dans le plan DA les droites AB, AC parallèles à D ; les plans BAD′, CAD′ sont parallèles à la droite D, et généralement distincts. Si nous les coupons par un plan quelconque renfermant D et rencontrant D′ en A′, les droites d'intersection A′B′, A′C′ sont, en vertu des théorèmes IX et X, parallèles à D, et déterminées par le seul point A′. Donc les plans considérés sont bien déterminés et indépendants du point A.

Le raisonnement précédent admet que D et D′ sont quelconques. Si ces droites sont parallèles, tout plan renfermant l'une est parallèle à l'autre. Etant données deux droites D et D′ quelconques, tous les plans passant par D′ forment deux catégories : 1° ceux qui coupent D, 2° ceux qui ne coupant pas D, ont avec cette droite une normale commune. En menant par D′ les deux plans P, Q parallèles à D, la première catégorie est dans le dièdre de ces plans qui contient D, la seconde catégorie est dans le dièdre adjacent.

Théorème XII. *Pour que deux plans lobatschefskiens soient sécants, il faut et il suffit que le premier renferme deux lignes sécantes parallèles au second.*

1° Soient AB l'intersection des plans P et Q, et dans P les droites CD CE parallèles à AB ; ces droites sont (Théor. X) parallèles à Q.

2° Soient dans P les lignes sécantes CD, CE parallèles au plan Q (fig. 4) et leurs projections C′D′, C′E′ sur ce plan ; construisons C′X′ bissectrice de l'angle E′C′D′ et portons y la longueur C′F′ telle que

$$\Pi\,(C'F') = \tfrac{1}{2}\,\text{angle}\,E'C'D' ;$$

la perpendiculaire G′H′ menée à C′X′ par le point F′ est parallèle commune à C′D′ et C′E′. Mais C′D′ parallèle à G′H′ est aussi parallèle à GH (Théor. IX) ; donc G′H′ et GH sont parallèles vers leurs deux extrémités et ne peuvent que se confondre suivant l'intersection des plans P et Q.

Corollaires. 1° Les projections de deux droites parallèles sur un plan quelconque sont sécantes, mais si l'une est parallèle au plan de projection, l'autre l'est aussi et leurs projections sont à la fois parallèles aux droites et entre elles.

2° Si deux droites sont parallèles, deux plans passant par ces droites

et qui se coupent ont pour intersection une parallèle à leur direction.

*Plans normaux communs à deux plans.* Dans la GR, deux plans distincts se coupent toujours, et tout plan normal à leur intersection est aussi normal commun à ces plans, et réciproquement.

En GL, nous rangerons les plans suivant trois classes : P et Q étant deux plans donnés :

1° *Par un point de* P *on peut mener dans* P *deux lignes sécantes parallèles à* Q.

Alors P et Q sont sécants (Th. XII) et tout plan normal à leur intersection est normal commun.

2° *Par chaque point de* P *on ne peut mener qu'une seule ligne de ce plan parallèle à* Q.

Alors évidemment par chaque point de Q on peut aussi mener une ligne de ce plan parallèle à P, et l'on n'en peut mener qu'une seule. Pour abréger, nous dirons que P et Q sont *parallèles*. Soit AB une ligne quelconque du premier. Si elle n'est pas parallèle à Q, comme elle ne lui est pas davantage sécante, puisque P et Q ne se coupent pas, elle a avec Q une normale commune B*b*; le plan perpendiculaire à AB mené par B renfermant B*b* est normal commun à P et Q. Si AB est parallèle à Q, toute ligne AC du plan P sécante à AB a, d'après ce qui précède, une normale commune C*c* avec Q, donc le plan perpendiculaire à AC au point C est encore normal commun. Ainsi P et Q ont une infinité de plans normaux communs, et nous prouverons plus loin que ces plans normaux sont parallèles entre eux.

3° *Par aucun point de* P *on ne peut mener dans ce plan de ligne sécante ou parallèle à* Q.

Alors évidemment Q jouit de la même propriété par rapport à P. Donc une ligne quelconque AB de P a avec Q une normale commune B*b*; le plan perpendiculaire à AB au point B est encore normal commun. Donc enfin P et Q ont encore une infinité de plans normaux communs, et nous prouverons plus loin qu'ils se coupent tous suivant une même droite.

*Plans parallèles.* Théorème XIII. *Si* P *et* Q *sont deux plans parallèles, tout plan normal commun les coupe suivant deux droites parallèles.*

Soient la droite AB du plan P parallèle au plan Q, AC sécante à AB, et C*c* normale commune à AC et à Q. Le plan normal commun perpen-

diculaire à AC en C coupe P selon CD, et Q selon *cd* (fig. 5). CD et *cd* ne sont pas sécantes, puisque P et Q n'ont pas de points communs. Ces droites n'ont pas davantage de normale commune, car s'il en existait quelqu'une telle que D*d*, ce serait une normale commune à P et Q, et il faut prouver que ce dernier résultat est en désaccord avec l'hypothèse. En effet, menons par D dans le plan P, DE parallèle à AB ; cette ligne est parallèle à Q, donc elle est parallèle à sa projection *de* sur Q. Mais DE et *de* sont ensemble perpendiculaires à D*d* dans un même plan ; ceci implique contradiction puisque DE et *de* sont distinctes. Il faut en conclure que CD et *cd* sont parallèles, et qu'enfin CD et *cd* sont parallèles à AB ainsi qu'à sa projection *ab*.

Théorème XIV. *Réciproquement, si dans un plan* R *les droites* CD *et cd sont parallèles, les plans* P *et* Q *perpendiculaires à* R *et passant par* CD *et cd sont aussi parallèles.*

Soient dans P, AB parallèle à CD et *ab* sa projection sur Q (fig. 5); AB est parallèle à *cd* et par suite à *ab* ; donc elle aussi parallèle à Q.

Si d'ailleurs nous menons par A une ligne quelconque AC du plan P, AC ne peut couper Q ni être parallèle à Q, car dans ces deux cas P et Q seraient sécants (Th. XII) et le plan R serait perpendiculaire à leur intersection; CD et *cd* se couperaient alors sur cette droite, ce qui est contre l'hypothèse.

Il en résulte que AB est la seule ligne parallèle à Q qu'on puisse mener dans P par le point A, c'est-à-dire que P et Q sont parallèles.

Corollaires. 1° Si P et Q sont des plans parallèles, et AB une ligne du premier parallèle au second, le plan AB*ab* qui projette AB sur Q est normal commun à P et Q.

2° Si P et Q sont parallèles, tous les plans normaux communs sont aussi parallèles. Sur la figure 5, AB*ab* et CD*cd* étant deux tels plans, forment avec P et Q une sorte d'angle polyèdre indéfini dont les quatre dièdres sont droits.

Théorème XV. *Si les plans lobatschefskiens* P *et* Q *ne sont ni sécants ni parallèles, tous leurs plans normaux communs passent par une même droite.*

En GR, tous les plans normaux communs à P et Q sont normaux à l'intersection D de ces plans et contiennent sa réciproque D′.

En GL, soient P et Q deux plans de troisième classe. Si deux de leurs plans normaux étaient parallèles, P et Q le seraient aussi (Coroll. 2° du

Th. XIV). Soit AB*ab* l'un des plans normaux. AB et *ab* ne sont ni sécantes ni parallèles, et leur normale commune B*b* est aussi normale à P et Q. S'il existait une autre normale B'*b'*, le quadrilatère B*b*'B' serait plan (Th. I) et aurait ses quatre angles droits. Donc tous les plans normaux communs à P et Q contiennent B*b*.

Remarque. Si deux plans normaux à une droite sont coupés par un troisième quelconque, leurs traces ont pour normale commune la projection de la droite sur le plan sécant.

*Perpendiculaire commune à deux droites.* 1° *Si deux droites* D *et* D' *n'appartiennent pas au même plan, il y a au moins deux points* A, B *de* D' *dont les distances à* D, *soit* AC *et* BE, *sont égales.*

En effet, le lieu des points de l'espace dont la distance à D est égale à AC est une surface de révolution ayant D pour axe; D' la coupant au point A, la coupe généralement en un autre point tel que B, à moins d'y être située tout entière.

Si par D' et un point ω de D nous faisons passer un plan, et que dans le méridien perpendiculaire nous considérions les cercles de rayon AC tangents à la trace aux points F et F', le raisonnement de la figure de Dandelin nous prouve facilement que la section est une ellipse ayant F et F' pour foyers, et pour grand axe la distance des centres des cercles, pour petit axe, 2AC.

L'ellipse peut dégénérer en deux droites (Voir nos *Études de Géométrie analytique non euclidienne*, page 83). En général, l'ellipse est déterminée par ses éléments géométriques, et nous connaissons le premier A des deux points A et B où elle est rencontrée par la droite D'; il est donc aisé d'obtenir le point B par la méthode ordinaire.

2° *Soient* A *et* B *deux points de* D' *dont les distances* AC *et* BE *à* D *sont égales; la perpendiculaire* MN *abaissée du milieu* M *de* AB *sur* D *est normale commune à* D *et* D' (fig. 6).

Projetons AB suivant *ab* sur le plan perpendiculaire à D et conduit par MN; nous avons A*a* = B*b*, et M*a* = M*b*; donc les quadrilatères trirectangles ACN*a*, BEN*b* sont égaux et il en résulte N*a* = N*b*, et aussi NC = NE; donc MN est perpendiculaire sur *ab* et par conséquent sur AB.

La même figure et le raisonnement inverse prouvent que réciproquement, si MN est normale commune, deux points A et B de D' équidistants de M sont aussi équidistants de la droite D.

3° *En Géométrie lobatschefskienne*, D *et* D' *n'ont qu'une seule normale commune* MN.

Supposons que D et D' admettent, outre la normale commune MN dont nous venons de prouver l'existence, une seconde normale M'N' (fig. 6). Prenons A'M' = AM', et abaissons A'*a'* et A'C' perpendiculaires sur *ab* et sur D; A'C' est égale à AC, et comme on peut évidemment faire en sorte que MA' soit plus grand que MA, il s'ensuit que M*a'* est plus grand que M*a*, et que N*a'* est aussi plus grand que N*a*; or l'examen des deux quadrilatères trirectangles ACN*a*, A'C'N*a'*, dans lesquels AC égale A'C', et NC' est plus grand que NC, montre qu'on devrait avoir au contraire N*a'* inférieur à N*a*. Il y a donc contradiction.

4° *En Géométrie riemannienne*, D *et* D' *ont deux normales communes, ou une infinité.*

Prenons sur D' et D, d'un même côté du plan perpendiculaire à D qui contient la première normale MN, les segments MM' et NN' égaux à Δ; il est évident que M'N et N'M sont aussi égales à Δ, et que M'N' est une seconde normale commune; en portant les segments de l'autre côté du plan, on obtiendrait une seconde fois cette même normale.

Je dis qu'*en général* D et D' n'ont pas d'autres normales communes que MN et M'N'. En effet, soit $M_1N_1$ une autre normale commune; nous pouvons toujours supposer qu'elle rencontre D' entre M et M'. Prenons le milieu P de $MM_1$, puis les segments $MP_1$, $M_1P'_1$ égaux à $\frac{1}{2}MM_1$, et par les trois points $P, P_1, P'_1$ tirons PQ, $P_1Q_1$ et $P'_1Q'_1$ perpendiculaires à D (fig. 7). $P_1Q_1$ et $P'_1Q'_1$ étant égales à PQ, sont égales entre elles, et PQ est normale commune, ce qui entraîne $MN = M_1N_1$. De même $M'N' = M_1N_1$. Pour que ceci se produise, il faut donc que MN égale M'N'. De là deux cas à distinguer :

*a*) $MN \gtrless M'N'$. Ces deux droites sont les seules normales communes à D et D'. Or, remarquons que d'après les notations de notre article cité plus haut sur les constructions sphériques (*Mathesis*, 1899, pages 57-60), nous avons

$$\Phi(M'N') = \text{angle } N'MM' = 1 \text{ droit} - \text{angle } M'Mm';$$

ce cas répond donc à l'hypothèse

$$\Phi(MN) \gtrless \text{angle } N'MM'.$$

*b*) MN = M'N'. Si nous partageons MM' = Δ en $2^n$ parties égales, les perpendiculaires menées de chaque point de division sur D sont des

normales communes de même longueur constante et égale à MN. Tous les points de D′ sont équidistants de D et réciproquement. L'espace riemannien présente donc ce caractère particulièrement curieux qu'il renferme des droites *non situées dans un même plan et partout également distantes*, ce qui voue à l'inévitable insuccès toute tentative de démonstration du postulat des parallèles fondée sur l'équidistance. Le même espace renferme donc aussi des rectangles et des carrés gauches dont les diagonales sont égales et font avec les côtés des angles alternes internes égaux (Voir *Etudes de Géométrie analytique*, page 96.)

5° *Par un point donné* M, *on peut mener deux droites riemanniennes équidistantes à une droite donnée* D.

Tirons MN perpendiculaire sur D, puis dans le plan DMN, MN′ perpendiculaire sur MN, et enfin dans le plan perpendiculaire à MN au point M, tirons les droites MM′, MM″ faisant avec MN′ de part et d'autre les angles N′MM′ et N′MM″ égaux à $\Phi(MN)$ que nous savons construire (*Mathesis*, 1899. page 59); ce sont les lignes demandées.

6° *La normale commune unique* MN *de la* GL *correspond à la plus courte distance de* D *et* D′.

*Les deux normales communes* MN, M′N′ *de la* GR *comportent un minimum et un maximum de distance de* D *à* D′.

Le premier point est évident, puisque sur la figure 6, AC plus grande que N*a*, augmente au delà de toute grandeur avec MA.

Le deuxième résulte de ce que si A se déplace continuement sur D′ de M en M′, la distance AC, jamais nulle, ne peut prendre deux fois la même valeur sans que D et D′ soient équidistantes; donc AC varie toujours dans le même sens, et si MN est inférieure à M′N′, AC oscille du minimum MN au maximum M′N′.

7° Lorsque D et D′ sont équidistantes, la surface de révolution engendrée par D′ tournant autour de D est un boyau circulaire sans fin doué d'après 5° d'une double génération rectiligne; mais toute normale commune à D et D′ rencontre la réciproque de D à angle droit et a une grandeur constante; donc la surface peut être aussi engendrée par D′ tournant autour de la réciproque de D, et sous cette forme. c'est un boyau circulaire sans fin ayant pour rayon $\Delta$ — MN. La somme des volumes *illimités* mais *finis* renfermés dans ces surfaces est le volume entier fini de l'espace. C'est ce qui fait dire, sous forme imagée, que l'espace riemannien est un *double tore*.

*Diverses constructions de la perpendiculaire commune à* D *et* D'. — *a*) Par le 1° qui précède, nous avons vu une première construction revenant à l'intersection d'une droite et d'une ellipse.

*b*) Nous avons démontré, pages 97-98 de nos *Études*, que *la projection orthogonale de* D' *sur tous les plans perpendiculaires à* D *enveloppe une conique*, ellipse en GR, hyperbole en GL. Les perpendiculaires communes correspondent aux axes réels de cette courbe, que l'on sait construire.

*c*) Enfin l'application du Th. XI nous donne une troisième construction particulière à la GL. Menons les deux plans parallèles à D' et passant par D, puis le plan bissecteur de leur dièdre; ce dernier coupe D' au pied M de la normale commune MN, car la demi-révolution de la figure autour de cette normale ne fait qu'intervertir les deux plans.

## IV. Angles Trièdres et Polyèdres.

*Somme des faces.* La démonstration usuelle est défectueuse puisqu'elle s'appuie sur le postulat d'Euclide, tandis que la proposition est générale. Pour la prouver directement, on peut procéder de deux façons.

Première démonstration (De Tilly). Ayant déjà démontré que dans un trièdre une face est plus petite que la somme des deux autres, si l'on considère maintenant un trièdre quelconque SABC, il suffit d'y prolonger la seule arête SA au delà de S suivant SA'; dans le trièdre adjoint SA'BC ainsi formé, on a

$$\text{angle BSC} < \text{angle A'SB} + \text{angle A'SC},$$

d'où

$$\text{angle ASB} + \text{angle ASC} + \text{angle BSC} < 4 \text{ droits}.$$

Deuxième démonstration (Rebuffel, *Journal de math. él. de Vuibert*, 15 novembre 1896). Prenons sur les arêtes du trièdre donné les trois longueurs égales SA = SB = SC, et projetons le sommet S en O sur le plan ABC; on voit aisément que l'on a

$$\text{angle ASB} < \text{angle AOB},$$
$$\text{angle ASC} < \text{angle AOC},$$
$$\text{angle BSC} < \text{angle BOC},$$

et comme O est le centre du triangle ABC, si ce centre est à l'intérieur du triangle, ou sur un côté, on a

$$\text{ASB} + \text{ASC} + \text{BSC} < \text{AOB} + \text{AOC} + \text{BOC} = 4 \text{ dr.},$$

et si ce centre est hors du triangle, on a encore

$$\text{angle ASB} + \text{angle ASC} + \text{angle BSC} < 2 \text{ angle BOC} < 4 \text{ dr.}$$

Passons maintenant à un angle polyèdre de $n$ faces SABC ··· EF. deux faces DSE et FSA contigües à ESF se coupent selon SG, et nous avons de la sorte un trièdre SEFG, et un angle polyèdre de $n$ faces SABC ··· DG.

En admettant la proposition pour ce dernier, nous avons successivement

$$\text{ASB} + \text{BSC} + \cdots \quad \text{GSA} < 4 \text{ dr.}$$
$$\text{ESF} < \text{ESG} + \text{GSF}$$

et en ajoutant, puis supprimant les angles communs aux deux membres, nous prouvons que la proposition subsiste pour l'angle de $n$ faces.

En employant les figures supplémentaires, l'on voit de même que la somme des dièdres d'un angle polyèdre convexe de $n$ faces est comprise entre $2n$ droits et $2n - 4$ droits. La limite supérieure peut être atteinte quand toutes les arêtes sont dans le même plan. La limite inférieure ne peut pas être atteinte en GR si les arêtes de l'angle ne coïncident pas. On sait qu'elle peut l'être en GE quand, le sommet de l'angle s'éloignant indéfiniment, les arêtes deviennent parallèles entre elles. Nous allons montrer qu'il existe en GL quelque chose de semblable. Ceci revient à prouver au fond que *quand le sommet d'un angle trièdre rectangle s'éloigne indéfiniment, la somme des dièdres a pour limite deux droits.*

Cette proposition a été prouvée assez péniblement par Lobatschefski dans ses *Études géométriques* (Traduction Hoüel, page 17). Le grand savant russe employait des triangles sphériques d'aire décroissante. Voici un raisonnement beaucoup plus élémentaire.

Soient prises les deux faces du dièdre droit pour plans de projection et soient $PSP_1$ les traces d'un plan servant de troisième face (fig. 8) les droites $Sa$, $S'a'$ perpendiculaires à SP et $SP_1$ sont les projections de la droite SA perpendiculaire à $PSP_1$ en S (Th. VI). D'ailleurs cette droite forme avec les plans de projection des angles $\omega_1$ et $\omega'_1$ complémentaires des dièdres SP et $SP_1$. En mesurant ces angles par le procédé connu, on a

$$\omega_1 + \omega'_1 < 1 \text{ droit.}$$

Prenons un point fixe OO′ de LT, et menons par ce point les droites

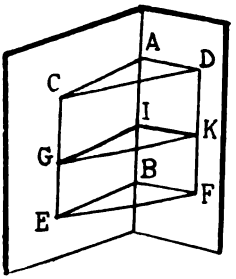



Fig. 2

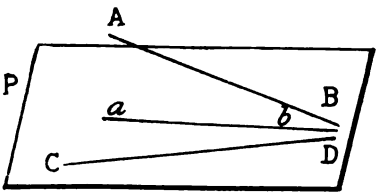
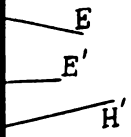



Fig. 3



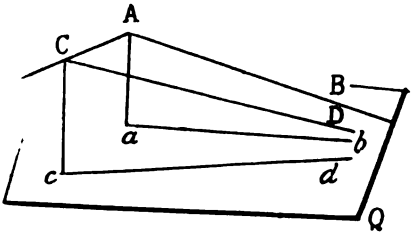




Fig. 5

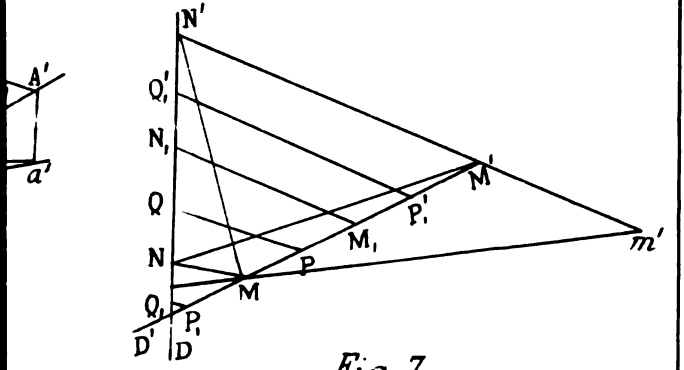



Fig. 7

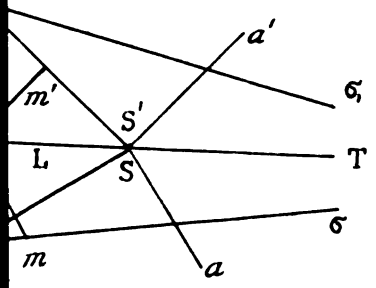



Fig. 8

et

]
dec
avc
fac
]
siv

et
no
]
sor
ent
qu
ne
pa
s'é
No
Ce
*rec*
*des*
(
da
sa
Vo
;
et
les
la
dr
tai
co

$Om$, $O'm'$ telles que $TOm = TSa$, $TO'm' = TS'a'$; ce sont les projections d'une droite OM faisant avec les plans de projection des angles égaux à $\omega_1$ et $\omega'_1$. Quand $PSP_1$ tourne autour de la droite fixe $PP_1$, S s'éloigne indéfiniment, PS et $P_1S$ deviennent $P\sigma$ et $P_1\sigma_1$ parallèles à LT, donc les angles PSL et $P_1SL$ ayant zéro pour limites, les droites $Om$, $O'm'$ ont pour limites, $Op$ et $O'p'$ perpendiculaires à LT. Ainsi OM a pour limite une droite OP du plan de profil de O, et

$$\lim.\ (\omega_1 + \omega'_1) = 1 \text{ droit.}$$

Du trièdre particulier que nous venons d'envisager il est maintenant facile de passer à un angle polyèdre quelconque. Le Théorème XIV (Coroll 2°) donnait déjà un cas particulier relatif à quatre dièdres.

---

## THÉORÈME DE GEOMÉTRIE;

par M. G. Tarry, à Kouba (Algérie).

On donne, dans un même plan, trois droites $a$, $b$, $c$ qui concourent en un même point S. A une transversale arbitraire $u$ qui les rencontre en A, B, C, on fait correspondre un point U déterminé par la condition que le rapport anharmonique $\frac{UA}{UB} : \frac{CA}{CB}$, formé avec des *droites dirigées*, ait une valeur donnée; autrement dit, ce rapport, abstraction faite des directions des segments, reste constant et l'angle AUB est égal à un angle donné $\theta$, ou à $\theta \pm \pi$ suivant que l'angle ACB est égal à 0 ou à $\pm \pi$. Appelons U' le symétrique de U par rapport à AB.

1. Le triangle métaharmonique du triangle ABU par rapport au point S, est semblablement variable.

2. Quand la transversale $u$ tourne autour d'un point fixe C de $c$, le point correspondant U décrit une circonférence passant par le point S.

Cette circonférence se réduit à une droite quand l'angle $\theta$ est égal à 0 ou $\pm \pi$ (théorème connu).

Le rapport anharmonique de quatre transversales $u$ menées par C est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants U, considérés sur la circonférence ou la droite qui les contient.

3. Quand la transversale $u$ se meut d'une manière quelconque dans le plan, les points U, U' se correspondent dans deux figures symétriquement semblables, ayant pour point double S.

**4.** Quand la transversale $u$ roule sur une courbe de la classe $m$, le point U décrit une courbe dont l'inverse par rapport au point S est d'ordre $m$.

En particulier, lorsque les droites $a$ et $b$ sont parallèles, le triangle ABU est semblablement variable; donc

Si les sommets A, B du triangle ABU semblablement variable décrivent deux droites parallèles, la classe de la courbe enveloppe du côté AB est égale à l'ordre de la courbe décrite par le sommet U.

**5.** Quand deux sommets A, B d'un triangle ABC semblablement variable se correspondent toujours dans deux figures $\varphi$, $\varphi'$ symétriquement semblables, dont le rapport de similitude est égal au rapport des côtés CA, CB, le sommet C est situé sur une droite fixe passant par le point double de $\varphi$, $\varphi'$.

Cas particulier : Quand les extrémités de la base d'un triangle isoscèle semblablement variable se correspondent dans des figures $\varphi$, $\varphi'$ symétriquement égales, le sommet C se trouve sur une droite fixe, parallèle à l'axe de $\varphi$, $\varphi'$.

**6.** Quant deux points A et B d'une figure semblablement variable parcourent deux droites fixes SA et SB, à tout point C de cette figure correspond un autre point C′ et un seul tel que les points C et C′ sont des éléments homologues de deux figures symétriquement semblables.

Si O est le centre du cercle circonscrit au triangle SAB et $r$ le rayon de ce cercle, les trois points O, C, C′ sont en ligne droite et liés par la relation $OC.OC' = r^2$.

Dans le cas particulier où les droites fixes sont parallèles, les points C, C′ sont symétriques par rapport à AB.

**7.** Quand deux points A, B d'une figure semblablement variable parcourent deux droites fixes SA, SB, tous les points de la figure décrivent des courbes affines ou des droites passant par S.

Le lieu des points qui décrivent des droites est une circonférence passant par S.

Si les droites fixes sont parallèles, cette circonférence se réduit à une droite.

**8.** Quand deux points A, B d'une figure $\Phi$ semblablement variable parcourent deux courbes affines, $\varphi$ et $\varphi'$, tous les points de la figure décrivent des courbes affines, ou bien les rayons d'un faisceau.

Le lieu des points qui décrivent des droites, est une circonférence $\omega$ toujours réelle. Cette circonférence se réduit à une droite, quand les

droites décrites sont parallèles. Elle se réduit à un point quand les deux courbes affines $\varphi$, $\varphi'$ sont directement semblables; dans ce seul cas particulier, aucun point réel de la figure $\Phi$ ne décrit de droite, et la circonférence $\omega$ se réduit au point double des deux figures directement semblables $\varphi$, $\varphi'$.

NOTE. Nous insérerons volontiers dans *Mathesis* une démonstration de ces intéressantes propositions. (P. M. et J. N.)

---

## EXEMPLE D'APPLICATION DES PRINCIPES D'HOMOGRAPHIE ET DE DUALITÉ,

par M. STUYVAERT (Gand).

1. M. BROCARD a proposé autrefois la *Question d'examen* 315 : Par le sommet A d'un triangle ABC on mène des perpendiculaires AB' à AB, AC' à AC; si B', C' sont les points de rencontre de ces droites avec BC, les circonférences ABC, AB'C' se touchent en A (*Mathesis*, 1887, VII, p. 103).

2. On démontre tout aussi facilement que les circonférences ABC' et AB'C se touchent en A et que les tangentes communes en A, aux deux couples de circonférences, sont rectangulaires.

3. GÉNÉRALISATION. Si deux coniques passant par le centre A d'une involution de rayons se coupent sur les rayons doubles et rencontrent respectivement une droite en des couples de points B, C et B', C' tels que AB et AB', AC et AC' sont des couples de rayons correspondants de l'involution, ces deux coniques se touchent en A. Il en est de même des coniques analogues déterminées par B, C' et B', C. Les tangentes communes, en A, aux deux couples de coniques, sont des rayons homologues de l'involution.

4. RÉCIPROQUE. Puisque quatre points et la tangente en l'un d'eux déterminent une conique, on a, réciproquement : si deux coniques se touchent en A et se coupent sur les rayons doubles de l'involution, la droite BB' joignant leurs intersections respectives avec deux rayons homologues de l'involution les coupe encore sur deux autres rayons homologues.

5. THÉORÈME CORRÉLATIF. Soit une involution de rayons (A) perspective à une ponctuelle en involution $(a)$; si deux coniques, touchant le

support $a$ de la ponctuelle, ont encore deux tangentes communes passant par les points doubles de l'involution $(a)$, si de plus les tangentes issues de A à l'une des coniques correspondent respectivement, dans l'involution (A), aux tangentes à l'autre conique, les deux courbes touchent $a$ au même point. Avec deux couples de l'involution (A) on peut, de cette manière, engendrer deux couples de coniques et les points de contact avec $a$ se correspondent dans l'involution. On énonce sans peine la réciproque.

**6.** Exemple de cas particulier. Si deux paraboles de même foyer sont inscrites à deux angles BAC, B'AC', de même sommet et dont les côtés sont perpendiculaires chacun à chacun, les axes de ces paraboles sont parallèles. Les paraboles de même foyer inscrites à BAC' et B'AC ont leurs axes perpendiculaires à ceux des premières.

**7.** Le théorème du n° 1 n'exige pas que les angles BAB' et CAC' soient droits, mais seulement qu'ils soient égaux et de sens opposé. Quant au théorème du n° 2, il cesse alors d'être vrai : les cercles AB'C et ABC' ont, en A, des tangentes distinctes faisant, avec la tangente AT aux cercles ABC, AB'C', des angles égaux à BAB' et CAC'.

**8.** Pour généraliser, considérons deux faisceaux projectifs de rayons de centre A; une droite coupe, en $B_1$ et $C_1$, deux rayons du premier faisceau et, en $B_2$, $C_2$, les rayons correspondants respectifs du second faisceau; soient I et J deux points quelconques sur les rayons doubles : les coniques menées respectivement par A, I, J, $B_2$, $C_1$ et par A, I, J, $B_1$, $C_2$ ont, en A, une tangente commune $t$; quant aux coniques $AIJB_1C_1$ et $AIJB_2C_2$, elles ont, en A, deux tangentes distinctes, $t_1$ et $t_2$; aux rayons $t_1$ et $t$ du premier faisceau répondent respectivement les rayons $t$ et $t_2$ du second.

On énonce sans peine la réciproque et le théorème corrélatif.

**9.** Soit un point A situé hors d'une droite $d$ sur laquelle on considère trois points B, C, D; menons trois coniques par A et par deux points fixes I et J sur les rayons doubles de la projectivité cyclique déterminée par AB, AC, AD, ces trois coniques coupant $d$ respectivement en C et D, en D et B, en B et C; les tangentes $t_1$, $t_2$, $t_3$ menées, en A, à ces trois courbes forment un terne de la projectivité cyclique. Les coniques passant par A, I, J et touchant $d$ respectivement en B, C et D ont $t_1$, $t_2$, $t_3$ pour tangentes respectives en A.

**10.** Si une ellipse $E_1$, circonscrite au triangle B'CD, a son centre au centre de gravité de ce triangle, elle coupe la droite de l'infini sur les

rayons doubles de la projectivité cyclique déterminée par AB′, AC, AD, en appelant A un point quelconque de la courbe. Soit B l'intersection de AB′ avec CD. Désignons par $E_2$ et $E_3$ les coniques homothétiques à la proposée passant respectivement par A, D, B et par A, B, C, puis par $E_4$, $E_5$, $E_6$ les coniques homothétiques à $E_1$ passant par A et touchant BCD respectivement en B, en C et en D; les courbes $E_1$ et $E_4$, $E_2$ et $E_5$, $E_3$ et $E_6$ se touchent en A, chacune à chacune, et les trois tangentes communes forment un terne de la projectivité cyclique déterminée par AB, AC, AD.

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**15.** *Sur la question 1314 de Mathesis.* M. H. Van Aubel nous fait remarquer qu'il avait proposé le même théorème en 1894 dans *El Progreso matematico*, p. 206 et que deux démonstrations en ont été données dans ce journal, même année, p. 292 et 309. La propriété qui en fait l'objet, s'est présentée à notre esprit, incidemment dans une généralisation de la figure de Brocard, et lorsque nous l'avons proposée à nos lecteurs, nous n'avions plus aucun souvenir qu'elle appartenait à notre honorable ancien collègue de l'athénée d'Anvers. *Cuique suum!*

A cette occasion, M. Van Aubel nous adresse la proposition suivante, qui ne manquera pas d'intéresser nos lecteurs et dont la démonstration synthétique ou par les coordonnées trilinéaires ne présente pas de grandes difficultés.

Par les trois sommets d'un triangle ABC on a mené, dans une direction quelconque, les droites parallèles $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, limitées aux côtés opposés; on mène ensuite, parallèlement à CA, AB, BC, les droites $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ jusqu'à leur rencontre avec AB, BC, CA, et parallèlement à AB, BC, CA, les droites $A_1A_3$, $B_1B_3$, $C_1C_3$ jusqu'à leur rencontre avec CA, AB, BC. Soient A′, B′, C′ les symétriques des sommets A, B, C par rapport aux milieux des côtés opposés.

1° Les droites $AB_3$, $BC_2$, $CA_2$ passent par un même point M, les droites $AC_3$, $BA_3$, $CB_3$ par un même point N de l'ellipse de Steiner, et la droite MN, qui passe par les conjugués harmoniques des points $A_1$, $B_1$, $C_1$ par rapport à BC, CA, AB, enveloppe l'ellipse tangente aux milieux des trois côtés du triangle ABC;

2° Les droites $B_2C_2$, $C_2A_2$, $A_2B_2$ passent par les points C′, A′, B′ et les droites $B_3C_3$, $C_3A_3$, $A_3B_3$ par les points B′, C′, A′;

3° Les côtés $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ du triangle $A_1B_1C_1$ enveloppent trois hyperboles qui ont pour asymptotes les côtés des angles A, B, C du triangle ABC et sont tangentes aux milieux des côtés opposés ;

4° Les droites $A_2A_2$, $B_2B_2$, $C_2C_2$ enveloppent trois paraboles qui passent respectivement par les extrémités des côtés BC, CA, AB et sont tangentes aux deux autres côtés ;

5° Les trois triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ valent chacun le double du triangle ABC ;

6° La somme algébrique des triangles $A_1B_2C_3$, $B_1C_2A_3$, $C_1A_2B_3$ est égale au double du triangle ABC ;

7° Le triangle ABC est moyen proportionnel entre les triangles $AA_2C_3$ et $AB_2A_3$, entre $BB_2A_3$ et $BC_2B_3$, entre $CC_2B_3$ et $CA_2C_3$ ;

8° Le triangle qui a pour sommets les points d'intersection des couples de droites $AA_1$ et $B_1C_1$, $BB_1$ et $C_1A_1$, $CC_1$ et $A_1B_1$ vaut le quadruple du triangle ABC.

**16.** *Continuité de la fonction exponentielle composée.* « Après avoir défini la fonction $a^x$ dans le cas où $x$ est irrationnel, on démontre aisément que la formule

$$a^x \times a^{x'} = a^{x+x'} \tag{1}$$

subsiste alors même que les exposants sont irrationnels.

« Soient $p$ et $q$ les limites respectives de $u$ et $v$, $p$ étant un nombre positif ; soient $\alpha$ et $\beta$ les différences infiniment petites $u - p$, $v - q$. On a, en vertu de (1),

$$u^v = (p+\alpha)^{q+\beta} = (p+\alpha)^q (p+\alpha)^\beta.$$

De la propriété de $x^m$ d'être continue, on conclut que $(p+\alpha)^q$ a pour limite $p^q$ quand $\alpha$ tend vers zéro ; de la propriété de $x^m$ de varier toujours dans le même sens, on conclut que, $\varepsilon$ désignant un nombre fixe satisfaisant aux conditions

$$|p| > \varepsilon > |\alpha|,$$

$(p+\alpha)^\beta$ est compris entre $(p-\varepsilon)^\beta$ et $(p+\varepsilon)^\beta$, quantités qui, en vertu des propriétés de la fonction $a^x$, tendent vers 1, quand $\beta$ tend vers zéro.

« Donc $u^v$ tend bien vers $p^q$ et la fonction $u^v$ est continue » (H. Padé, l'*Enseignement mathématique*, 15 mars 1901, t. III, p. 118-120).

## *CARACTÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR UN NOMBRE QUELCONQUE.

Extrait d'une lettre de M. J. Malengreau (Bruxelles).

D'après un théorème connu dont Plateau a donné une démonstration très élémentaire (*Mathesis*, 1883, p. 196), tout nombre $q$ premier avec 10 est diviseur d'un nombre de la forme 111....1, dont les $m$ chiffres sont tous l'unité; par exemple, pour fixer les idées, soit $m = 5$ et $q\mathrm{Q} = 11111$.

Pour voir si un nombre quelconque N est divisible par $q$, multiplions N par une puissance de 10, $10^r$, par exemple, de manière que $10^r.\mathrm{N}$ ait un nombre de chiffres multiple de $m = 5$ et partageons $10^r.\mathrm{N}$ en tranches de 5 chiffres. Pour fixer les idées, supposons que $10^r.\mathrm{N}$ ait 15 chiffres : $\mathrm{ABCDE}abcde\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$. Retranchons-en le nombre $\mathrm{AAAAA}aaaaaaaaaa$ (ou un autre multiple de 11111). Le reste positif ou négatif sera, dans la première hypothèse,

$$(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,10^{13}+(\mathrm{C}-\mathrm{A})\,10^{12}+(\mathrm{D}-\mathrm{A})\,10^{11}+(\mathrm{E}-\mathrm{A})\,10^{10}$$
$$+(b-a)\,10^{8}+(c-a)\,10^{7}+(d-a)\,10^{6}+(e-a)\,10^{5}$$
$$+(\beta-\alpha)\,10^{3}+(\gamma-\alpha)\,10^{2}+(\delta-\alpha)\,10+(\varepsilon-\alpha).$$

On a

$$10^{5} = 99999+1 = \text{Multiple de } q\mathrm{Q}+1;$$
$$10^{10} = 99999.99999+1 = \text{Multiple de } q\mathrm{Q}+1;$$

Donc $10^r.\mathrm{N}$ est un multiple de $q$, augmenté de $\mathrm{R}+r+\rho$, si

$$\mathrm{R} = (\mathrm{B}-\mathrm{A})\,10^{3}+(\mathrm{C}-\mathrm{A})\,10^{2}+(\mathrm{D}-\mathrm{A})\,10+\mathrm{E}-\mathrm{A},$$
$$r = (b-a)\,10^{3}+(c-a)\,10^{2}+(d-a)\,10+e-a,$$
$$\rho = (\beta-\alpha)\,10^{3}+(\gamma-\alpha)\,10^{2}+(\delta-\alpha)\,10+\varepsilon-\alpha;$$

autrement dit, *pour que* N *soit divisible par* $q$, *il faut et il suffit que la somme des restes des tranches de* $m$ *chiffres formées dans* $10^r.\mathrm{N}$ *et divisées par* $111....1_m$ *soit divisible par* $q$.

*Exemple.* Soit à vérifier si le nombre N de 37 chiffres

33456 78984 64013 87613 50882 56300 37750 62,

est divisible par 271. On sait que $271.41 = 11111$.

Voici les calculs qui s'expliquent d'eux-mêmes :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33456 | 78984 | 64013 | 87613 | 50882 | 56300 | 37750 | 62000 |
| 33333 | 77777 | 66666 | 88888 | 44444 | 55555 | 33333 | 66666 |
| +123 | +1207 | −2653 | −1275 | +6438 | +745 | +4417 | −4666 |

La somme des tranches est $4336 = 16 \times 271$. Le nombre est donc divisible par 271. Dans la cinquième tranche, au lieu de retrancher 55555, on a retranché 44444 ce qui est permis d'après la théorie même, puisque l'on peut retrancher de $10^{4}.N$ tel multiple de 11111 que l'on veut.

Le cas où $q$ n'est pas premier avec 10 se ramène sans peine au précédent.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln, sowie Hülfstafeln zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen. Für den Gebrauch an höheren Schulen bearbeitet von R. Heger.** Leipzig und Berlin. Teubner, 1900 (IV 112 p. in-8, cartonné). Prix : marc 1,60.

*Sommaire :* 1. Table des logarithmes de 1000 à 10000 à 5 décimales; de 100000 à 110000 à 7 decimales (mille logarithmes par page) (pp. 1-21). 2. Nombres spéciaux et leurs logarithmes : $\pi$, son inverse, multiples et sous-multiples; nombres astronomiques, mesure de la Terre, gravité, longueur du pendule (p. 22). 3. Logarithmes à 5 décimales des fonctions trigonométriques de 0 à 90° (et non à 45°) de 10 en 10 secondes pour les 6 premiers degrés, de minute en minute pour les autres (pp. 23-52). 4. Longueur des arcs de cercle, de seconde en seconde pour la première minute, de minute en minute pour le premier degré, puis de degré en degré de 0° à 180°. Valeur de l'arc et des lignes trigonométriques à 5 décimales de 10 minutes en 10 minutes (pp. 53-58). 5. Logarithmes d'addition et de soustraction à 5 décimales (pp. 59-67). 6-7 Carrés des nombres de 100 à 999 (5 chiffres) (pp 68-69) Cubes (à 4 chiffres). 8-21. Petites tables donnant la valeur de beaucoup d'expressions algébriques simples : $x \pm x^{2}$, $\frac{1}{2}x^{2} + x$, ... $(x^{2} - x^{3})(1 + x^{3})$ (pp. 72-78). 22-29. Secteurs de cercle, d'ellipse, de cycloïde; division d'un secteur ou d'un segment circulaire; segments cyclo-paraboliques; barycentre de secteurs et d'arcs circulaires; équation de Kepler pour Mars et Mercure; développante de cercle (pp. 79-85). 30. Tables de mortalité (pp. 86-87) 31. Données géographiques, astronomiques, physiques et chimiques (latitude et longitude des observatoires; coordonnées des étoiles de première grandeur au 1$^{er}$ janvier 1902; éléments des grosses planètes; poids spécifiques, modules et limites d'élasticité; frottement; magnétisme terrestre; poids atomiques, etc.) (pp. 88-96). — Notes relatives à l'usage des tables (pp. 97-112).

Il nous semble que, dans une future édition, la plupart des tables 8-29, pourraient être utilement remplacées par des tables d'antilogarithmes, de logarithmes naturels, d'exponentielles et de fonctions hyperboliques. Peut-être aussi aurait-il été prudent d'introduire, dans les tables de fonctions circulaires, la division décimale *du degré* qui semble devoir l'emporter, au XX$^{e}$ siècle, sur la division sexagésimale et sur l'emploi des grades.

L'exécution typographique de l'ouvrage est extrêmement soignée. (P. M.)

**Estudios de Critica y Pedagogia Matematicas**, par Z. G. DE GALDEANO. Zaragoza, C. Ariño, 1900, in-8 de 151 p.). Prix, 4 pesetas.

*Sommaire.* Introduction (concepts fondamentaux; systèmes philosophico-mathématiques; critiques mathématiques : Carnot, Poncelet, Cournot, Lacroix, Chasles, Duhamel, etc.). 1. Science réelle, science idéale. 2-3. Formation et énumération des concepts mathématiques. 4. Nécessité de la critique mathématique : son objet. 5-14. Critique des doctrines suivantes : arithmétique, algèbre, algèbre de la logique, géométrie énumérative, théorie des fonctions, géométrie cinématique, géométrie différentielle, théorie des groupes de transformations. 15. Imaginaires. 16. L'infini. 17. Unification des concepts. 18. Récapitulation.

Notions pédagogiques. 1. Généralités. 2. L'enseignement des mathématiques. 3. Les divers degrés de l'enseignement.

Le livre contient, sous un petit volume, beaucoup d'idées et beaucoup de renseignements historiques et bibliographiques qui défilent devant le lecteur comme dans un cinématographe (D'après la *Revista trimestral de Matematicas*(*), 1901, I, pp. 19 et 23).

---

**Euclid und die sechs planimetrischen Bücher** Mit Benutzung der Textausgabe von Heiberg von Dr MAX SIMON, Strassburg u. i. E. mit 192 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1901 (VII-141 p. im in 8°). Prix : 5 marcs.

Depuis une quarantaine d'années, un mouvement de retour à Euclide se dessine dans le domaine de l'enseignement des mathématiques élémentaires. D'une part, les recherches relatives aux premiers principes de l'analyse infinitésimale ont appelé l'attention sur l'admirable théorie des proportions entre grandeurs commensurables ou incommensurables, qui constitue le cinquième livre des Éléments; d'autre part, les controverses suscitées par la découverte de la géométrie non euclidienne ont prouvé qu'Euclide avait choisi ses postulats avec une singulière perspicacité et que son premier livre constituait une excellente introduction à la Métagéométrie. Les livres VII-X des Éléments contiennent d'ailleurs les fondements de la théorie des nombres premiers et de celle des radicaux du second degré. Le traité du vieux géomètre grec est donc redevenu pour nous, qu'on le sache ou non, ce qu'il était pour les Anciens, la base de l'enseignement mathématique.

En Angleterre, Euclide n'a jamais été abandonné; mais une foule de soi-disant éditions des Eléments publiées dans les pays anglo-saxons s'éloignent nota-

---

(*) Cette nouvelle Revue, dirigée par M. J. Rius y Casas, professeur à l'Université de Saragosse, paraît depuis cette année en 4 livraisons trimestrielles de 32 pages, le 30 des mois de mars, juin, septembre et décembre (Prix : 6 francs, à adresser : Calle de San Miguel, 50, Tercero, à l'Administration de la Revue). La *Revista trimestral* remplace *El Progreso matematicó* (1891-1896; 1899-1900) de M. Z. de Galdeano, et l'*Archivo de matematicas puras y aplicadas* (1897-1898) de feu Gascó, qui ont cessé l'un et l'autre de paraître.

—

... des méthodes d'Euclide. Cependant
... édition des huit livres géométriques
... or the First Six Books, with the ...
... Text of ROBERT SIMSON, with ...
... essor WALLACE (Cassell, Petter, Galpin
... un shilling). — En Italie, deux géom...
... Gli Elementi d'Euclide, avec notes
... 1868) et l'on n'admet plus, dans
... que les Eléments d'Euclide ou les
... — En Russie, M. VACHTCHENKO-ZAKHAR-
... traduction complète des Eléments. — A
... maintenant terminée, a commencé
... par M. ROSIU dans les premiers volumes
...

... une édition allemande d'Euclide
... (1733) qui a été souvent remaniée
... Nous avons sous les yeux la dernière
... geometrische Bücher aus dem Griechi-
... herausgeben mit einem Anhange
...

... non euclidienne sont bien con-
... traduction ou édition allemande des six
... nombreuses notes. Il a traduit litté-
... ainsi que les démonstrations et
... d'en faire connaître la
... du texte grec. Les
...

... géométrie plane, pour
... Euclide) Introduc-
... euclidienne. Editions
... légende
... (pp. 22-67) avec
... sur le mode d'exposi-
... que l'auteur
... (que celui de Heiberg).
... M. Simon a
... commentaire de Proclus.
... sur les définitions. Livre IV
... remarques sur les définitions.

... bien accueilli par les
... pédagogiques de l'auteur
... personnelle qui en

(P. M.)

## TIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### ×Question 1252.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 32).

*.., , étant donné, on pose, pour abréger,*

$$f(a, b, c) = \frac{\cos a \cos b \cos c}{\cos \varphi} + \frac{\sin a \sin b \sin c}{\cos \varphi} - 1 ;$$

*:ntrer que les quatre équations à six inconnues*

$$f(X, y, z) = 0, \quad f(x, Y, z) = 0, \quad f(x, y, Z) = 0, \quad f(X, Y, Z) = 0$$

*.t une triple infinité de solutions.* (G. FONTENÉ.)

Éliminons $z$ entre les deux premières équations, Z entre les deux dernières; si les deux équations résultantes sont les mêmes, le théorème sera démontré, car le système proposé se réduit alors à trois équations distinctes entre six inconnues.

Or, en résolvant par rapport à $\cos z$ et $\sin z$ les équations

$$\frac{\cos X \cos y \cos z}{\cos \varphi} + \frac{\sin X \sin y \sin z}{\sin \varphi} = 1,$$

$$\frac{\cos x \cos Y \cos z}{\cos \varphi} + \frac{\sin x \sin Y \sin z}{\sin \varphi} = 1,$$

on obtient

$$\frac{\cos z}{\cos \varphi} = \frac{\sin x \sin Y - \sin X \sin y}{D},$$

$$\frac{\sin z}{\sin \varphi} = \frac{\cos X \cos y - \cos x \cos Y}{D},$$

où $D = \sin x \sin Y \cos X \cos y - \sin X \sin y \cos x \cos Y.$

Il en résulte

$$\cos^2\varphi[\sin x \sin Y - \sin X \sin y]^2 + \sin^2\varphi[\cos X \cos y - \cos x \cos Y]^2 - D^2 = 0.$$

Mais on passe des deux premières équations du système proposé aux deux dernières en changeant X, $z$ en $x$, Z et réciproquement. Par conséquent, il suffit de démontrer que l'équation provenant de l'élimination de $z$ entre les deux premières ne change pas quand on y remplace $x$ par X et X par $x$. A cet effet, développons les carrés indiqués et obser-

vons que les doubles produits qui en font partie sont symétriques en $x$ et X; il reste donc à établir la symétrie de l'expression

$$\cos^2\varphi[\sin^2 x \sin^2 Y + \sin^2 X \sin^2 y]$$
$$+ \sin^2\varphi[\cos^2 X \cos^2 y + \cos^2 x \cos^2 Y]$$
$$- \sin^2 x \sin^2 Y \cos^2 X \cos^2 y - \sin^2 X \sin^2 y \cos^2 x \cos^2 Y.$$

En remplaçant partout $\cos^2$ par $1 - \sin^2$, on trouve après quelques réductions

$$\sin^2\varphi[2 - \sin^2 x - \sin^2 X - \sin^2 y - \sin^2 Y]$$
$$+ \sin^2 x \sin^2 X(\sin^2 y + \sin^2 Y) + \sin^2 y \sin^2 Y[\sin^2 x + \sin^2 X]$$
$$- 2\sin^2 x \sin^2 y \sin^2 x \sin^2 Y;$$

la question est donc démontrée. (J. N.)

M. Emmerich a résolu la même question en montrant que la quatrième équation du système proposé se réduit à une identité lorsqu'on y substitue les valeurs de X, Y, Z tirées des trois premières équations. Il signale aussi les solutions singulières:

$$\begin{cases} X = \varphi + 2\lambda\pi, & Y = \varphi + 2\mu\pi, & Z = \varphi + 2\nu\pi, \\ x = \psi + 2\alpha\pi, & y = \psi + 2\beta\pi, & z = \psi + 2\gamma\pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \varphi + 2\lambda\pi, & Y = \psi + 2\mu\pi, & Z = \psi + 2\nu\pi, \\ x = \psi + 2\alpha\pi, & y = \varphi + 2\beta\pi, & z = \varphi + 2\gamma\pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \varphi + 2\lambda\pi, & Y = \psi + 2\mu\pi, & Z = \psi + 2\nu\pi, \\ x = \varphi + 2\alpha\pi, & y = \psi + 2\beta\pi, & z = \psi + 2\gamma\pi; \end{cases}$$

$\psi$ désigne un angle quelconque et $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ sont des nombres entiers quelconques.

---

## ×Question 1967.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 104).

*Sur une circonférence on donne deux points fixes* A *et* C. *On considère tous les quadrilatères inscrits* ABCD *ayant* A *et* C *comme sommets opposés et qui soient en même temps circonscrits à une seconde circonférence dont on demande le lieu géométrique du centre.* (Droz Farny).

*Solution par* MM. Emmerich et Barisien. Supposons l'arc ABC > ADC. Le quadrilatère ordinaire ABCD répondant à la question, si l'on désigne le centre de son cercle inscrit par I, on a

$$\text{angle AIC} = B + IAB + ICB = B + \tfrac{1}{2}(DAB + DCB) = B + 90°.$$

D'où l'on voit que le lieu de I est le cercle qui coupe orthogonalement en A et C la circonférence donnée. Le point I étant choisi arbitrairement sur le cercle trouvé, on obtient les sommets B et D en

menant dans le cercle donné des cordes par I et par les extrémités E, F du diamètre perpendiculaire à AC.

Suivant que le point I est choisi à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle donné, les côtés eux-mêmes ou leurs prolongements sont touchés par le cercle de centre I.

Si l'on veut que les côtés AB et CD se coupent à l'intérieur du cercle donné, une analyse facile conduit aux points E, F comme centres d'une infinité de cercles satisfaisant à la question.

Autres solutions par MM. Dépez et G. Gérard.

M. Barisien a également donné une solution analytique, fondée sur le lemme suivant :

Si un cercle quelconque passant par les foyers A, C d'une hyperbole rencontre l'une des branches de cette courbe en B, D, et l'autre branche en B', D', le quadrilatère ABCD est circonscriptible à un cercle intérieur, et le quadrilatère AB'C'D est circonscriptible à un cercle extérieur.

Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de reproduire les calculs de cette solution et les remarques qui l'accompagnent.

---

## Question 1378.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 176.)

*Par un point fixe* A, *on mène une sécante quelconque qui rencontre une circonférence donnée* O *aux points* B *et* C, *et on construit le carré* BCDE. *Trouver les lieux des sommets* D, E *et du centre du carré.*

(G. de Rocquigny).

*Solution par* M. Emmerich. Construisons sur BC comme base le triangle BCP de forme donnée et appelons B, C, P les angles constants de ce triangle. Abaissons PQ et OS perpendiculaires à AB et posons AO = $a$, angle OAB = $\varphi$, AQ = X, PQ = Y. De

$$BS = CS = \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2\varphi}, \quad SQ : BS = \sin(B - C) : \sin P,$$

$$PQ : BC = \sin B \sin C : \sin P,$$

on conclut

$$\left.\begin{aligned} X &= a\cos\varphi - \frac{\sin(B - C)}{\sin P}\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\varphi}, \\ Y &= \frac{2\sin B \sin C}{\sin P}\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Abaissons alors PT perpendiculaire à AO et posons $AT = x$, $PT = y$. On aura

$$X = y \sin \varphi + x \cos \varphi, \quad Y = y \cos \varphi - x \sin \varphi. \qquad (2)$$

L'élimination de X, Y, $\varphi$ entre les équations (1) et (2) donne, pour l'équation du lieu du sommet P,

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 \sin^2 P + a^2 \{2(x - a) \sin B \sin C + y \sin (B - C)\}^2 = R^2 [(x^2 + y^2) \sin^2 (B - C) + 4 \{y^2 + (x - a)^2\} \sin^2 B \sin^2 C - 4ay \sin B \sin C \sin (B - C)],$$

R désignant le rayon du cercle donné.

*Lieu du centre du carré* :

$$P = \frac{1}{2}\pi, \quad B = C = \frac{1}{4}\pi;$$

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 + (a^2 - R^2)(x - a)^2 - R^2 y^2 = 0.$$

*Lieux des sommets* D *et* E :

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 + a^2 \{2(x - a) \pm y\}^2 = R^2 [x^2 + y^2 + 4 \{(y^2 + (x - a)^2\} \mp 4ay].$$

*Cas spécial* : $a = R$. Lieu du centre du carré :

$$(x^2 + y^2 - Rx - Ry)(x^2 + y^2 - Rx + Ry) = 0.$$

Lieux des sommets D et E :

$$(x^2 + y^2 \mp 2Ry)(x^2 + y^2 - 2Rx \pm 2Ry) = 0.$$

Ces derniers résultats peuvent être confirmés par une méthode élémentaire.

Nota. La même question a été résolue par MM. Barisien, Déprez et Lez. Faute d'espace, nous devons nous borner à emprunter à ces solutions quelques remarques intéressantes.

1. Si l'on prend pour pôle le centre O et pour axe polaire la droite OA, le lieu du centre du carré a pour équation

$$r = a \cos \theta \pm \sqrt{R^2 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

C'est une quartique bicirculaire qui a une forme analogue à celle d'un limaçon de Pascal, ayant un point double en O et OA pour axe de symétrie. Si $a < \frac{R}{\sqrt{2}}$, O est un point isolé; si $a > \frac{R}{\sqrt{2}}$ et $< R$, la courbe possède une boucle; si $a > R$, la courbe affecte la forme d'un huit. (Barisien.)

2. Les deux diagonales CE, BD enveloppent deux coniques ayant pour foyer le point A.

Les côtés CD, BE enveloppent une conique ayant pour foyer le point A et pour cercle principal le cercle donné O.

Le côté DE enveloppe une conique de centre A; l'un des axes est dirigé suivant AO. Car, si l'on mène AH perpendiculaire à ED et qu'on désigne par $\varphi$ l'angle HAO et par $\delta$ la distance AH, on a

$$\delta^2 = \overline{BC}^2 = R^2 - a^2 \sin^2\theta = R^2 \cos^2\theta + (R^2 - a^2)\sin^2\theta,$$

formule à rapprocher de l'équation

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}.$$

La parallèle à BC menée par le centre I du carré BCDE enveloppe une conique homothétique à la précédente; par suite I décrit une podaire de conique. (J. Déprez.)

---

## Question 1299.

(Voir *Mathesis*, (2, X, p. 276).

*Construire une hyperbole équilatère, connaissant un point ou une tangente, un sommet et la tangente en ce sommet.*

1° *On donne le sommet* S, *la tangente s en ce point et le point* M *de la courbe.*

La perpendiculaire $x'x$ en S à $s$ donne l'axe transverse. Construisons le symétrique M' de M par rapport à $x'x$; l'orthocentre S' du triangle isocèle SMM' inscrit à la courbe est le second sommet réel. Les asymptotes seront les droites OU, OV menées par le milieu O de SS' à 45° sur $x'x$. (Brocard, Retali).

Soit MP l'ordonnée de M; et Q le symétrique de S par rapport à P; la relation connue

$$\overline{MP}^2 = PS \cdot PS' = PQ \cdot PS'$$

montre que MS' est perpendiculaire à MQ. (Droz Farny, Soons).

L'équation de la courbe rapportée au sommet S étant

$$x^2 - y^2 + 2ax = 0,$$

si on l'applique au point donné M, on trouve

$$a = \frac{\overline{MP}^2 - \overline{SP}^2}{SP}.$$ (Andrien, Emmerich).

2° *On donne* S, *s et une tangente quelconque t.* Supposons que $t$ coupe

$s$ en B, et les parallèles aux asymptotes menées par S (parallèles qu'on sait construire) aux points C, C'. D'après le théorème de Desargues, le triangle inscrit dont deux côtés sont dirigés suivant SC, SC' et la tangente $s$ marquent sur $t$ une involution dont un point double est le point de contact M de $t$; C et C' sont conjugués, et B est le point central. On en conclut $BM = \pm\sqrt{BC.\,BC'}$.

*Autrement.* Soit $t'$ la symétrique de $t$ par rapport à $x'x$. Le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites au triangle $stt'$ est le cercle conjugué avec ce triangle; ce cercle coupe $x'x$ en deux points O, O' dont chacun est le centre d'une hyperbole satisfaisant au problème. (Retali).

Supposons que les asymptotes OU, OV rencontrent $s$ en E, E' et $t$ en H, H'. Les triangles OEE', OHH' étant équivalents, on a $\overline{OE}^2 = OH.\,OH'$. Soient R le point de rencontre de $t$ avec $x'x$, et K celui de OU avec la droite $t'$ symétrique de $t$ par rapport à $x'x$; on aura $OK = OH'$ et, par suite, $\overline{OE}^2 = OK.\,OH$. Une parallèle quelconque à OU rencontrera les droites RO, RK, RE, RH en des points $o$, $k$, $e$, $h$ tels que $\overline{eo}^2 = ok.\,oh$, relation qui permet de déterminer le point $e$, et ensuite E. (Droz Farny).

La courbe étant rapportée au sommet S, l'équation d'une tangente $t$ est

$$y = mx + a\left(m \pm \sqrt{m^2 - 1}\right).$$

Donc, si $t$ coupe les axes des coordonnées en R et R', on a

$$m = \frac{SR'}{SR}, \quad SR' = a\left(m \pm \sqrt{m^2 - 1}\right),$$

d'où l'on déduit

$$a = \frac{SR.\,SR'}{SR' \pm \sqrt{\overline{SR'}^2 - \overline{SR}^2}}.$$

Il y a donc deux solutions pourvu que l'on ait $SR' > SR$; l'une d'elles correspond au cas où $s$ et $t$ touchent une même branche d'hyperbole, et l'autre au cas où ces droites touchent des branches différentes. (Andrien, Emmerich).

Par un point quelconque $o$ de $x'x$ menons deux droites $ou$, $ov$ à 45° sur $x'x$, et imaginons l'hyperbole équilatère qui a pour asymptotes $ou$, $ov$ et touche $t$; le milieu $m$ du segment de $t$ compris entre $ou$, $ov$ sera le point de contact, et la moyenne géométrique entre les segments $mk$, $mk'$ d'une parallèle à $x'x$ et rencontrant $ou$, $ov$ en $k$, $k'$ donne la longueur du demi-axe de l'hyperbole auxiliaire, et sert à déterminer ses sommets $s$, $s'$. Cette courbe et la courbe cherchée étant homothétiques

par rapport au point R où $t$ coupe $x'x$, le rapport d'homothétie sera RS : R$s$ ou RS : R$s'$. La question s'achève facilement. (Soons).

M. Rose ramène la construction à celle d'une conique dont on donne cinq points, savoir S, P, P' et les points à l'infini sur les asymptotes, ou à celle d'une conique dont on donne trois tangentes $s$, $t$, $t'$ et deux points.

---

***Question 1300.**

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 276).

***Résoudre le système d'équations***

$$x^2+y^2=1, \quad k^2x^2+z^2=1, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ a & b-1 & c-1 \\ a' & b'-1 & c'-1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

***en écartant la solution évidente*** $x=0, y=1, z=1$ ***et les deux solutions*** $(x=a, y=b, z=c)$, $(x=a', y=b', z=c')$ ***que l'on suppose exister; en admettra d'ailleurs que*** $1-k^2a^2a'^2$ ***est différent de zéro.***

(G. Fontené).

*Solution par* M. E. N. Barisien. Si l'on pose

$$A=(b-1)(c'-1)-(b'-1)(c-1), \quad B=a'(c-1)-a(c'-1),$$
$$C=a(b'-1)-a'(b-1), \quad D=B+C,$$

la troisième équation s'écrit

$$Ax+By+Cz=D. \tag{1}$$

Les deux premières équations donnent

$$y=\sqrt{1-x^2}, \quad z=\sqrt{1-k^2x^2}.$$

En substituant dans (1), on a l'équation en $x$

$$Ax+B\sqrt{1-x^2}+C\sqrt{1-k^2x^2}=D,$$

qui devient, après que l'on a chassé les radicaux,

$$[x^2(A^2+B^2+C^2k^2)-2ADx+2BC]^2=4B^2C^2[k^2x^4-(k^2+1)x^2+1].$$

Cette équation admet bien la solution $x=0$; elle se réduit donc à

$$x^3[(A^2+B^2+C^2k^2)^2-4B^2C^2k^2]+\cdots-8ABCD=0.$$

Elle admet aussi pour racines $x_1=a$, $x_2=a'$. De sorte que la troisième racine $x_3$ résulte de

$$x_1x_2x_3=aa'x_3=\frac{8ABCD}{(A^2+B^2+C^2k^2)^2-4B^2C^2k^2}.$$

Notes. I. La résolution du système proposé revient à chercher les points d'intersection de deux cylindres du second degré et d'un plan. Les coordonnées de trois de ces points étant $(a, 1, 1)$, $(a, b, c)$, $(a', b', c')$, celles du quatrième point sont de la forme

$$x = \frac{\mu a + \nu a'}{\lambda + \mu + \nu}, \quad y = \frac{\lambda + \mu b + \nu b'}{\lambda + \mu + \nu}, \quad z = \frac{\lambda + \mu c + \nu c'}{\lambda + \mu + \nu}. \tag{3}$$

Nous prendrons pour inconnues auxiliaires $\lambda$, $\mu$, $\nu$. D'ailleurs on est conduit aux mêmes valeurs de $x$, $y$, $z$ en s'appuyant sur cette propriété qu'il existe une même relation linéaire entre les éléments de chaque colonne d'un déterminant nul.

Portons les valeurs (3) dans les équations (1); en ayant égard aux hypothèses

$$a^2 + b^2 = 1, \qquad k^2a^2 + c^2 = 1, \tag{4}$$
$$a'^2 + b'^2 = 1, \qquad k^2a'^2 + c'^2 = 1, \tag{5}$$

on trouve

$$(aa' + bb' - 1)\mu\nu + (b' - 1)\nu\lambda + (b - 1)\lambda\mu = 0,$$
$$(k^2aa' + cc' - 1)\mu\nu + (c' - 1)\nu\lambda + (c - 1)\lambda\mu = 0.$$

Ce système admet les valeurs $(\mu = 0, \nu = 0)$, $(\nu = 0, \lambda = 0)$, $(\lambda = 0, \mu = 0)$, qui correspondent aux trois solutions déjà connues. Pour obtenir la 4e solution, nous divisons les équations précédentes par $\lambda\mu\nu$, et les résolvons ensuite par rapport à $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$, etc. (J. N.)

II. La question n'est élémentaire qu'en apparence et se rapporte en réalité à la théorie des fonctions elliptiques. Si l'on pose $x = \operatorname{sn}(2\xi)$, $a = \operatorname{sn}(2\alpha)$, $a' = \operatorname{sn}(2\alpha')$, la relation donnée devient, après des transformations assez naturelles,

$$\operatorname{sn}(\alpha' + \xi)\operatorname{sn}\alpha' - \operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}(\alpha + \xi) = 0.$$

On déduit de là, d'abord $\xi + \alpha + \alpha' = 0$, puis les valeurs

$$x = -\frac{ab'c' + a'bc}{1 - k^2a^2a'^2}, \quad y = \frac{bb' - aa'cc'}{1 - k^2a^2a'^2}, \quad z = \frac{cc' - k^2aa'bb'}{1 - k^2a^2a'^2},$$

dont on peut ensuite vérifier l'exactitude *à posteriori*. (P. M.)

---

## Question 1808.

(Voir *Mathesis* (3), t. 1, p. 64.)

*Soient* (D) *une conique inscrite dans le triangle* ABC; A', B', C', *les points où une tangente quelconque à la conique coupe* BC, CA, AB. *La*

*conique variable* (T) *qui touche* AA′, BB′, CC′ *respectivement en* A, B, C *passe constamment par un point fixe* P.

*Examiner les cas particuliers où* (D) *est l'un des cercles tritangents, ou a son centre au point de Lemoine, ou est l'ellipse de Brocard, l'ellipse de Simmons, la parabole de Kiepert, etc.* (J. Déprez.)

*Solution par* M. A. Gob. Soient $l$, $m$, $n$ les coordonnées de la droite A′B′C′. L'équation tangentielle de (D) sera

$$\frac{L}{l}+\frac{M}{m}+\frac{N}{n}=0. \qquad (1)$$

Les droites AA′, BB′, CC′ ont pour équations $my+nz=0$, ...; par suite, l'équation de (T) sera

$$\frac{1}{lx}+\frac{1}{my}+\frac{1}{nz}=0.$$

L'équation (1) montre que le point P qui a pour coordonnées $\frac{1}{L}, \frac{1}{M}, \frac{1}{N}$ se trouve sur la conique (T). Le point n'est autre chose que le pôle d'homologie de la conique (D).

Ce résultat si simple nous semble rendre inutile la considération des cas particuliers.

*Solution par* M. Droz-Farny. Représentons par A′ et A″ un couple de points isogonaux sur BC ; c'est-à-dire tels que les droites AA′ et AA″ soient symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle A. Les points A′ et A″ décrivent donc sur BC deux ponctuelles homographiques en involution. Si une droite coupe BC, CA, AB aux points A′, B′, C′ les isogonaux A″, B″, C″ de ces points se trouvent sur une seconde droite que j'appellerai la *transversale isogonale* de la première. On sait que la transformée par points inverses de la droite A″B″C″ est une conique circonscrite au triangle ABC et admettant en ces points pour tangentes les droites AA′, BB′ et CC′,

La tangente variable à la conique inscrite coupe les côtés AB et AC suivant deux ponctuelles homographiques C′ et B′ ; les ponctuelles C″ et B″ seront donc aussi homographiques. Or, pour la position BC de la tangente, C′ et B′ coïncident respectivement avec B et C, C″ et B″ coïncident avec A ; d'où le théorème :

*Lorsque la tangente variable enveloppe la conique inscrite, sa transversale isogonale* A″B″C″ *passe par un point fixe* Π.

Représentons par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les points de contact de la conique avec les trois côtés du triangle.

Lorsque la tangente A'B'C' coïncide avec BC, les points A', B', C' deviennent respectivement $\alpha'$, C, B; par conséquent A'', B'', C'' deviennent $\alpha''$, A, A. La transversale isogonale de BC sera donc $A\alpha''$; de même pour AB et AC. Par conséquent, Π est le conjugué isogonal du point de Gergonne de la conique inscrite.

Les transformées isogonales des droites A''B''C'' passent donc toutes par 4 points fixes : A, B, C et le conjugué isogonal de Π ou le point P de Gergonne de la conique donnée.

Ainsi, pour le cercle inscrit, le point P est le point de Gergonne du triangle; pour l'ellipse K qui a ce point comme centre, P sera l'orthocentre; pour l'ellipse de Brocard, P sera le point de Lemoine; pour l'ellipse de Simmons, P sera le premier centre isogone; etc.

---

## ×Question 1314.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 88.)

***Par les trois sommets d'un triangle*** ABC ***on mène parallèlement à une même direction trois droites*** AA', BB', CC' ***limitées en*** A', B', C' ***aux côtés opposés. Démontrer que les points qui divisent ces droites additivement dans le rapport*** 1 : 2 ***sont en ligne droite.*** (J. Neuberg.)

*Solution par* M. Emmerich. Appelons ces points A'', B'', C'' et menons A''B et A''C qui rencontrent CC' et BB' respectivement en C''' et B'''. De

$$B'B''' : B'''B = AA'' : A''A' = 1 : 2,$$
$$C'C''' : C'''C = AA'' : A''A' = 1 : 2$$

on conclut que B'', C'' sont les milieux de BB''', CC'''. Ces lignes étant parallèles et limitées par les droites A''B, A''C il s'ensuit que les points A'', B'', C'' sont en ligne droite.

*Solution par* M. E. Colart. Une seule des droites, soit AA', est intérieure aux triangle. Soient N et P les points segmentaires sur BB' et CC', et M le point d'intersection de NP avec AA'. Dans le trapèze BNPC, on a

$$MA' = \frac{BN.A'C + CP.BA'}{BC},$$

ou, à cause de $BN = \frac{1}{3}BB'$, $CP = \frac{1}{3}CC'$,

$$MA' = \frac{BB'.CA' + CC'.BA'}{3BC}. \qquad (1)$$

Mais

$$\frac{CA'}{AA'}=\frac{BC}{BB'} \quad \text{et} \quad \frac{BA'}{AA'}=\frac{BC}{CC'}.$$

Par substitution dans (1), on déduit

$$MA'=\tfrac{2}{3}AA' \quad \text{ou} \quad AM:MA'=1:2.$$

*Solution par* M. V. Retali. Les droites AA', BB', CC' qui unissent les sommets ABC d'un triangle à un point arbitraire P de son plan coupent la polaire trilinéaire de P, par rapport au triangle, en trois points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que

$$(AA'P\alpha)=(BB'P\beta)=(CC'P\gamma)=-2.$$

Si P est à l'infini, les points qui divisent AA', BB', CC' additivement dans le rapport 1 : 2 sont donc sur la polaire trilinéaire de P par rapport à ABC.

Lorsque la direction varie, l'enveloppe de la droite $(\alpha\beta\gamma)$, c'est-à-dire la poloconique de la droite à l'infini par rapport au triangle ABC, est donc l'ellipse tangente aux côtés du triangle en ses points milieux.

*Solution par* M. V. Cristesco (Bucarest). Pour fixer les idées, supposons le sommet A compris entre les droites BB', CC'. Soient alors $A_1$, $B_1$, $C_1$ des points situés respectivement sur AA', BB', CC' tels que

$$\frac{AA_1}{A_1A'}=\frac{BB_1}{B_1B'}=\frac{CC_1}{C_1C'}=\frac{m}{n}.$$

On en déduit

$$A_1A'=\frac{n}{m+n}AA', \quad B_1B=\frac{m}{m+n}BB', \quad C_1C=\frac{m}{m+n}CC'. \quad (1)$$

Désignons par $S_1$ l'aire du triangle $A_1B_1C_1$, par S l'aire du triangle donné ABC et par $S_a$, $S_b$, $S_c$ les aires des trapèzes $BB_1C_1C$, $CC_1A_1A'$, $A'A_1B_1B$. On peut écrire

$$S_1=\pm(S_b+S_c-S_a). \quad (2)$$

Par le point A menons la perpendiculaire DE sur les droites BB', CC'. On aura

$$2S_1=\pm[(CC_1+A'A_1)AE+(A'A_1+BB_1)AD-(BB_1+CC_1)DE].$$

En observant que DE = DA + AE, et en tenant compte des égalités (1), on trouve

$$2S_1=\pm\frac{1}{m+n}[n.AA'.DE-m(BB'.AE+CC'.AD)].$$

Or les triangles semblables CBB', CAA' et BCC', BAA' donnent

$$BB'.AE = CC'.AD = AA'.DE.$$

Donc

$$2S_1 = \pm\frac{n-2m}{m+n}AA'.DE.$$

On voit facilement que le produit AA'.DE est égal au double de l'aire du triangle ABC; donc

$$S_1 = \pm\frac{n-2m}{m+n}S \qquad (3)$$

*L'aire du triangle* $A_1B_1C_1$ *est donc indépendante de la direction donnée.*

Quand la direction donnée est parallèle à un côté quelconque du triangle ABC, un des points $A_1$, $B_1$, $C_1$ rejeté à l'infini, les deux autres points se trouvent sur le côté opposé, et coïncident avec son milieu quand $m : n = 1 : 2$.

Si la direction donnée n'est pas parallèle à un côté du triangle ABC, deux quelconques des points $A_1$, $B_1$, $C_1$ ne peuvent jamais coïncider. Donc l'aire $S_1$ ne peut être nulle que si les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ sont en ligne droite. Or l'égalité (3) nous montre que l'aire $S_1$ est nulle, quand

$$m : n = 1 : 2.$$

Dans l'égalité (3) il faut prendre le signe + quand $m : n < 1 : 2$, et le signe — quand $m : n > 1 : 2$.

Démonstrations analytiques par MM. Boutin (coordonnées barycentriques), Barisien (axes coordonnés AC, AB), Pire (axes AB, AA') et Van Cauwenberghe (axes rectangulaires quelconques). Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de les reproduire.

---

## Question 1815.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 112.)

*Trouver une courbe telle que la distance du pied de l'ordonnée à la normale soit constante.* (G. Petit-Bois).

*Solution par* MM. Emmerich, Barisien, Colart, Van Cauwenberghe et Verheugen. En posant $y' = \operatorname{tg}\alpha$ on a $y \sin\alpha = c$; d'où successivement,

$$y^2y'^2 = c^2(1 + y'^2),$$

$$y'^2(y^2 - c^2) = c^2,$$

$$\int dy\sqrt{y^2 - c^2} = cx + \frac{1}{2}c',$$

$$c^2\log(y - \sqrt{y^2 - c^2}) + y\sqrt{y^2 - c^2} = 2cx + c'.$$

Cette équation peut encore prendre la forme,

$$x = \frac{1}{2c} y \sqrt{y^2 - c^2} + \frac{1}{2a} \operatorname{Arg\,Th} \frac{y}{c},$$

pourvu que l'origine des coordonnées soit convenablement choisie.

*Solution par* M. E. Cesàro. On sait que, dans une chaînette, si l'on prend comme axe des $x$ la directrice, la projection de l'ordonnée de tout point M sur la *normale* en M a une valeur constante $a$. On sait aussi que l'ordonnée du centre de courbure en M est double de l'ordonnée de M, d'où il suit que sa projection sur la normale à la chaînette (c'est-à-dire sur la *tangente* à la développée) est $2a$. Donc la *développée de la chaînette* répond à la question. Il n'y a pas d'autres courbes jouissant de la même propriété. Considérons, en effet, la courbe inconnue comme la développée d'une autre courbe. On met le problème en équation en écrivant $y \cos \varphi = 2a$. D'ailleurs, $\rho$ étant l'arc de la courbe demandée, on doit avoir $dy = \cos \varphi \, . \, d\rho$, et, par suite, $y dy = 2a d\rho$, d'où $y^2 = 4a\rho$; puis, successivement,

$$\rho = \frac{a}{\cos^2 \varphi}, \quad s = \int \rho d\varphi = a \operatorname{tg} \varphi, \quad \rho = a + \frac{s^2}{a}.$$

On sait que la dernière équation caractérise la chaînette.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**1011.** A un quadrilatère donné ABCD inscrire un losange MNPQ dont les côtés soient parallèles aux diagonales AC, BD.

Un sommet M du losange divise le côté AB dans le rapport des diagonales AC, BD.

**1012.** Si l'on pose

$$X = \sin x (\cos y - \cos z), \quad Y = \sin y (\cos z - \cos x),$$
$$Z = \sin z (\cos x - \cos y),$$

démontrer que

$$X + Y + Z = -4 \sin \tfrac{1}{2}(x - y) \sin \tfrac{1}{2}(y - z) \sin \tfrac{1}{2}(z - x),$$
$$-X + Y + Z = 4 \sin \tfrac{1}{2}(x + y) \sin \tfrac{1}{2}(y - z) \sin \tfrac{1}{2}(z + x).$$

. . . . . .

Si l'on pose

$$X' = \cos x (\sin y - \sin z), \quad Y' = \cos y (\sin z - \sin x),$$
$$Z' = \cos z (\sin x - \sin y),$$

démontrer que

$$X' + Y' + Z' = 4 \sin \tfrac{1}{2}(x - y) \sin \tfrac{1}{2}(y - z) \sin \tfrac{1}{2}(z - x)$$
$$- X' + Y' + Z' = - 4 \cos \tfrac{1}{2}(x + y) \sin \tfrac{1}{2}(y - z) \cos \tfrac{1}{2}(z - x).$$

. . . . . .

Montrer que la transformation de $X + Y + Z$ suffit pour trouver immédiatement $X' + Y' + Z'$, $- X + Y + Z$, .... (GRUNERT.)

**1013.** Étant données deux circonférences concentriques, on mène à la petite circonférence une tangente qui rencontre l'autre aux points A et B; de ces points on mène à la première deux nouvelles tangentes qui rencontrent l'autre aux points D et C. Démontrer que la tangente menée en B, la corde DC et la droite joignant A au point de contact de BC concourent en un même point.

**1014.** La tangente menée en un point M d'une ellipse rencontre le grand axe AA' en T; la perpendiculaire élevée en T sur cet axe rencontre les cordes AM, A'M en D, E; démontrer que TD = TE.

A démontrer par le calcul ou à déduire du faisceau harmonique M (AA'TP), où P est le pied de l'ordonnée de M.

**1015.** Si un angle droit se meut de manière que ses côtés passent constamment par deux sommets consécutifs d'un carré, sa bissectrice passe constamment par le centre du carré.

Généraliser cette proposition.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1331.** Si par le sommet A d'une chaînette verticale (C) de paramètre $a$ on fait passer une chaînette verticale (C') de paramètre $\frac{a}{2}$ qui coupe (C) en B, on a entre les arcs $s$ et $s'$ respectivement interceptés sur (C) et sur (C'), la relation

$$s'^2 = s^2 + h^2,$$

$h$ désignant la différence de niveau des points A et B. (G. GÉRARD).

**1232.** Soit M le point de la circonférence circonscrite au triangle ABC, ayant pour coordonnées normales

$$\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}.$$

1° Démontrer la relation

$$MA + MB + MC = 0$$

(MA est positif si MA coupe BC hors du triangle, etc.).

2° On a

$$MA = \frac{R}{d}(b-c), \quad MB = \frac{R}{d}(c-a), \quad MC = \frac{R}{d}(a-b),$$

$d$ désignant la distance OI du centre du cercle circonscrit au centre du cercle inscrit.

3° MA, MB, MC coupent BC, CA, AB sur une parallèle à l'axe antiorthique et distante de cet axe de $\frac{Rr}{d}$, tiers de la distance du même axe au point I.

4° Montrer par *transformation continue* (Voir *Mathesis*, 1892, p. 54) quels sont les résultats analogues pour le point $M_a$, transformé continu en A de M $\left(\text{Coordonnées } \frac{1}{b-c}, -\frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$. (E. Lemoine.)

**1233.** Soit SABCD une pyramide quelconque ayant pour base un parallélogramme ABCD. Si un plan rencontre les arêtes SA, SB, SC, SD aux points A′, B′, C′, D′, on a la relation

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}.$$

Le cas particulier d'une pyramide régulière à base carrée a été indiqué par M. A. S. Lévy. (J. N.)

**1234.** Soient O le centre d'un carré ABCD et M un point quelconque de son plan. On a

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 4\overline{MO}^2 + 2\overline{AB}^2$$

$$\overline{MA}^4 + \overline{MB}^4 + \overline{MC}^4 + \overline{MD}^4 = 4MO^4 + 8\overline{AB}^2 . \overline{MO}^2 + \overline{AB}^4.$$

La première égalité est déjà connue. (V. Cristesco.)

**1225.** En supposant fixes deux sommets B et C d'un triangle ABC, si l'on fait correspondre au point de Lemoine du triangle les deux sommets A, A′, on établit une transformation plane double du deuxième ordre identique à celle qui sert à passer de la géométrie non euclidienne (hyperbolique) à la géométrie euclidienne. (V. Retali).

Cette transformation a déjà été étudiée par M. Schoute, si nos souvenirs sont exacts. (J. N.)

**1226.** Soit S le sommet d'un cône de révolution passant par une ellipse donnée E. Soient A, B, C, D quatre sommets consécutifs quelconques d'un polygone inscrit dans E et dont les côtés sont vus, de S, sous des angles égaux.

Démontrer que l'on a

$$\frac{\lambda}{SA}+\frac{1}{SC}=\frac{1}{SB}+\frac{\lambda}{SD},$$

$\lambda$ étant un paramètre invariable, pour un polygone donné, et vérifier la proposition, en prenant le point S au foyer de E.

(G. de Longchamps).

**1227.** Soit un triangle ABC. Soit M un point quelconque de la circonférence circonscrite qui se projette en A′, B′, C′, sur BC, CA, AB. Sur les hauteurs partant de A, B, C on prend les longueurs $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ respectivement équipollentes à MA′, MB′, MC′. Démontrer que les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ sont sur la droite de Simson du point $M_1$ diamétralement opposé à M. Lorsque le point M est quelconque, les triangles $A_1B_1C_1$, A′B′C′ sont équivalents. (E. Lemoine).

**1228.** Soit une pyramide régulière dont l'arête est $z$, l'apothème $z_0$, l'angle dièdre suivant chaque arête latérale U, et l'angle de cette arête avec la hauteur est $\theta$. Prouver que, dans tout système de géométrie,

$$\lim n\left(\frac{z_0}{z}-\frac{U}{\pi}\right)=2\cos\theta,$$

quand le nombre $n$ des faces de la pyramide croît indéfiniment.

(P. Barbarin.)

## SUR LA TÉTRACUSPIDALE DE BELLAVITIS,

par M. F. Gomes Teixeira, directeur de l'École polytechnique de Porto.

1. On a beaucoup étudié l'enveloppe d'une droite qui se déplace de manière que le segment compris entre deux droites données soit constant; et on sait que cette courbe est parallèle à une *astroïde*. On a appelé cette courbe *tétracuspidale*, et on a attribué à Bellavitis cette désignation. Mais la courbe qui a été étudiée par cet illustre géomètre dans sa *Sposizione del metodo delle Equipollenze*(*) et à laquelle il a donné ce nom, est une ligne différente qui a pour équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1, \tag{1}$$

les axes des coordonnées étant *obliques*.

La *tétracuspidale parallèle à l'astroïde* et la *tétracuspidale de Bellavitis* ont l'une et l'autre quatre points de rebroussement réels, mais les deux courbes ne coïncident pas, parce que les quatre tangentes à la première en ces points sont quatre droites distinctes; et, au contraire, dans la deuxième, les tangentes en ces points coïncident deux à deux.

Il est facile d'obtenir au moyen des méthodes ordinaires du calcul différentiel les propriétés que Bellavitis a établies par la méthode des équipollences, comme on va le voir.

2. L'équation de la tangente à la courbe représentée par l'équation (1) est

$$Y=-\left(\frac{b^2y}{a^2x}\right)X+b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}};$$

par conséquent, cette droite coupe les axes OY, OX en deux points P et Q, dont les coordonnées sont

$$(0,\quad b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}),\quad (a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}},\quad 0).$$

Si on tire ensuite par ces deux points deux droites parallèles aux axes, elles déterminent, par leur intersection, un point M, dont les coordonnées sont

$$x_1=a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}},\quad y_1=b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}};$$

(*) Voir NAM, (2), XIII, 229, où on trouve une traduction, par M. Laisant, de ce mémoire.

et si l'on porte les valeurs de $x$ et $y$ données par ces équations, dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

On en conclut que, *si, par les points d'une ellipse, on tire des droites parallèles à deux diamètres conjugués, l'enveloppe des droites qui passent par les points où elles coupent les diamètres considérés est une tétracuspidale de Bellavitis.*

A chaque système de diamètres conjugués de l'ellipse considérée correspond une tétracuspidale. Aux axes correspond la développée de l'ellipse.

3. *La tétracuspidale de Bellavitis est l'enveloppe des ellipses représentées par l'équation*

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (2)$$

*dont les axes satisfont à la condition*

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=1. \qquad (3)$$

En effet, si l'on différentie ces équations par rapport aux paramètres variables $\alpha$ et $\beta$, on trouve

$$\frac{x^2}{\alpha^3}d\alpha+\frac{y^2}{\beta^3}d\beta=0, \quad \frac{d\alpha}{a}+\frac{d\beta}{b}=0;$$

d'où l'on déduit, $\lambda$ désignant une inconnue auxiliaire,

$$\frac{x^2}{\alpha^3}=\frac{\lambda}{a}, \qquad \frac{y^2}{\beta^3}=\frac{\lambda}{b}.$$

En écrivant

$$\frac{x^2}{\alpha^3}=\lambda\frac{\alpha}{a}, \qquad \frac{y^2}{\beta^3}=\lambda\frac{\beta}{b}$$

et en additionnant, on obtient, eu égard aux équations (2) et (3), $\lambda=1$ ; par conséquent, le point de contact de l'ellipse (2) avec l'enveloppe, a pour coordonnées

$$x=\sqrt{\frac{\alpha^3}{a}}, \qquad y=\sqrt{\frac{\beta^3}{b}}.$$

Tirons de là les valeurs de $\alpha$, $\beta$ pour les porter dans l'équation (3); il vient pour l'équation de l'enveloppe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

4. Pour distinguer les deux courbes auxquelles on donne le nom de *tétracuspidale*, nous venons d'appeler l'une *tétracuspidale parallèle à l'astroïde* et l'autre *tétracuspidale de Bellavitis*. On pourrait aussi, comme nous l'avons proposé dans *El Progreso matematico* (Zaragoza, 1890) appeler la première *astroïde à deux axes*; l'astroïde ordinaire serait alors appelée *astroïde à quatre axes*.

---

## THÉORÈMES SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES;

par M. G. de Rocquigny-Adanson.

L'ensemble des progressions

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | . | 1 | | | | 5 | | | 3 |
| | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | . | | 4 | | 8 | | | | 6 |
| ($\alpha$) | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | . | | | 9 | | | 3 | 6 | 9 |
| | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | . | | | | | | | | |
| | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | . | | | | | | | | |
| | . | . | . | . | . | . | | | | | | | | |

jouit des mêmes propriétés que l'ensemble des progressions donné dans *Mathesis*, T. XXI, p. 69, théor. I et III.

I. Il présente en outre une propriété assez curieuse.

Soit, par exemple, la troisième bande en équerre. La somme des nombres de cette bande est un cube, $3^3$ [voir l'ensemble ($\alpha$)].

Faisons tourner cette bande, d'un angle de 45°, autour du point $9 = 3^2$, de façon qu'elle vienne occuper la position marquée à droite du tableau.

La somme des nouveaux nombres de la bande est égale au même cube, $3^3$.

La proposition est générale et la somme des nombres de la bande en équerre de rang $n$ est égale à la somme des nombres de la bande en équerre définie par la portion $1 - n^2$ de la diagonale principale et par la portion $n^2 - (2n - 1)$ de la $(2n - 1)^{ième}$ diagonale secondaire.

II. La somme des termes de la $n^{ième}$ diagonale secondaire $n - n$ est égale à la somme des $n$ premiers triangulaires, c'est-à-dire égale à $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Ainsi, pour la troisième diagonale secondaire :

$$3+4+3=10=1+3+6=\frac{3.4.5}{6}.$$

Cette deuxième propriété est commune à l'ensemble ci-dessus ($\alpha$) et à l'ensemble des progressions donné dans ***Mathesis***, t. XXI, p. 69, théor. I.

***

L'ensemble des progressions

($\beta$)

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | . | 1 | | | | 5 | | | | 3 |
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | . | | 5 | | 11 | | | | | 8 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | . | | | 13 | | | | 3 | 8 | 13 |
| 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | . | | | | | | | | | |
| 5 | 14 | 23 | 32 | 41 | . | | | | | | | | | |
| . | . | . | . | . | | | | | | | | | | |

jouit des mêmes propriétés que l'ensemble des progressions donné dans ***Mathesis***, t. XXI, p. 69, théor. II.

I. Il jouit aussi de la propriété résultant de la rotation de la bande en équerre.

Soit, par exemple, la troisième bande en équerre. La somme des nombres de cette bande est égale à la somme de deux cubes $2^3+3^3$.

Faisons pivoter cette bande autour du point $13=2^2+3^2$, d'un angle de 45° de manière à lui faire prendre la place marquée à droite du tableau.

La somme des nombres de cette nouvelle équerre est encore égale à la somme des mêmes cubes $2^3+3^3$.

La proposition est générale et la somme des nombres de la bande en équerre de rang $n$ est égale à la somme des nombres de la bande en équerre définie par la portion $1 \text{ — } [(n-1)^2+n^2]$ de la diagonale principale et par la portion $[(n-1)^2+n^2] \text{ — } (2n-1)$ de la $(2n-1)^{ième}$ diagonale secondaire.

II. Considérons la somme des nombres contenus dans une bande en équerre définie par la portion $1 \text{ — } n$ de la première colonne et la portion $n \text{ — } [(n-1)^2+n^2]$ de la $n^{ième}$ ligne ; cette somme est un cube.

Soit, par exemple, la troisième bande en équerre $1 \text{ — } 3$, $3 \text{ — } 13$. On a

$$1+2+3+8+13=3^3.$$

Corollaire. La différence entre la somme des $n$ premiers termes de la $(n+1)^{ième}$ colonne et la somme des $n$ premiers termes de la première, est un cube. Soit $n = 3$ :

$$(4 + 11 + 18) - (1 + 2 + 3) = 3^3.$$

III. La somme des termes de la $n^{ième}$ diagonale secondaire $n - n$ est égale à la somme des $(n-2)$ premiers triangulaires augmentée de la somme des $n$ premiers triangulaires, c'est-à-dire égale à

$$\frac{(n-2)(n-1)n}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Ainsi, pour la troisième diagonale secondaire $3 - 3$, on a [voir l'ensemble ($\beta$)]

$$3 + 5 + 3 = 11 = 1 + 1 + 3 + 6 = \frac{1.2.3}{6} + \frac{3.4.5}{6}.$$

IV. Les nombres contenus dans un carré ayant pour diagonale une portion de la diagonale principale, forment une somme de deux carrés [voir l'ensemble ($\beta$)].

Par exemple, la somme des nombres contenus dans le carré qui a pour diagonale 13, 25, 41 est égale à $9^2 + 12^2$.

En général, la somme des nombres contenus dans le carré qui a pour diagonale $[(a-1)^2 + a^2]$, ...., $[(a+n-2)^2 + (a+n-1)^2]$, est

$$S = \left[\frac{n(n-1)}{2} + (a-1)n\right]^2 + \left[\frac{n(n-1)}{2} + an\right]^2.$$

Ces deux dernières propriétés, celles des n^os^ III et IV, sont communes à l'ensemble ci-dessus ($\beta$) et à l'ensemble donné dans *Mathesis*, t. XXI, p. 69, théor. II.

---

## ×SUR LES QUADRILATÈRES.

1. Soient $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ les côtés d'un quadrilatère plan convexe, Q sa surface, et A, B, C, D les angles. On a

$$Q = ABC + CDA = \tfrac{1}{2} ab \sin B + \tfrac{1}{2} cd \sin D,$$

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D.$$

Écrivons ces égalités ainsi :

$$4Q = 2ab \sin B + 2cd \sin D,$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos B - 2cd \cos D,$$

puis ajoutons-les membre à membre après les avoir élevées au carré; il vient

$$16Q^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(B + D)$$
$$= 4(ab + cd)^2 - 16abcd\cos^2\tfrac{1}{2}(B + D)$$

Si l'on pose $a + b + c + d = 2p$, on trouve facilement

$$Q^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd\cos^2\tfrac{1}{2}(B + D).$$

Cette formule montre immédiatement que le plus grand quadrilatère formé avec quatre côtés donnés est inscriptible à un cercle et a pour aire :

$$Q' = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)};$$

on peut écrire, dans le cas général,

$$Q^2 = Q'^2 - abcd\cos^2\tfrac{1}{2}(B + D).$$

Ce qui précède est assez connu; nous l'avons rappelé ici comme introduction à des développements moins connus.

On peut remarquer la formule

$$16Q^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab - cd)^2 + 16abcd\sin^2\tfrac{1}{2}(B + D),$$

de laquelle on déduit

$$16Q^2 = (a + b + c + d)(a + b - c - d)(a + c - b - d)(b + c - a - d)$$
$$+ 16abcd\sin^2\tfrac{1}{2}(B + D).$$

Supposons maintenant le sommet D situé à l'intérieur du triangle ABC. Si l'on désigne par D l'angle *intérieur* plus grand que 180°, tous les calculs précédents sont encore applicables : Q est la différence des triangles ABC, ADC, mais sin D est négatif.

Si le quadrilatère est *étoilé* et que les côtés AB et CD (et non leurs prolongements) se coupent en un point I, appelons Q la différence des aires des deux triangles ABC, ADC ou des triangles IAD, IBC; nous aurons

$$\pm 4Q = 2ab\sin B - 2cd\sin D,$$
$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos B - 2cd\cos D,$$

d'où l'on déduit

$$16Q^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab + cd)^2 - 16abcd\cos^2\tfrac{1}{2}(B - D).$$

3. Soit maintenant ABCD un quadrilatère sphérique tracé sur la sphère de centre O et de rayon 1. Désignons par V la somme des volumes des deux tétraèdres OABC et OCDA. Nous aurons

$$V = \tfrac{1}{6}\sin a\sin b\sin B + \tfrac{1}{6}\sin c\sin d\sin D,$$
$$\cos AC = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos B,$$
$$= \cos c\cos d + \sin c\sin d\cos D;$$

d'où

$$6V = \sin a \sin b \sin B + \sin c \sin d \sin D,$$
$$\cos a \cos b - \cos c \cos d = \sin c \sin d \cos D - \sin a \sin b \cos B.$$

Élevons ces égalités au carré et ajoutons-les ensuite membre à membre; il vient

$$36V^2 + (\cos a \cos b - \cos c \cos d)^2 = \sin^2 a \sin^2 b + \sin^2 c \sin^2 d - 2\sin a \sin b \sin c \sin d \cos(C + D).$$

Remplaçons le second membre du résultat par

$$(\sin a \sin b + \sin c \sin d)^2 - 4\sin a \sin b \sin c \sin d \cos^2 \tfrac{1}{2}(C + D);$$

on déduit de là, après quelques transformations,

$$9V^2 = \sin(p - a) \sin(p - b) \sin(p - c) \sin(p - d) - \sin a \sin b \sin c \sin d \cos^2 \tfrac{1}{2}(C + D).$$

Cette formule est due à Strehlke (*Archives de Grunert*, 1842, p. 324). Le maximum de V a lieu lorsque $C + D = 180°$. (J. N.).

---

## ×NOTES MATHÉMATIQUES.

**17.** *Sur les permutations absolues.* Si l'on considère toutes les permutations de $n$ lettres $a_1, a_2, \ldots a_n$, on peut se demander combien il y en a où aucune lettre n'est à sa place naturelle. Ces permutations ont été appelées *permutations absolues, discordantes* ou *sans rencontre*. En désignant leur nombre par $Q_n$, j'ai établi la formule symbolique (Voir *Mathesis* (1) t. I, p. 27)

$$P_n = (Q + 1)^n,$$

d'où j'ai conclu la formule inverse

$$Q_n = (P - 1)^n.$$

Celle-ci a été établie *directement* par M. Coupy (NAM, 1844, (1), III, 404), au moyen d'un raisonnement analogue à celui que j'ai employé dans des questions relatives aux arrangements discordants. Il suffit d'exclure du nombre total des permutations celles où une lettre au moins est à sa place. (J. N.)

**18.** *Sur les fractions continues périodiques.* Etant donnée une fraction continue périodique,

$$(a, b, \ldots k, l, a, b \ldots),$$

avant de poser l'égalité

$$x = (a, b, \ldots, k, l, x),$$

il est indispensable de savoir que les réduites convergent vers une limite déterminée à mesure qu'on augmente le nombre des quotients incomplets.

Nous empruntons à un article publié par Catalan (NAM, 1845, (1), IV, 407) des exemples propres à montrer l'insuffisance du raisonnement dont on se contente trop souvent pour chercher la génératrice.

Soit la fraction

$$1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \ldots$$

dont les réduites successives sont

$$1, \quad 0, -\infty, \quad 1, \quad 0, -\infty.$$

On voit qu'il n'y a pas lieu de chercher une valeur pour la fraction, et c'est à tort que l'on écrirait

$$x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Soit encore la fraction continue

$$-1 + \cfrac{6}{-1 + \cfrac{6}{-1 + \cdots}}$$

Les réduites successives sont

$$-1, \quad -7, \quad -\frac{13}{7}, \quad -\frac{55}{13}, \quad -\frac{138}{55} \quad \cdots;$$

il n'est nullement évident que ces nombres tendent vers une limite $x$ et que l'on puisse écrire

$$x = -1 + \frac{6}{x}.$$

Considérons plus généralement la fraction

$$\cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - \cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - \cdots}}}}$$

En écrivant

$$x = \frac{a}{1 - \dfrac{b}{1-x}},$$

on trouve

$$x^2 + (b - a - 1)\,x + a = 0,$$

équation qui peut avoir des racines imaginaires.

1°. *Sur un certain minimum.* Une droite donnée AB étant divisée en $m$ parties égales par des points rouges, et $n$ parties égales par des points noirs, trouver la plus petite distance entre un point noir et un point rouge; $m$ et $n$ sont supposés premiers entre eux (NAM, 1845, (1), IV, 455; 1848, (1), VII, 13).

La différence entre $x$ divisions de la 1re espèce et $y$ divisions de la 2e espèce est

$$\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{nx - my}{mn},$$

la longueur de la droite donnée étant prise pour unité, et les divisions étant comptées à partir de celle des extrémités A, B pour laquelle $\frac{x}{m} > \frac{y}{n}$. Or, il existe une valeur de $x < m$ et une valeur de $y < n$ telle que l'on ait $nx - my = 1$; car cette égalité donne

$$y = \frac{nx - 1}{m},$$

et en attribuant à $x$ successivement les valeurs 0, 1, 2, ... $(m-1)$, et en divisant $nx - 1$ par $m$, on trouve pour restes les mêmes nombres 0, 1, 2, ..., $(m-1)$ à l'ordre près (Lemme de Gauss). Le minimum cherché est donc $\frac{1}{mn}$.

2°. *Sur la question d'examen* 1010 (p. 176). Il s'agit d'inscrire à un carré donné ABCD un pentagone régulier dont un côté repose sur un côté AB du carré.

Cette question ne comporte pas de solution; car la diagonale EG d'un pentagone régulier ABEFG est plus grande que la distance du sommet F au côté AB. (Un abonné).

Cette question a été reprise, sans examen de notre part, à un ancien journal de mathématiques.

Si le pentagone inscrit au carré est simplement équilatéral, le rapport de son côté au côté du carré dépend d'une équation complète du 4e degré.

**21.** *Sur des rectangles isopérimètres.* M. Ph. Breton de Champ (NAM, 1843, (1), II, 228) a énoncé un théorème dont nous modifions légèrement les termes :

*Si l'on construit sur un angle droit fixe* XOY *une suite de rectangles* OABC, *de périmètre donné* $4p$, *la perpendiculaire* CZ *abaissée du sommet* C *sur la diagonale* AB *passe par un point fixe* D.

M. Merlieux a établi cette propriété, et a trouvé l'enveloppe de la droite AC et le lieu de la projection de B sur AC, analytiquement (Ibid., p. 314). Il n'est pas difficile de traiter ces questions par la géométrie.

En effet, si l'on prend sur OX, OY les longueurs $OA' = OC' = 2p$, OA′ et OC′ représentent le rectangle variable OABC quand l'un des côtés se réduit à zéro, et les positions correspondantes de BZ sont les perpendiculaires élevées en A′ sur OX et en C′ sur OY. Appelons D le point de concours de ces perpendiculaires, E et F les points où CB, AB coupent respectivement A′D, C′D. Les rectangles BEDF, OCBA ont leurs côtés respectivement égaux et perpendiculaires ; on en conclut que les diagonales homologues BD, AC sont perpendiculaires ou que BZ passe par D.

La relation $OA + OC = 2p$ montre que la droite AC enveloppe une parabole qui touche les droites OX, OY aux points A′, C′ ; l'axe de cette courbe est la bissectrice de l'angle XOY, et la directrice passe par O ; le foyer F est au milieu de la distance OD, c'est ce qu'on voit en construisant sur l'angle XOY le carré de périmètre $4p$, ou en remarquant que la polaire A′ C′ du point O passe par le foyer.

La projection du point fixe D (ou de B) sur la droite AC décrit une podaire de parabole (courbe cissoïdale). (J. Neuberg.)

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Éléments de mathématiques supérieures à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs et des aspirants à ces titres, des conducteurs de travaux, et des élèves des facultés des sciences et des écoles industrielles par H. Vogt, professeur à l'université de Nancy. Paris, Nony et Cie, 1901. Un vol. gr. in-8°, de VII-619 pages, avec 135 fig. dans le texte. Prix : 10 fr.**

Voici comment l'auteur fait connaître le but de cet ouvrage :

« La plupart des étudiants en mathématiques, en physique ou en chimie arrivent

à l'Université sans autres connaissances que celles qui sont exigées pour le baccalauréat ès sciences, et il est nécessaire de leur enseigner les éléments de l'Algèbre, du calcul différentiel et intégral et de la Géométrie analytique pour leur permettre de suivre les cours de Sciences pures ou appliquées qui font l'objet du véritable enseignement supérieur.

« Ces *Éléments de mathématiques supérieures* sont destinés à mettre les étudiants à même de profiter le plus rapidement possible de l'enseignement supérieur théorique ou appliqué; ils s'adressent aux jeunes gens qui ont fait de bonnes études de mathématiques élémentaires et qui, désirant suivre des cours d'analyse, de mécanique, de physique, d'électrotechnique, de chimie physique, d'électrochimie, etc., ne peuvent consacrer toute une année à acquérir dans une classe de Mathématiques spéciales le peu d'Algèbre ou de Géométrie analytique qui leur est nécessaire, ni suivre un cours complet de calcul différentiel et intégral.

« Ils s'adressent également aux maîtres répétiteurs des lycées et des collèges qui n'ont pas la ressource de suivre un cours de spéciales et désirent cependant se préparer à des certificats d'Université; ils pourront aussi intéresser, je l'espère, les personnes se destinant à l'industrie ou aux travaux publics, n'ayant à acquérir et à appliquer qu'un ensemble restreint de connaissances mathématiques supérieures qu'elles trouveraient difficilement mises à leur portée dans des ouvrages trop complets. »

Quoique les lignes précédentes indiquent suffisamment l'esprit dans lequel est rédigé cet ouvrage, nous transcrivons encore les titres des différents chapitres.

*Compléments d'Algèbre.* I et II. Equations linéaires à deux ou à trois inconnues Déterminants. III. Formule du binome. IV. Radicaux et exposants. V. Des limites. VI. Des séries. VII. La série $e$ et la fonction $e^x$. VII. Fonction exponentielle et logarithmes.

*Principes de Géométrie analytique.* I. Unités et homogénéité. II. Segments et projections. III. Coordonnées dans le plan. IV. De la ligne droite. V. Équations usuelles des lignes du second ordre. VI. Coordonnées dans l'espace.

*Dérivées et différentielles.* I. Dérivées des fonctions d'une variable. II. Variation des fonctions d'une variable. III. Formules de Taylor et de Maclaurin. IV. Formes indéterminées. V. Fonctions représentées par des séries. VI. Interpolation. VII. Infiniment petits et différentielles. VIII. Fonctions de plusieurs variables. IX. Développement de $f(x+h, y+k)$. Calcul des erreurs. X. Maxima et minima.

*Théorie des équations* I. Des imaginaires II. Propriétés des racines des équations algébriques. III. Équation du troisième degré. IV. Résolution numérique des équations.

*Applications géométriques.* I. Tangentes et normales aux courbes planes. II et III. Construction de courbes planes. IV. Lieux géométriques. Enveloppes de lignes planes. V. Courbure des lignes planes. VI. Tangentes et normales aux figures de l'espace. VII. Génération des surfaces. Enveloppes. VIII. Courbure des courbes de l'espace.

*Calcul intégral.* I. Intégrales définies et indéfinies de fonctions d'une variable.

II. Procédés d'intégration. III. Intégration des fonctions algébriques et des fonctions transcendantes. IV. Calcul des intégrales définies. V. Application des intégrales définies. VI. Intégrales doubles. VII. Intégrales triples. VIII. Différentielles totales. Intégrales curvilignes. IX. Intégrales de surface. Transformation des intégrales multiples.

*Équations différentielles.* I. Équations du 1er ordre. II. Équations d'ordre supérieur. III. Équations simultanées. IV. Équations aux dérivées partielles.

*Notes d'Algèbre.* I. Séries. II. Dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables. III. Élimination. Théorème de Bezout.

*Notes de Géométrie analytique.* I. Transformation des coordonnées dans le plan. II. Diamètres et axes des coniques. III. Foyers et directrices. IV. Transformation des coordonnées dans l'espace. V. Surfaces du second ordre. VI. Plans diamétraux et diamètres. VII. Courbure sur une surface.

*Exercices.* Ils sont au nombre de 212.

Nous recommandons volontiers le livre de M. Vogt aux élèves des écoles spéciales belges : pour ceux qui ne suivent pas les cours du grade légal, c'est un excellent manuel qui reproduit toute la substance de l'instruction mathématique qu'ils doivent acquérir; les élèves du grade légal peuvent également en tirer grand profit, parce qu'il leur donne le moyen de s'orienter facilement dans un enseignement plus étendu.

L'exécution typographique de l'ouvrage fait honneur aux presses de la maison Nony et Cie. (J. N)

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 1074.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, 142).

*Soit* F *le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère* ABCD. *Sur la bissectrice intérieure de l'angle* AFC, *on porte*

$$FJ = FJ' = \sqrt{FA.FC}.$$

*Pour que le quadrilatère soit circonscrit à un cercle, il faut et il suffit que l'un des points* J *et* J' *soit sur la droite joignant les milieux des diagonales.* (Sollertinsky).

*Solution par M.* Gob. Rappelons d'abord quelques propriétés des points F, J, J'.

Soient M et N les points de rencontre des couples de côtés opposés AD et BC, AB et CD. Le point F est à l'intersection des cercles MAB, MCD, NAD, NBC. Des égalités d'angles qui résultent de là, on conclut la similitude des triangles FAD et FBC, FND et FBM. Les angles AFC, DFB, MFN ont donc la même bissectrice JJ' et l'on a :

$$\overline{FJ}^2 = \overline{FJ'}^2 = FA.FC = FB.FD = FM.FN. \quad (1)$$

*Le quadrilatère* AJCJ' *est harmonique.* En effet, si K désigne le point de rencontre de FJ avec AC, on a dans le triangle AFC,

$$\overline{FK}^2 = FA.FC - KA.KC$$

ou

$$\overline{FJ}^2 - \overline{FK}^2 = KA.KC$$

$$(FJ - FK)(FJ + FK) = KA.KC, \text{ ou } KJ\ KJ' = KA.KC.$$

Donc le quadrilatère AJCJ' est inscriptible. De plus, il résulte de l'égalité (1) que les triangles FCJ', FJ'A sont semblables. On déduit de là : *angle* FAJ' = FJ'C = CAJ; donc AC est une symédiane du triangle AJJ' et, par conséquent, le quadrilatère AJCJ' est harmonique. Il en est de même des quadrilatères BJDJ', MJNJ'.

*Les inverses des points* A, B, C, D *par rapport à l'un des points* J *et* J' *sont les sommets d'un parallélogramme.*

En effet, soient *a*, *b*, *c*, *d*, *j'* les inverses des points A, B, C, D, J' par rapport au point J. Les quadrilatères JAJ'C, JBJ'D étant harmoniques, *j'* est le milieu de *ac* et de *bd*, donc *abcd* est un parallélogramme.

La réciproque se démontre aisément. Cette propriété caractérise donc les seuls points J et J'.

Ces préliminaires établis, passons à la démonstration du théorème proposé.

1° Supposons que le quadrilatère ABCD soit circonscriptible à un cercle de centre O, et soient P, Q, R, S les points de contact des côtés AB, BC, CD, DA avec ce cercle; désignons par A', B', C', D' les points de rencontre des droites OA, OB, OC, OD respectivement avec SP, PQ, QR, RS. On aura

$$OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = OD.OD' = OP^2.$$

Donc les points A', B', C', D' sont les inverses des points A, B, C, D par rapport au cercle O. D'ailleurs A'B'C'D' est un parallélogramme, car les points A', B', C', D' sont les milieux des côtés du quadrilatère PQRS. Donc le point O coïncide avec l'un des points J, J'. Cela démontre la première partie du théorème, car on sait que le centre O du cercle inscrit se trouve sur la droite qui joint les milieux des diagonales.

2° Supposons que le point J se trouve sur la droite qui joint les milieux E, F des diagonales AC, BD, et pour fixer les idées, supposons-le entre E et F. Les deux triangles AJC, BJD ont des médianes JE, JF situées dans le prolongement l'une de l'autre et des symédianes situées sur la même droite JJ'. Donc les angles AJC, BJD ont les mêmes bissec-

trices; on en déduit que les angles AJB, DJC sont supplémentaires, il en est de même des angles AJD, BJC.

Soient maintenant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ les inverses des points A, B, C, D par rapport au point J, le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ est un parallélogramme. Les cercles $\alpha J\beta$, $\delta J\gamma$ sont égaux, de même que les cercles $\alpha J\delta$, $\beta J\gamma$; en effet, les droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ sont égales et l'angle AJB ou $\alpha J\beta$ est le supplément de DJC ou $\delta J\gamma$. Menons $J\varepsilon$ égal et parallèle $\gamma\beta$. Le triangle $\alpha\varepsilon\beta$ sera égal au triangle $\delta J\gamma$. Donc l'angle $\alpha\varepsilon\beta$ est le supplément de $\alpha J\beta$, et le quadrilatère $\alpha\varepsilon\beta J$ est inscriptible. On a donc *angle* $\alpha\delta J = \alpha\varepsilon J = \alpha\beta J$. Les cercles $\alpha\delta J$, $\alpha\beta J$ sont donc égaux entre eux. On voit donc que les quatre cercles $J\alpha\beta$, $J\beta\gamma$, $J\gamma\delta$, $J\delta\alpha$ sont égaux. Par conséquent, les droites AB, BC, CD, DA, qui sont les lignes inverses de ces cercles, sont à égale distance du point J.

Remarque. Pour que le quadrilatère ABCD soit inscriptible il faut et il suffit que JJ' passe par le point de rencontre des diagonales.

En effet, si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\lambda$ désignent encore les inverses des points A, B, C, D, J' par rapport à J, $\lambda$ sera le point de rencontre des diagonales du parallélogramme $\alpha\beta\gamma\delta$. L'inverse $\omega$ du point de rencontre des diagonales est le second point de rencontre des cercles $\alpha J\gamma$, $\delta J\beta$. Or le point $\lambda$ appartient ou n'appartient pas à l'axe radical $J\omega$ des cercles $\alpha J\gamma$, $\delta J\beta$ suivant que les diagonales $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ sont ou ne sont pas égales, c'est-à dire suivant que le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ est ou n'est pas inscriptible.

Rappelons encore que quand ABCD est inscriptible, F se trouve sur la troisième diagonale MN.

M. Ansonne a résolu la même question en se servant de la méthode des équipollences.

---

## Question 1280.

(Voir Mathesis, 2; X, 178).

Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 + a & x_1x_2 & \dots & x_1x_{p-1} & x_1x_p & y_1 \\ x_2x_1 & x_2^2 + a & \dots & x_2x_{p-1} & x_2x_p & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p-1}x_1 & x_{p-1}x_2 & \dots & x_{p-1}^2 + a & x_{p-1}x_p & y_{p-1} \\ x_px_1 & x_px_2 & \dots & x_px_{p-1} & x_p^2 + a & y_p \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{p-1} & y_p & -1 \end{vmatrix}$$

(A. Demoulin).

*Solution par* M. A. Listray (Bouillon). Soit $\Delta_{p-1}^{(i)}$ un déterminant d'ordre $p$ analogue à $\Delta_p$ et dans lequel les lettres $x$ et $y$ sont affectées des indices $1, 2, 3, \ldots i-1, i+1 \ldots p$.

On vérifie facilement par le calcul que $\Delta_1$, $\Delta_2$ et $\Delta_3$ se développent suivant la formule

$$\Delta_k = -a^{k-2}\left[\sum_1^k (x_r y_s - x_s y_r)^2 + a\sum_1^k (x_r^2 + y_r^2) + a^2\right]. \qquad (1)$$

Supposons la formule (1) démontrée pour $k = p-1$ et faisons voir qu'elle est vraie pour $k = p$.

En dérivant $\Delta_p$ par rapport à la lettre $a$, on trouve l'égalité :

$$\frac{d\Delta_p}{da} = \Delta_{p-1}^{(1)} + \Delta_{p-1}^{(2)} + \cdots + \Delta_{p-1}^{(p)}. \qquad (2)$$

Or les déterminants $\Delta_{p-1}^{(i)}$ sont analogues à $\Delta_{p-1}$; on peut donc leur appliquer la formule (1), ce qui donne :

$$\frac{d\Delta_p}{da} = -(p-2)\,a^{p-3}\sum_1^p (x_r y_s - x_s y_r)^2 - (p-1)\sum_1^p (x_r^2 + y_r^2) - pa^{p-1};$$

d'où en intégrant :

$$\Delta_p = -a^{p-2}\left[\sum_1^p (x_r y_s - x_s y_r)^2 + a\sum_1^p (x_r^2 + y_r^2) + a^2\right]; \qquad (3)$$

la constante d'intégration est nulle parce qu'elle se réduit au déterminant $\Delta_p$ dans lequel on fait $a = 0$.

Or, ce déterminant a tous les mineurs correspondant aux éléments de la dernière colonne nuls, ce que l'on voit aisément en dirigeant les calculs comme dans la solution suivante.

*Seconde solution.* En ajoutant une ligne de zéros et une colonne commençant par l'unité, on obtient le déterminant équivalent

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x_1 & & & & & \\ x_2 & & & & & \\ \vdots & & & \Delta_p & & \\ x_p & & & & & \\ 0 & & & & & \end{vmatrix}.$$

Retranchons de la 2e, 3e, ... $p^e$ colonne de D la première multipliée successivement par $x_1, x_2, \ldots x_p$; changeons ensuite les signes de la

première ligne, et faisons avancer la dernière ligne et la dernière colonne au deuxième rang. Nous aurons

$$D = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ 0 & -1 & y_1 & y_2 & \dots & y_p \\ x_1 & y_1 & & & & \\ x_2 & y_2 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \Delta' & & \\ x_p & y_p & & & & \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

où $\Delta'$ représente le déterminant du $p^e$ ordre

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

La forme (2) montre que D est une fonction symétrique des lettres $x$ et $y$. $\Delta'$ se réduit à $a^p$; ses premiers mineurs principaux se réduisent à $a^{p-1}$; ses seconds mineurs principaux à $a^{p-2}$. Les autres premiers ou seconds mineurs de $\Delta'$ sont nuls.

Cela posé, développons D par le théorème de Laplace, suivant les déterminants partiels formés avec les éléments des deux premières lignes. Nous trouvons d'abord le terme

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \times \Delta' = -a^p.$$

Les déterminants partiels

$$\begin{vmatrix} -1 & x_i \\ 0 & y_i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & x_i \\ -1 & y_i \end{vmatrix},$$

pour donner un terme non nul, doivent être combinés respectivement avec l'élément $y_i$ de la 2e colonne ou avec l'élément $x_i$ de la 1re, ce qui donne $y_i^1 a^{p-1}$, $x_i^1 a^{p-1}$. Enfin, on combinera les déterminants partiels

$$\begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix},$$

pour obtenir le terme

$$-a^{p-2}(x_i y_k - x_k y_i)^2.$$

On a ainsi finalement

$$D = -a^{p-2}[\Sigma(x_i y_k - x_k y_i)^2 + a\,\Sigma(x_i^2 + y_i^2) + a^2].$$

M. Demoulin obtient la valeur du déterminant $\Delta$, en le développant, au moyen du théorème de Maclaurin, suivant les puissances de $a$.

*Autrement.* Voici une autre solution de la question 1280.

L'égalité $\Delta_p = 0$ exprime que le système en $z$

$$(x_1^2 + a)z_1 + x_2x_1z_2 + \cdots + x_px_1z_p + y_1z = 0,$$
$$x_1x_2z_1 + (x_2^2 + a)z_2 + \cdots + x_px_2z_p + y_2z = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots + y_pz_p - z = 0,$$

est compatible. En introduisant l'inconnue auxiliaire

$$x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_pz_p = u, \qquad (2)$$

ce système prend la forme

$$x_1u + az_1 + y_1z = 0, \quad x_2u + az_2 + y_2z = 0, \ldots \qquad (3)$$
$$y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots + y_pz_p - z = 0. \qquad (4)$$

Tirons les valeurs de $z_1, z_2, \ldots z_p$ des équations (3) pour les substituer dans les équations (2) et (4); il vient

$$u(a + \Sigma x_i^2) + z\Sigma x_i y_i = 0, \qquad (5)$$
$$u\Sigma x_i y_i + z(a + \Sigma y_i^2) = 0. \qquad (6)$$

Pour que les équations (5) et (6) soient compatibles, on doit avoir

$$\Sigma^2 x_i y_i - (a + \Sigma x_i^2)(a + \Sigma y_i^2) = 0. \qquad (7)$$

$\Delta_p$ et le premier membre de (7) ne peuvent différer que par un facteur indépendant de $x$ et de $y$. En effet, on voit d'abord que ces quantités sont du même degré en $y$, et les équations (2), (3), (4) montrent que les lettres $x$ et $y$, $z$ et $u$ entrent symétriquement dans la question. Or le terme diagonal de $\Delta_p$ renferme $-a^p$; donc $\Delta_p$ est égal au premier membre de (7) multiplié par $-a^{p-2}$.

Il est facile de ramener cette seconde valeur de $\Delta_p$ à la première.

(J. N.).

Autre solution par M. Emmerich.

### ×Question 1286.

(Voir *Mathesis* (2), X, p. 216.)

*Résoudre les équations :*

$$x_1x_2 + ax_1 + bx_2 + c = 0. \quad x_2x_3 + ax_2 + bx_3 + c = 0, \ldots,$$
$$x_{n-1}x_n + ax_{n-1} + bx_n + c = 0, \quad x_nx_1 + ax_n + bx_1 + c = 0.$$

(Emmerich).

*Solution par* M. Plakhovo. En posant

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = x,$$

les équations proposées se réduisent à la seule équation

$$x^2 + x(a+b) + c = 0,$$

donc elles sont vérifiées si l'on donne à toutes les inconnues la même valeur

$$x = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4c}}{2}.$$

Voici la solution de l'auteur de la question :

En écrivant $(b+x_1)(a+x_2) = ab - c = d$ on a

$$b + x_1 = \frac{d}{a+x_2}, \quad b + x_2 = \frac{d}{a+x_3}, \quad \ldots, \quad b + x_{n-1} = \frac{d}{a+x_n}, \quad b + x_n = \frac{d}{a+x_1};$$

d'où en posant $a - b = e$,

$$x_1 = -b + \frac{d}{e} + \frac{d}{e} + \ldots + \frac{d}{e} + \frac{d}{a+x_1}.$$

En développant la $n^{ième}$ réduite, on trouve $x_1^2 + (a+b)x_1 + c = 0$ et l'on voit aisément que toutes les inconnues sont égales à $x_1$.

---

### Question 1312.

(Voir *Mathesis* (2), t. I, p. 96).

*On considère toutes les coniques passant par quatre points donnés, A, B, C, D. Trouver le lieu des points de rencontre de chacune de ces courbes avec ses normales menées au point A.* (A. Gob).

*Solution par* M. E. N. Barisien. Prenons pour origine des coordonnées le point A et pour axes les bissectrices de l'angle BAD. Nous pouvons mettre les équations des droites AB, BC, CD, DA sous la forme

$$Y = mX, \quad Y = nX + p, \quad Y = qX + r, \quad Y = -mX.$$

de sorte que l'équation d'une conique quelconque circonscrite au quadrilatère ABCD s'écrit

$$(1)\quad \lambda(Y - mX)(Y - n'X - p') + (Y + mX)(Y - nX - p) = 0.$$

L'équation générale de la normale en un point $(x, y)$ de cette conique est

$$\frac{X - x}{-\lambda m(y - n'x - p') - \lambda n'(y - mx) + m(y - nx - p) - n(y + mx)} = \frac{Y - y}{\lambda(y - n'x - p') + \lambda(y - mx) + (y - nx - p) + (y + mx)}.$$

En y faisant $x = 0$, $y = 0$, on a pour l'équation de la normale en A

$$(2)\qquad \lambda p'(X + mY) + p(X - mY) = 0.$$

En éliminant $\lambda$ entre (1) et (2), on a immédiatement l'équation du lieu cherché

$$(3)\qquad p(X - mY)(Y - mX)(Y - n'X - p') - p'(X + mY)(Y + mX)(Y - nX - p) = 0.$$

Le lieu demandé est donc une cubique circonscrite au quadrilatère ABCD : mais le point A est un point double isolé. La cubique passe en outre par les points de rencontre de CD, BC, DB avec les perpendiculaires élevées en A à AB, AD, AC; ces points correspondent aux coniques dégénérées du faisceau.

Le lieu des points d'incidence des normales abaissées de A sur les coniques du faisceau (ABCD) est une quartique.

---

## Question 1317.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 112).

*On donne un point fixe* A, *un cercle fixe* C *de rayon* $a$, *un cercle mobile* C′ *de rayon* $b$, *roulant sur le premier. Soit* DE *le diamètre de* C′ *passant par le centre* C. *On joint* AD, AE, *qui rencontrent le cercle* C′ *en* M, M′. *Trouver les lieux des points* M, M′.

*Cas où le point* A *est rejeté à l'infini.* (H. Brocard.)

*Solution par* MM. Emmerich et Barisien. Prenons le point A pour origine des coordonnées polaires, AM $= r$, CAM $= \varphi$. En posant AC $= e$, angle MDE $= \varepsilon$, on a

$$r + (a + 2b)\cos\varepsilon = e\cos\varphi, \quad a\sin\varepsilon = e\sin\varphi;$$

d'où en éliminant $\varepsilon$ :

$$\left(\frac{r-\varepsilon\cos\varphi}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon\sin\varphi}{a}\right)^2=1.$$

D'une manière analogue on obtient l'équation du point M' :

$$\left(\frac{r-\varepsilon\cos\varphi}{a}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon\sin\varphi}{a+2b}\right)^2=1.$$

En passant aux coordonnées CM (CM') $=\rho$, ACM (ACM') $=\mu$ à l'aide des formules $r\cos\varphi+\rho\cos\mu=\varepsilon$, $r\sin\varphi=\rho\sin\mu$, on trouve

$$\left(\frac{\rho-\varepsilon\cos\mu}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon\sin u}{a}\right)^2=\frac{\rho^2-2\varepsilon\rho\cos\mu+\varepsilon^2}{\rho^2},$$

$$\left(\frac{\rho-\varepsilon\cos\mu}{a}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon\sin\mu}{a+2b}\right)=\frac{\rho^2-2\varepsilon\rho\cos\mu+\varepsilon^2}{\rho^2}.$$

Divisons par $\varepsilon^2$, puis posons $\varepsilon=\infty$ ; il vient

$$\frac{x^2}{(a+2b)^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a+2b)^2}=1.$$

Ces équations représentent des ellipses.

M. Van Cauwenberghe a résolu la même question en prenant pour axes la droite CA et une perpendiculaire en C à CA.

---

## *Question 1810.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 128.)

*Construire un triangle* ABC, *connaissant la somme* $b+c$ *et les longueurs des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle* A.

*Solution par M.* Emmerich. On connaît le triangle rectangle DAD' formé par les bissectrices données. Si l'on prolonge CA de AE $=$ AB, les triangles AD'E, AD'B sont égaux. Il s'agit donc de mener par le point A la bissectrice de l'angle DD'E une droite CE d'une longueur donnée, et limitée par les côtés de l'angle. A cet effet faisons intervenir les centres J, J' des cercles inscrit et exinscrit au triangle ECD', le dernier touchant extérieurement CE. Les points D', J, A, J' formant un groupe harmonique, il en est de même de leurs projections D', K, H, K' sur D'D.

Soit L le milieu de KK' $=$ CE $=b+c$. Comme LH.LD' $=\overline{LK}^2$, les points L, K, J sont déterminés.

Construction. Abaissez AH perpendiculaire sur DD' et décrivez la

circonférence de diamètre D'H. Portez, sur HA, $HQ = \frac{1}{2}(b+c)$ et décrivez la circonférence concentrique à la première par Q. Celle-ci coupant le prolongement de D'H en L, portez, sur LD', $LK = \frac{1}{2}(b+c)$. La perpendiculaire sur D'D en K rencontrant D'A en J, décrivez le cercle (J, JK) et menez à celui-ci les tangentes du point A ; elles représentent les côtés AB et AC. — La possibilité du problème dépend de l'inégalité $AD < \frac{1}{2}(b+c)$.

Solution géométrique analogue par M. François (La Haye). La question est ramené au problème de Pappus généralisé, ou au suivant : Construire un triangle D'EC, connaissant la base CE, l'angle opposé D' et le bissectrice de cet angle.

*Solution algébrique par* M. E. N. Barisien. Soient $\alpha$ et $\alpha'$ les longueurs des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A. On sait que

$$\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}, \quad \alpha' = \frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}.$$

On en déduit

$$\alpha^2(b+c)^2 + \alpha'^2(b-c)^2 = 4b^2c^2.$$

Or si $b+c=k$, cette relation devient

$$\alpha^2k^2 + \alpha'^2[k^2 - 4bc] = 4b^2c^2,$$

ou en ordonnant par rapport à $bc$

$$(2bc)^2 + 2\alpha'^2(2bc) - k^2(\alpha^2+\alpha'^2) = 0.$$

On en déduit

$$2bc = -\alpha'^2 + \sqrt{\alpha'^4 + k^2(\alpha^2+\alpha'^2)}.$$

Le signe — du radical ne convient pas.

Les côtés $b$ et $c$ sont donc racines de l'équation

$$X^2 - kX + \frac{\sqrt{\alpha'^4 + k^2(\alpha^2+\alpha'^2)} - \alpha'^2}{2} = 0.$$

*Solution trigonométrique par* M. Plakhovo. Si $AD = \alpha$, $AD' = \alpha'$ sont les longueurs des bissectrices de l'angle BAC, le triangle rectangle ADD' donne

$$\alpha = \alpha' \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}, \quad \text{d'où} \quad \cos\frac{B-C}{2} = \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2}}.$$

Soit $AE = k$ la hauteur ; elle est connue, car

$$k = \alpha\cos\frac{C-A}{2} = \frac{\alpha\alpha'}{\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2}}.$$

On connaît donc $k$, $b+c$ et $B-C$. Pour trouver $B+C$, on peut observer que

$$k = c\sin B, \qquad k = b\sin C,$$

d'où

$$\frac{b+c}{k}=\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{4\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos(B-C)-\cos(B+C)}$$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B-C}{2}},$$

équation du second degré qui détermine A, etc.

---

***Question 1222.**

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 128.)

***Etant données trois droites*** OX, OY, OZ ***issues d'un même point*** O, ***et trois autres droites*** O'X', O'Y', O'Z' ***issues d'un même point*** O', ***on demande de faire tourner le faisceau*** O' (*x'y's'*), ***de manière que les points d'intersection de*** O'X' ***avec*** OX, ***de*** O'Y' ***avec*** OY ***et de*** O'Z' ***avec*** OZ ***deviennent les sommets d'un triangle*** ABC ***semblable à un triangle donné*** $\alpha\beta\gamma$.

***Solution par*** C. J. François (la Haye). Déterminez le point P d'où l'on voit les côtés $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ respectivement sous les angles XOY et YOZ, et prenez sur OX, OY et OZ des segments OA', OB' et OC' égaux à $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$. Déterminez le point P' d'où l'on voit les côtés A'B' et B'C' respectivement sous les angles X'O'Y' et Y'O'Z'. Tracez par un point quelconque de la droite OP' des droites parallèles à P'A', P'B', P'C' qui coupent OX, OY, OZ aux points cherchés A, B, C.

A moins que le point O' ne soit situé sur la droite OP', le problème ne peut être resolu par une simple rotation du second faisceau autour de son centre. Le lieu des points autour desquels on peut faire tourner le faisceau O'(*x'y's'*) de manière à amener le centre O sur la droite OP et à rendre le faisceau O' parallèle au faisceau P est une droite. (J. N.)

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**1010.** Un angle constant tourne autour de son sommet A placé sur une circonférence O; ses côtés coupent cette courbe en B et C. Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC; A'', B'', C'' les pieds des hauteurs; H, N, O circonscrit, le centre du cercle des 9 points et le barycentre

1° Les droites A'B', A'C' passent chacune par un point fixe et B'C' enveloppe un cercle.

2° Les hauteurs BH, CH passent chacune par un point fixe;

3° La droite B''C'' a une direction fixe, et les droites A''B'', A''C'' enveloppent un même cercle;

4° Le cercle N touche deux cercles fixes;

5° Les droites de Simson du triangle ABC relatives aux milieux des deux arcs BC passent chacune par un point fixe.

(*J. de Vuibert*, 1er mai 1901.)

1° La corde BC, qui a une longueur constante enveloppe un cercle, de centre O. Les points B', C' se meuvent sur la circonférence de diamètre AO; A'B' et A'C' rencontrent cette circonférence en des points fixes $C_1$, $B_1$ tels que $AB_1 = AC_1 = B'C' = \frac{1}{2}BC$.

2° Soient $A_2$, $B_2$, $C_2$ les points de rencontre des hauteurs AH, BH, CH avec la circonférence O.

Les angles ABH, ACH étant constants, les points $B_2$, $C_2$ sont fixes.

L'angle $B_2HC_2$ étant constant, le point H décrit une circonférence; c'est ce qui résulte aussi de ce que $AH = 2OA' = \text{const.}$ Les milieux B'', C'' des distances $B_2H$, $C_2H$ décrivent également des circonférences ayant pour centres les milieux $B_3$, $C_3$ des droites $AB_2$, $AC_2$.

3° B''C'' est perpendiculaire à AO. — L'angle B''A''C'' étant constant, l'angle de A''B'' avec $B''B_3$ parallèle à AA'' est constant; $B_3B''$ étant un rayon de la circonférence décrite par B'', la distance de $B_3$ à A''B'' est constante.

4° Le cercle N a un rayon constant et son centre, milieu de OH, décrit une circonférence.....

5° La droite de Simson du milieu M de l'arc BC passe par A' et est perpendiculaire à la bissectrice AM de l'angle BAC, qui est aussi la bissectrice de l'angle OAH; donc elle forme un triangle isoscèle avec AO et OA'.

**1017.** Résoudre l'équation

$$(1 - \operatorname{tg} x)(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2 \operatorname{tg} x.$$

Remplacer tg $x$ par $\sin x : \cos x$, élever au carré et prendre pour inconnue $\sin 2x$.

**1018.** Dans tout triangle acutangle ABC, la somme des produits des hauteurs deux à deux vaut le double produit du périmètre du triangle ABC par le périmètre du triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs de ABC.

Quelle modification faut-il faire subir à cette proposition dans un triangle obtusangle?

**1019.** Soient S' la surface du triangle polaire du point M par rapport au triangle ABC, D la distance de M au centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Démontrer que

$$\frac{S'}{S} = \frac{R^2 - D^2}{4R^2}.$$

**1020.** Soient $r_1, r_2, r_3$ les rayons des trois cercles qui touchent deux côtés du triangle ABC et le cercle inscrit. Démontrer la relation

$$r = \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1} + \sqrt{r_1 r_2}.$$

**1021.** Dans tout triangle sphérique ABC, on a

$$\frac{\sin(b-c)\cos^2\frac{A}{2}}{\sin a} + \frac{\sin(c-a)\cos^2\frac{B}{2}}{\sin b} + \frac{\sin(a-b)\cos^2\frac{C}{2}}{\sin c} = 0.$$

(GRUNERT.)

## QUESTIONS PROPOSÉES.

***1839.** Etant données deux circonférences concentriques Δ, Δ', on mène d'un point A de la plus grande Δ deux tangentes à Δ', qui rencontrent Δ en B et D; les secondes tangentes menées de B et D à Δ' se coupent en C. Démontrer que la tangente en D à Δ, la droite joignant C au point de contact de AD et la droite AB concourent en un même point. (SEYDEWITZ).

**1840.** Déterminer les surfaces telles que le produit des distances d'un point arbitraire de la surface et du plan tangent en ce point à un pôle fixe soit constant. (V. RETALI).

**1841.** Un cercle O et deux droites fixes $d$ et $d'$ étant donnés dans un plan, mener une droite $x$, parallèle à une droite donnée $s$, rencontrant la circonférence O en A et A', et les deux droites $d$, $d'$ en B et B', de de manière que AA' et BB' soient dans un rapport donné.

(M. STUYVAERT).

**1842.** Soient M un point de la circonférence circonscrite au triangle ABC, A', B', C' les pieds des hauteurs. On porte sur AA', BB', CC' les longueurs MA, MB, MC en $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ dans le sens AA', BB', CC' ou dans le sens opposé suivant que MA, MB, MC coupent BC, CA, AB sur les côtés du triangle ou sur leurs prolongements. Démontrer que les quatre points, M, $A_1$, $B_1$, $C_1$ sont en ligne droite.

Trouver l'enveloppe de cette droite. (E. LEMOINE).

## *TROIS THÉORÈMES PEU CONNUS SUR LES POLYÈDRES.

On n'a découvert qu'un très petit nombre de théorèmes nouveaux vraiment essentiels, en géométrie élémentaire, depuis Euclide et Archimède. On ne peut guère citer que les suivants : 1° La propriété fondamentale des triangles polaires (1593), due à Viète; 2° la règle qui donne l'aire d'un triangle sphérique, trouvée par Albert Girard (1629); 3° le théorème d'Euler (1752) : *le nombre des sommets d'un polyèdre augmenté du nombre de ses faces est égal au nombre de ses arêtes plus deux*(*); 4° enfin celui de Cauchy, le plus beau de tous: *Deux polyèdres convexes sont égaux s'ils ont les faces égales et disposées dans le même ordre* (1812). Les trois premiers ont passé dans tous les manuels; on trouve le quatrième dans la Note XII des *Éléments de Géométrie* de Legendre, mais la démonstration en est trop difficile pour qu'elle puisse être introduite dans l'enseignement élémentaire.

Nous nous proposons de faire connaître, dans cette note, trois théorèmes relatifs aux polyèdres, nouveaux ou peu connus, plus simples que celui de Cauchy (dont le premier est d'ailleurs un corollaire) et qui peuvent intéresser les élèves et les professeurs de la classe supérieure des collèges.

### I.

### Théorème de Catalan (1843).

*Deux pyramides convexes sont égales si elles ont leurs faces triangulaires égales et disposées dans le même ordre.*

Ce théorème, énoncé par Catalan en 1843 (NAM, (1), II, p. 48, question 61), a été démontré par Battaglini, vingt cinq ans plus tard (NAM, 1868, (2), VII, pp. 440-442), *mais dans un cas particulier seulement.* Il n'est pas toujours vrai dans les autres cas.

*Démonstration de Battaglini.* Pour simplifier, considérons deux pyramides quadrangulaires SABCD, *sabcd* dont les hauteurs sont SP = H, *sp* = *h*. On a

$$\overline{SA}^2 = H^2 + \overline{AP}^2, \quad \overline{SB}^2 = H^2 + \overline{BP}^2, \text{ etc;}$$
$$\overline{sa}^2 = h^2 + \overline{ap}^2, \quad \overline{sb}^2 = h^2 + \overline{bp}^2, \text{ etc.}$$

(*) Descartes connaissait ce théorème, mais ne l'a pas publié; on l'a retrouvé, en 1860, dans un extrait de ses papiers fait par Leibniz.

Comme $SA = sa$, $SB = sb$, etc., on a

$$\overline{sa}^2 = \overline{AP}^2 - H^2 - h^2, \quad \overline{sb}^2 = \overline{BP}^2 - H^2 - h^2, \text{ etc.}$$

Si H est différent de $h$, soit $H > h$. Prolongeons SP d'une longueur $PO = \sqrt{H^2 - h^2}$ et joignons le point O à A, B, C, D, de manière à former la pyramide auxiliaire OABCD. On aura

$$\overline{OA}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + H^2 - h^2 = \overline{ap}^2, \quad OA = ap;$$

$$\overline{OB}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{BP}^2 + H^2 - h^2 = \overline{bp}^2; \quad OB = bp,$$

et, de même,

$$OC = cp, \quad OD = dp.$$

Les triangles OAB, OBC, OCD, ODA sont donc respectivement égaux à *pab*, *pbc*, *pcd*, *pda*, comme ayant les trois côtés égaux. Mais cela est impossible *dans le cas où p est à l'intérieur du polygone abcd*; car la somme des angles en O est inférieure à quatre droits, tandis que la somme des angles en *p* est égale à quatre droits. Par suite, on doit supposer $H = h$, ce qui entraîne $AP = ap$, $BP = bp$, $CP = cp$, $DP = dp$ et l'égalité des pyramides.

Remarque Cette démonstration, qui peut s'étendre à la géométrie non-euclidienne, ne s'applique évidemment pas au cas où *p* est extérieur à *abcd*. Dans ce cas, *le théorème général n'est pas vrai*. Considérons, en effet, un trapèze HIJK ou HI = JK, IJ < HK. Soient L un point situé à l'intérieur du triangle HIJ et tel que HL = HI, M symétrique de L par rapport à l'axe de symétrie du trapèze, N un point de l'espace qui se projette à l'intersection de cet axe avec la bissectrice de l'angle IHL. Les deux pyramides NHLJK, NHIMK ont leurs faces triangulaires égales et disposées dans le même ordre ; mais elles ne sont pas égales.

## II.

### Théorème de Gerling et Stegmann (1844).

*L'n tétraèdre* ABCD *est la somme arithmétique ou algébrique de deux tétraèdres dont chacun est identique à son symétrique.*

Soient O le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, *a*, *b*, *c*, *d* les projections de ce point sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ seront les centres des cercles circonscrits à ces quatre faces. Menons les deux droites $a\mathrm{B}$, $a\mathrm{C}$, $a\mathrm{D}$; $b\mathrm{C}$, $b\mathrm{D}$, $b\mathrm{A}$; $c\mathrm{D}$, $c\mathrm{A}$, $c\mathrm{B}$;

$dA$, $dB$, $dC$. Le tétraèdre sera la somme (arithmétique, si O est à l'intérieur du tétraèdre, algébrique, dans le cas contraire) des douze tétraèdres :

$$\begin{array}{lll} OaBC, & OaCD, & OaDB; \\ ObCD, & ObDA, & ObAC; \\ OcDA, & OcAB, & OcBD; \\ OdAB, & OdBC, & OdCA. \end{array}$$

Considérons l'un quelconque $OaBC$ de ces tétraèdres, et son symétrique $O'aBC$ ayant même base $aBC$ et dont le sommet $O'$ est situé sur $Oa$ prolongé à une distance $aO' = Oa$. Si l'on fait tourner $O'aBC$ de 180° autour de la hauteur $ak$ de la base commune $BaC$, ce tétraèdre vient se placer sur le tétraèdre $OaBC$ de la manière suivante : la face $O'aC$ vient coïncider avec $OaB$, $O'aB$ avec $OaC$, $BaC$ avec $CaB$, $BO'C$ avec $COB$; etc. Autrement dit, $OaBC$ est *autosymétrique*.

On peut encore énoncer le théorème de Gerling comme il suit : *un tétraèdre est la somme arithmétique ou algébrique de vingt quatre tétraèdres* (comme $OakB$, $OakC$) *symétriques deux à deux*.

Corollaires I. Deux tétraèdres symétriques sont équivalents, comme sommes (algébriques ou arithmétiques) de douze tétraèdres égaux deux à deux.

II. Deux polyèdres symétriques sont équivalents comme sommes de tétraèdres symétriques équivalents.

III.

Théorème de Darboux (1900).

*Un tétraèdre* ABCD *est la somme arithmétique de douze pentaèdres dont chacun est identique à son symétrique.*

Soient I le centre de la sphère inscrite au tétraèdre; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les projections de ce point sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC; $m, n, p, q, r, s$ les projections du même point I sur les six arêtes CD, DB, BC, AB, AC, AD.

Le tétraèdre sera la somme arithmétique des douze pentaèdres ayant pour hauteurs les portions d'arêtes

$$Aq, Ar, As; \quad Bq, Bn, Bp; \quad Cr, Cm, Cr; \quad Ds, Dm, Dn$$

et pour bases six quadrilatères à la fois birectangles et biisoscèles; par exemple, pour la hauteur $Aq$, le quadrilatère $I\delta q\gamma$, qui est divisé, par la

diagonale $qI$, en deux triangles rectangles $Iq\gamma$, $Iq\delta$ symétriques, par rapport à cette diagonale.

Ce pentaèdre $AI\delta q\gamma$ est identique au pentaèdre symétrique $A'I\delta q\gamma$, ayant même base $I\delta q\gamma$ et dont le sommet $A'$ est situé sur $Aq$ prolongé à une distance $qA' = Aq$, comme on le voit en faisant tourner $A'I\delta q\gamma$ de 180° autour de $qI$.

On peut encore énoncer le théorème de Darboux, comme il suit : *Un tétraèdre est la somme arithmétique de vingt-quatre tétraèdres* (*comme* $AIq\gamma$, $AIq\delta$) *symétriques deux à deux*.

Corollaires I et II. Deux tétraèdres ou deux polyèdres symétriques sont équivalents.

Remarque. Le théorème de Gerling, dont la démonstration est due essentiellement à Stegmann, d'après Gerling lui-même, se trouve dans sa correspondance avec Gauss (*Werke*, VIII, pp. 242-246); celui de Darboux, qui est vrai en géométrie non euclidienne, dans l'analyse qu'il a faite de ce volume des Œuvres de Gauss (*Bulletin des sciences mathématiques*, 1900 (2), XXIV, 1re partie, pp. 273-274, en note). (P. M.)

---

## SUR L'ÉQUATION BIQUADRATIQUE;

par M. J. Neuberg.

La présente note, suggérée par un article de M. Selivanof dans le *Bulletin de Darboux*, 1883, p. 246 interprète géométriquement la méthode de résolution de Ferrari. Cette interprétation a déjà été signalée par M. Burnside (Voir Salmon, *Algèbre supérieure*, traduction Chemin, pp. 245 et 286); quoi qu'il en soit, il nous a paru utile de la faire connaître ici avec quelques détails.

Soit donnée l'équation homogène

$$f(x, y) \quad Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4 = 0. \qquad (1)$$

A l'identité

$$4.3\, f(x, y) = x^2 \frac{d^2f}{dx^2} + 2xy \frac{d^2f}{dxdy} + y^2 \frac{d^2f}{dy^2},$$

correspond la forme

$$\begin{aligned} x^2 (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + 2xy (Bx^2 + 2Cxy + Dy^2) \\ + y^2 (Cx^2 + 2Dxy + Ey^2) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Considérons maintenant la conique U représentée par l'équation

$$\varphi(s_1, s_2, s_3) = 4s_1s_3 - s_2^2 = 0 \qquad (3)$$

ou par les formules

$$z_1 : z_2 : z_3 = x^2 : 2xy : y^2; \tag{4}$$

le rapport $x : y$ jouant le rôle de paramètre variable. Les quatre racines de (1) définissent quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ de U; si l'on remplace $x^2$, $2xy$, $y^2$ par $z_1$, $z_2$, $z_3$, l'équation (2) devient

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, z_3) \equiv z_1 (Az_1 + Bz_2 + Cz_3) + z_2 (Bz_1 + Cz_2 + Dz_3) \\ + z_3 (Cz_1 + Dz_2 + Ez_3) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

et représente une conique V passant par les quatre points M.

Or, on peut remplacer V par une conique quelconque du faisceau

$$F(z_1, z_2, z_3) + u\varphi(z_1, z_2, z_3) = 0 \tag{6}$$

et notamment par l'un des systèmes de droites $(M_1M_2, M_3M_4)$, $(M_1M_3, M_2M_4)$, $(M_1M_4, M_2M_3)$. Les valeurs correspondantes de $u$ annulent le discriminant de (6); donc si l'on prend pour $u$ une racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B & C + 2u \\ B & C - u & D \\ C + 2u & D & E \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

l'équation (6) se décompose en deux facteurs linéaires :

$$(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3)(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3) = 0, \tag{8}$$

et l'équation (1) en

$$(\lambda_1 x^2 + 2\lambda_2 xy + \lambda_3 y^2)(\mu_1 x^2 + 2\mu_2 xy + \mu_3 y^2) = 0. \tag{9}$$

En identifiant (6) et (8) on obtient

$$\lambda_1\mu_1 = A, \quad \lambda_2\mu_2 = C - u,$$

d'où

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{C - u}{A},$$

et en désignant par $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ les racines de (1) :

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \frac{2}{3}\Sigma x_1 x_2 - \frac{u}{A}.$$

L'inconnue auxiliaire se trouve ainsi exprimée en fonction des racines.

La résolvante (7) a été donnée pour la première fois par Aronhold; elle peut s'écrire

$$Hu^3 - Su + T = 0.$$

C'est une équation incomplète; celle de Ferrari est généralement *complète*, mais elle offre l'avantage que l'inconnue a l'expression plus simple $x_1x_2 + x_3x_4$.

## SUR CERTAINES ENVELOPPES ;

par M. E. N. Barisien.

La normale à une ellipse E au point M ($a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$) a pour équation

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{1}$$

La dérivée de cette équation par rapport à $\varphi$ est

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi = c^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \tag{2}$$

La résolution de ces deux équations donne les coordonnées d'un point de l'enveloppe de la normale en M, ou du centre de courbure $\mu$ en M :

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \quad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi. \tag{3}$$

L'équation (2) représente une droite qui passe par le point $\mu$ et qui est perpendiculaire au rayon OM ; cette droite passe aussi par le point $\mu'$,

$$x = \frac{c^2}{a}\cos\varphi, \quad y = \frac{c^2}{b}\sin\varphi, \tag{4}$$

qui appartient à l'ellipse E′ ayant pour axes $\frac{c^2}{a}, \frac{c^2}{b}$ ou pour sommets les points de rebroussement de la développée de l'ellipse proposée. Il est même facile de voir que la droite (2) est la corde d'osculation de l'ellipse E′ au point $\mu'$.

Si l'on prend la dérivée par rapport à $\varphi$ de l'équation (2), on obtient

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi = 4c^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{5}$$

La droite (5) passe par le centre de courbure de l'enveloppe de la droite (2) ; elle est parallèle à la droite (1) et a pour enveloppe la développée de l'ellipse E″, d'axes $8a$ et $8b$.

De même, la dérivée de (5) donne

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi = 4c^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \tag{7}$$

En continuant ainsi, on voit que les dérivées d'ordre pair de l'équation (1) représentent des droites normales à des ellipses dont les axes grandissent de quatre en quatre ; que les dérivées d'ordre impair représentent des droites qui sont les cordes d'osculation d'autres ellipses.

Note. La corde d'osculation d'une ellipse d'axes $2a$, $2b$ enveloppe

une courbe du 6e ordre et de la 4e classe, ayant pour équation (NAM., 1873, (2), XII, pp. 29-41)

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=2,$$

si l'on prend pour axes coordonnés les axes principaux de l'ellipse. Rapportée aux diagonales du rectangle des axes, la même courbe a pour équation en coordonnées ponctuelles

$$X^{\frac{2}{3}}+Y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}(a^2+b^2)^{\frac{1}{3}},$$

et en coordonnées tangentielles

$$\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=2(a^2+b^2).$$

On pourrait l'appeler *astroïde oblique* : on la déduit d'une *astroïde droite* en inclinant toutes les ordonnées autour de leur pied d'un même angle. Le nom d'*astroïde scalène* conviendrait à la développée d'ellipse, qui se déduit de l'astroïde droite en modifiant les ordonnées dans un rapport constant. (J. N.)

---

## ESQUISSES BIOGRAPHIQUES.

### Eugène Beltrami (1835-1900).

Eugène Beltrami, né à Crémone, le 16 novembre 1835, est mort à Rome le 18 février 1900. Il fit ses études moyennes à Crémone et à Venise, passa ensuite trois ans à l'Université de Pavie (1853-1856), mais il ne put y achever ses études, forcé qu'il fut d'accepter un emploi dans le bureau d'un ingénieur pour subvenir à ses besoins et à ceux de sa mère restée veuve.

Dans cette position modeste, il étudia seul les mathématiques supérieures. Deux mémoires publiés par lui dans les *Annales de Tortolini* en 1862, attirèrent l'attention de Brioschi, qui le fit nommer professeur du cours d'algèbre complémentaire et de géométrie analytique à l'Université de Bologne (1862). Il fut ensuite successivement professeur de géodésie à Pise (1862-1866), de mécanique rationnelle à Bologne (1866-1873), de mécanique rationnelle et d'analyse supérieure à Rome (1873-1876), de mécanique rationnelle et de physique mathématique à Pavie (1876-1891), puis à Rome (1891-1900). C'est le souci de la santé de sa mère et de sa femme qui fut la cause de ses nombreux changements d'université.

Beltrami a écrit cent quarante notes ou mémoires. Ceux qui se rapportent à la géométrie des surfaces datent de son séjour à Pise, où il avait connu Riemann. Dans un mémoire célèbre de 1866, il démontra que les surfaces à courbure constante sont les seules qui soient représentables sur un plan de manière que leurs

géodésiques y soient figurées par des lignes droites, Deux ans après, il publia son célèbre *Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne*, où il montre que la géométrie propre des surfaces à courbure constante négative est lobatchefskienne (*), puis la *Théorie générale des espaces de courbure constante*. — A partir de 1871, Beltrami a consacré un grand nombre de travaux à la cinématique des fluides, à la théorie du potentiel, à celle de l'élasticité, de la lumière, de l'électricité, du magnétisme et de la propagation de la chaleur. Il s'est, en particulier, beaucoup occupé des théories de Maxwell auxquelles il eût voulu donner un fondement mathématique rigoureux. C'est à Beltrami que l'on doit d'avoir remis au jour, en 1889, le célèbre livre *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733), où Saccheri a établi, sans s'en douter, les premiers principes de la géométrie non euclidienne.

Beltrami était membre de la plupart des Académies italiennes, correspondant de celle de Paris et de plusieurs autres étrangères. Il était sénateur du royaume d'Italie depuis 1899, mais, en général, il fuyait les honneurs et les charges honorifiques qui eussent pu lui faire perdre un temps précieux. C'était un professeur éminent. Ses mémoires sont écrits avec une grande clarté (D'après CREMONA, *Commemorazione*, lue à l'Académie royale des Lincei de Rome, le 10 juin 1900; publiée dans le *Giornale di Matematiche* de Battaglini, continué par Capelli, t. XXXVIII, novembre et décembre 1900, pp. 355-375). (P. M.)

---

(*) C'est dans ce mémoire que Beltrami a établi la proposition suivante : *Il est impossible de démontrer le postulatum d'Euclide, par des raisonnements de géométrie plane*. Voici l'esquisse du raisonnement de Beltrami : Supposons que l'on puisse démontrer le postulatum d'Euclide par des raisonnements de géométrie plane relatifs à la ligne droite (définie comme ligne déterminée par deux de ses points) et, par suite, que l'on prouve aussi, en partant de cette définition, que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits. Beltrami montre que, dans cette hypothèse, l'on pourrait faire des raisonnements analogues sur les triangles géodésiques de la surface appelée pseudosphère; par suite, l'on pourrait prouver que la somme des trois angles d'un triangle géodésique pseudosphérique est égale à deux droits. Or, on déduit du postulatum d'Euclide, que cette somme est inférieure à deux droits. Cette contradiction prouve que l'hypothèse d'où l'on est parti est fausse : le postulatum d'Euclide n'est pas une conséquence de la définition générale de la ligne droite.

L'interprétation de la géométrie lobatchefskienne sur la pseudosphère euclidienne par Beltrami avait été précédée de l'interprétation de la géométrie euclidienne sur l'horisphère lobatchefskien, due à Lobatchefsky et à Bolyai. Beltrami cite les *Études géométriques* de Lobatchefsky où se trouve cette propriété de l'horisphère d'avoir une géométrie propre euclidienne.

## BIBLIOGRAPHIE.

**Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band I, Heft 6 (ausgegeben am 30 mai 1901; pp. 721-922). Band IV$_1$, Heft 1 (ausgegeben am 13 September 1901; pp. 1-121); IV$_2$, Heft 1 (ausgegeben am 6 Juni 1901; pp. 1-147). Leipzig, Teubner, 1901. Prix : 8 marcs; 3 marcs 40; 3 marcs 80.**

**1.** *Cahier 6 du tome I. Théorie de la multiplication complexe des fonctions elliptiques*, par M. H. Weber, professeur à l'Université de Strasbourg (fin, pp. 721-732).

*Calcul des probabilités*, par M. E. Czuber, professeur à l'Université de Vienne (pp. 733-767).

*Théorie des erreurs, méthode des moindres carrés*, par M. J. Bauschinger (pp. 769-798).

*Interpolation*, par M. J. Bauschinger (pp. 799-820).

*Application du calcul des probabilités à la statistique* par L. von Bortkiewicz, à St-Pétersbourg (pp. 820-851). *Assurances sur la vie*, par G. Bohlmann, à Goettingue (pp. 852-917). Ces deux chapitres sont traités avec plus d'ampleur et de développements que les précédents. La bibliographie semble aussi beaucoup plus complète.

*Calcul des différences*, par D. Selivanof, à St-Pétersbourg (pp. 918-937). Résumé substantiel et vraiment scientifique des travaux les plus essentiels sur la matière.

*Calcul numérique*, par R. Mehmke, à Stuttgart (pp. 938-998). Ce chapitre est l'un des plus intéressants et des plus instructifs de l'Encyclopédie et tout le monde y trouvera beaucoup à apprendre.

**2.** *Premier cahier du tome IV* (Première partie). *Principes de la mécanique rationnelle*, par M. A. Voss, à Wurzbourg (pp. 1-120). 1-5. Définition et objet de la mécanique. 6-12. Principes philosophiques, mathématiques, physiques de la mécanique. 13-17. Le temps et l'espace; système d'axes. 18-19. Les forces en statique. 20-25. Les forces en dynamique. 26-28. Les théories purement cinétiques. 29-51. Les principes spéciaux de la mécanique rationnelle. 29-35. Statique : le principe du levier; le principe des vitesses virtuelles; le principe de Fourier. 36-41. Dynamique : principe de d'Alembert. Équations de Lagrange. Principe de Gauss. Conditions exprimées par des inégalités. 42-44. Principes de Hamilton et de la moindre action. 45-51. Principe de la force vive et de l'énergie. Le second principe de la théorie mécanique de la chaleur. — Cette section de l'Encyclopédie est précédée d'une excellente bibliographie générale et suivie d'une table des noms très utile. L'auteur ne prend pas toujours parti entre les vues divergentes des géomètres dont il parle; mais il les expose avec beaucoup de netteté. Son propre point de vue se trouve dans la remarque finale, n° 51 : la mécanique est semi rationnelle, semi expérimentale.

**3.** *Premier cahier du tome IV* (Seconde partie). La seconde partie du tome IV est consacrée surtout à la mécanique des corps déformables. *Notions géométriques fondamentales*, par M. Abraham, à Goettingue (pp. 3-47). 1. Théorie analytique

des vecteurs. 2. Cinématique et statique des corps continus. 3. Actions mutuelles des champs scalaires, de vecteurs et de tenseurs.

*Hydrodynamique : ses bases physiques*, par M. A. E. H. Love, à Oxford (pp. 48-83).

*Hydrodynamique : exposition theorique*, par M. A. E. H. Love, à Oxford (pp. 84-147).

---

**Vorlesungen über Geschichte der Mathematik**, von Moritz Cantor. Dritter Band. Zweite Auflage. Zweite Abteilung Abschnitt XVII (1700-1726). Dritte Abteilung Abschnitt XVIII (1726-1758). Mit 29 + 72 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner (X pp. et pp. 893-923). Prix : marcs 6 + 12,40.

Nous avons rendu compte dans *Mathesis* (1882, pp. 11-15; 1892, pp. 19-20; 1893, p. 16, 184; 1894, pp. 135-137, 1895, p. 68; 1898, pp. 162-163) de la première édition des trois forts volumes qui constituent ce bel ouvrage.

Dans le court espace de sept ans, l'auteur est parvenu à achever la publication de la seconde édition ou il a introduit les principaux resultats des recherches des savants dans le domaine de l'histoire des mathematiques (Voir pour les t. I. II, III, 1re section, *Mathesis*, 1894, pp. 136-137, 1899, pp. 197-198; 1900, pp. 139-140; 1901, p. 26).

L'eloge du livre de M. Cantor n'est plus à faire. Il est et sera longtemps encore la base des travaux des mathematiciens sur l'histoire de leur science. Nous transcrivons pour les nouveaux abonnes de *Mathesis*, l'indication des 26 chapitres contenus dans les deux dernieres sections du tome III.

*Sommaire*. XVII. 93. Histoires des mathemat ques. Editions des classiques. Calcul infinitesimal jusqu'en 1704. 94-95. Lutte de priorité entre Leibniz et Newton. 96. Analyse combinatoire; calcul des probabilités. 97. Séries; calcul des différences. 98. Algebre. 99. Calcul differentiel; calcul intégral; géometrie analytique et projective 100. Equations differentielles. XVIII. 101. Histoires des mathematiques; classiques; dictionnaires. 102. Le calcul, surtout en Allemagne. 103. Traités de géométrie; theorie des paralleles; Saccheri. 104. Recherches de mathématiques élémentaires. 105-106. Algebre. 107. Theorie des nombres 108. Analyse combinatoire et calcul des differences. 109-110. Series. 111 Le tome Ier de l'Introduction à l'analyse des infiniement petits d'Euler (Le t. II est analysé, ch. 115). 112. Séries. Principes du calcul differentiel. 113 Le calcul différentiel d'Euler. 114-116. Géométrie analytique (Clairaut, de Gua, Maclaurin, Euler, Cramer, etc.). 117. Questions de maxima et de minima : Euler. 118. Integrales definies. Equations differentielles.

La *Bibliotheca mathematica* publie dans chacun de ses numéros des additions et corrections souvent microscopiques au livre de M. Cantor. Nous ne doutons que le savant historien, dans quelques années, n'en extraie un *Supplement-Band* ou toutes les observations seront introduites, classées et pesées à leur juste valeur.

(P. M.)

**Félix Müller. Vocabulaire mathématique français allemand et allemand-français, contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. Zweite Hälfte. Leipzig, Teubner, Paris Gauthier-Villars, 1901** (pp. IX-XIV, 133-316 très grand in-8°, à deux colonnes). Prix : 10 mars.

C'est la seconde partie, allemande-française, du précieux vocabulaire dont nous avons annoncé la première partie dans *Mathesis*, 1900 (2), x, 251-252. Ce second fascicule de l'ouvrage du Dr. F. Müller sera, plus encore que le premier, le bienvenu de ce côté du Rhin. Il est fait avec le même soin, au point de vue scientifique, avec la même perfection, au point de vue typographique, que le fascicule français-allemand. Sa place est marquée dans toutes les bibliothèques mathématiques.

---

**Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke von H. Suter, Professor am Gymnasium in Zürich, Leipzig, Teubner, 1900** (IX-278 pp. in-8). Prix : 14 marcs.

Tableau chronologique des auteurs mathématiques arabes, avec des indications aussi complètes que possible concernant leur vie, leurs écrits scientifiques, leurs éditions, les manuscrits de ces écrits, enfin les traductions latines inédites qui en ont été faites. La liste de M. Suter comprend 528 numéros, depuis l'astrologue el Fazari, mort en 777, jusqu'au mathématicien Behâ-Eddin, mort en 1622. C'est un sommaire de l'histoire de la mathématique arabe, de son origine à son déclin.

Beaucoup des matériaux catalogués par M. Suter n'ont jamais été utilisés ; on a étudié les écrits paraissant les plus importants, mais il en reste beaucoup à examiner de près, surtout dans le domaine de l'astrologie.

La science arabe, en effet, a exclusivement fleuri sous la protection de souverains entichés d'astrologie (ce qui réclamait toutes les mathématiques) et ayant grand besoin de médecins en raison de leur vie voluptueuse. Le personnel savant a été recruté dans les races conquises (Syriens, Iraniens, etc.) et même parmi les sujets infidèles (Juifs, chrétiens, sabéens). Le mouvement scientifique a toujours été antipathique au clergé musulman ; les Arabes proprement dits y sont restés réfractaires, aussi bien que les races turques. Seuls, quelques princes mongols ou mongolisés ont repris la tradition des Abassides et provoqué des renaissances brillantes, mais éphémères (D'après P. Tannery, *Bulletin de Darboux*, (2), XXV, pp. 55-56, avril 1901, et IM, VIII, septembre 1901, pp. 244-245. Comparez *Bibliotheca mathematica*, (3), II, pp. 161-164 ; *Bulletin de la Société mathématique de New-York* (2), VII, Janvier 1901, pp. 189-190).

---

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS (1901).

Solution par M. E. N. Barisien.

*Soient* Ox, Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires; soient a et a' les abscisses de deux points* A *et* A' *de l'axe* Ox, *et b l'ordonnée d'un point* B *de l'axe* Oy. *On considère toutes les hyperboles équilatères* ($H_\lambda$) *circonscrites au triangle* AA'B.

I. *Calculer les coordonnées* $x_1$, $y_1$, *du quatrième point* M *de rencontre de la circonférence circonscrite au triangle* AA'B *avec l'hyperbole* ($H_\lambda$). *Montrer qu'en désignant par* $\lambda$ *un paramètre variable, ces coordonnées peuvent être mises sous la forme*

$$x_1 = \frac{A + B\lambda}{1 + \lambda^2}, \qquad y_1 = \lambda x_1 + b,$$

*et donner les valeurs des constantes* A *et* B.

II. *Vérifier par le calcul que le diamètre de l'hyperbole qui est mené par le point* M *passe par un point fixe, quel que soit* $\lambda$.

*Le démontrer géométriquement.*

III. *Trouver le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées aux hyperboles* ($H_\lambda$) *parallèlement à une direction donnée, et examiner en particulier le cas où cette direction est celle des axes de coordonnées.*

Si l'on prend sur Oy deux points B' et B'' tels que $OB' = -b'$, $OB'' = b'$, et que

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'' = -OB \cdot OB',$$

en vertu d'un théorème connu, le point B' est situé sur toutes les hyperboles ($H_\lambda$), et le point B'' est situé sur le cercle circonscrit au triangle AA'B. Le point fixe B' est d'ailleurs l'orthocentre du triangle AA'B.

Nous avons donc

$$aa' = bb' = k^2, \tag{1}$$

et $b' = (aa' : b)$. Mais pour la symétrie des calculs, nous laisserons la lettre $b'$ dans les formules qui vont suivre.

1. D'après cela, les équations de l'hyperbole ($H_\lambda$) et du cercle (Γ) circonscrit au triangle AA'B, s'écrivent

$$(H_\lambda) \quad f(x, y) - x^2 + 2\lambda xy - y^2 - (a + a')x + (b - b')y + k^2 = 0,$$

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 - (a + a')x - (b + b')y + k^2 = 0;$$

d'où, par soustraction, $y(y - \lambda x - b) = 0$. Or $y = 0$ représente la corde

d'intersection AA′ de (Hλ) et de (Γ). L'équation de la seconde corde BM est donc $$y = \lambda x + b. \tag{2}$$

Portons cette valeur de $y$ dans l'équation de (Γ) ; on trouve

$$x^2 + (\lambda x + b)^2 - (a + a')x - (b + b')(\lambda x + b) + k^2 = 0,$$

ou $$x[x(1 + \lambda^2) - (b' - b)\lambda - (a + a')] = 0.$$

$x = 0$ correspond à l'abscisse du point B ; l'abscisse du point M est donc

$$x_1 = \frac{(a + a') + (b' - b)\lambda}{1 + \lambda^2}, \tag{3}$$

et son ordonnée $$y_1 = \lambda x_1 + b. \tag{4}$$

Le coefficient λ est bien celui de l'énoncé, et l'on a

$$A = a + a', \quad B = b' - b = \frac{aa' - b^2}{b}. \tag{5}$$

II. Le centre C de (Hλ) est déterminé par les deux équations

$$f'_x = 2x + 2\lambda y - (a + a') = 0, \tag{6}$$

$$f'_y = 2\lambda x - 2y + (b - b') = 0. \tag{7}$$

Il a donc pour coordonnées

$$x_C = \frac{a + a' + (b' - b)\lambda}{2(1 + \lambda^2)}, \quad y_C = \frac{b - b' + \lambda(a + a')}{2(1 + \lambda^2)}. \tag{8}$$

On remarque d'abord que $x_C = \frac{1}{2} x_1$. (9) D'autre part,

$$y_1 - b' = \lambda x_1 - (b' - b) = \frac{\lambda(a + a') + b - b'}{1 + \lambda^2} = y_C.$$

Mais $-b' = y_{B'}$. On a donc

$$y_C = \frac{y_1 + y_{B'}}{2}. \tag{10}$$

Les relations (9) et (10) montrent que C est le milieu de MB′. Par conséquent, *le diamètre* CM *passe par le point fixe* B′.

On voit, incidemment, que si I et J sont les points milieux de AA′ et BB′, les droites (6) et (7) qui sont perpendiculaires entre elles, sont les droites CI et CJ ; CJ est parallèle à BM.

Le lieu du centre C est donc le cercle de diamètre IJ, et ayant pour équation

$$2(x^2 + y^2) - (a + a')x - (b + b')y = 0.$$

D'autre part, CJ est le diamètre de l'hyperbole, conjugué à la direction BB′. Donc, la parallèle menée par C à BB′ rencontre BM en son milieu.

Par conséquent, $BM = 2CJ$, et comme $BB' = 2B'J$, il en résulte *géométriquement* que la droite CM passe par le point B'.

III. Le diamètre de $(H_\lambda)$, conjugué à une direction de coefficient angulaire donné $m$, a pour équation

$$f'_x + mf'_y = 2x + 2\lambda y - (a + a') + m[2\lambda x - 2y + (b - b')] = 0,$$

ou

$$2\lambda(y + mx) + 2(x - my) + (b - b')m - (a + a') = 0. \quad (11)$$

L'élimination de $\lambda$ entre l'équation de $(H_\lambda)$ et l'équation (11) donne pour le lieu des points de contact des tangentes de direction $m$, la cubique

$$\frac{x^2 - y^2 - (a + a')x + (b - b')y + k^2}{2(x - my) + (b - b')m - (a + a')} = \frac{xy}{mx + y}.$$

Cette équation devient

$$(mx - y)(x^2 + y^2) - m(a + a')x^2 + (b - b')y^2 + k^2(mx + y) = 0. \quad (12)$$

Elle représente une cubique passant par les cinq points A, A', B, B' et O. Son asymptote réelle, parallèle à la direction donnée, a pour équation

$$y = mx + \frac{m(a + a') - m^2(b - b')}{1 + m^2}. \quad (13)$$

Si $m = \infty$, (12) devient

$$x[x^2 + y^2 - (a + a')x + aa'] = 0.$$

Donc le lieu des points de contact des tangentes parallèles à $Oy$ est le cercle

$$x^2 + y^2 - (a + a')x + aa' = 0, \quad (14)$$

décrit sur AA' comme diamètre.

Si $m = 0$, (12) devient

$$y[x^2 + y^2 - (b - b')y - bb'] = 0 \quad (15)$$

Le lieu des points de contact est alors le cercle de diamètre BB'. Et cependant les points de contact des tangentes parallèles à $Ox$ sont imaginaires: ils sont à l'intersection de l'hyperbole et de la droite CI qui est le diamètre conjugué à la direction $Ox$.

On voit encore que l'équation (12) s'écrivant

$$mx[x^2 + y^2 - (a + a')x + aa'] - y[x^2 + y^2 - (b - b')y - bb'] = 0,$$

la cubique (12) passe, quelle que soit la valeur de $m$, par les deux points d'intersection des cercles de diamètres AA' et BB'.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

### Question 1088.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 216).

*Un observateur* (O) *placé à peu de distance d'un abreuvoir rectiligne, horizontal, à profil rectangulaire, et plein d'eau, aperçoit l'arête intérieure* (I) *du fond, qui forme une ligne courbe. On propose de déterminer la nature de cette courbe, en se donnant la distance d de l'observateur à la paroi de l'abreuvoir contenant l'arête* (I); *la profondeur de l'eau, h; la hauteur de l'œil au-dessus de l'eau δ; l'indice de réfraction de l'eau, n.*

*La question revient à chercher les rayons issus des points* M *de la droite* (I) *qui, après la réfraction, passent en un point donné* (O).

(H. Brocard).

*Solution par* MM. Emmerich et Soons. Supposons, dans le plan du niveau, deux axes rectangulaires PX, PY dont l'origine soit le pied P de la perpendiculaire abaissée de O sur le niveau et qui soient parallèles aux droites *d* et (I). Un point quelconque M de (I) sera déterminé par ses distances *d*, *y*, aux plans OPY, OPX. Un rayon issu de M rencontrera le niveau au point N, puis, après réfraction, l'œil en O. Le point N étant situé dans le plan OPM, on a, en désignant les coordonnées de N par $\xi$, $\eta$,

$$\xi : \eta = d : y. \tag{1}$$

Menons encore la perpendiculaire MQ sur le niveau et désignons les angles NOP, NMQ par $\alpha$, $\beta$. La loi de refraction donne

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \tag{2}$$

Des triangles NOP et NMQ, on tire

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \delta \operatorname{tg} \alpha; \tag{3}$$

$$\sqrt{d^2 + y^2} - \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = h \operatorname{tg} \beta. \tag{4}$$

Il s'agit d'éliminer $\alpha$, $\beta$, $y$ entre les équations précédentes. L'équation (2) peut s'écrire $\cot^2\beta - n^2 \cot^2 \alpha = n^2 - 1$. Eu égard à la relation (1), l'équation (4) prend la forme

$$(d - \xi)\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = h\xi \operatorname{tg} \beta.$$

---

(*) Nous avons oublié de mentionner des solutions des questions 1312, 1314, 1317, 1319 par M. Déprez, 1317 par M. Pire, 1322 par M. Emmerich.

L'équation cherchée est donc

$$(n^2-1)(\xi^2+\eta^2)(d-\xi)^2-k^2\xi^2+n^2\delta^2(d-\xi)^2=0;$$

elle représente une ligne conchoïdale ayant pour asymptote la droite $\xi=d$.

---

## ×Question 1255.

(Voir *Mathesis* (2), t. X, p. 32.)

*Prouver que*

$$\frac{(x^{6n+5}-y^{6n+5})(x-y)}{(x^{2n+1}-y^{2n+1})(x^5-y^5)}=P^2-xyQ^2, \qquad (1)$$

*où l'on a posé*

$$P=(x+y)Q+x^ny^n, \quad Q=(x-y)\frac{(x^n-y^n)(x^{n+1}-y^{n+1})}{x^5-y^5}.$$

(C. E. Bickmore).

*Solution par* M. Emmerich. Soit A le premier membre de (1). On a

$$A=\frac{x^{4n+2}+x^{2n+1}y^{2n+1}+y^{4n+2}}{x^2+xy+y^2}=x^{2n}y^{2n}+\frac{B}{x^2+xy+y^2},$$

ou

$$\begin{aligned}B&=x^{4n+2}-x^{2n+2}y^{2n}-x^{2n}y^{2n+2}+y^{4n+2}\\&=(x^{2n}-y^{2n})(x^{2n+2}-y^{2n+2})\\&=(x^n-y^n)(x^{n+1}-y^{n+1})(x^n+y^n)(x^{n+1}+y^{n+1})\\&=(x^n-y^n)(x^{n+1}-y^{n+1})[(x^n-y^n)(x^{n+1}-y^{n+1})+2x^ny^n(x+y)].\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}A&=x^{2n}y^{2n}+Q[(x^2+xy+y^2)Q+2(x+y)x^ny^n]\\&=x^{2n}y^{2n}+(x+y)^2Q^2+2(x+y)Qx^ny^n-xyQ^2\\&=[(x+y)Q+x^ny^n]^2-xyQ^2.\end{aligned}$$

Remarque. Pour que A soit une fonction entière, il faut que $x=$ M. 3 ou M. $3+2$. En effet, le trinôme $x^2+xy+y^2$ s'annule pour $x=y\theta$ et $x=y\theta^2$, où $\theta$ est une racine cubique imaginaire de l'unité. Le trinôme $x^{4n+2}+x^{2n+1}y^{2n+1}+y^{4n+2}$ doit s'annuler pour les mêmes valeurs de $x$, ce qui exige par exemple

$$\theta^{4n+2}+\theta^{2n+1}+1=0. \qquad (2)$$

Si l'on suppose successivement $n = 3p$, $3p+1$, $3p+2$ et que l'on tienne compte des égalités $\theta^3 = 1$, $\theta^2 + \theta + 1 = 0$, on voit que l'égalité(1) n'a lieu que lorsque $n = 3p$ ou $3p+2$.

On vérifierait de même que Q est une fonction entière pour ces valeurs de $n$.

M. Soons a *vérifié* l'identité de M. Bickmore.

---

## Question 1284.

(Voir *Mathesis* (2), X, p. 216).

*On donne un cercle* $K^2$ *dont le diamètre* $AB = 2$ *et le centre* O, *et une ellipse* $E^2$ *dont les foyers sont* O, B *et le grand axe* $\sqrt{3}$; *si une tangente mobile de l'ellipse coupe le cercle aux deux points* P, P', *démontrer que le lieu du point d'intersection des droites* AP', BP *est une courbe du quatrième ordre et de la huitième classe ayant ses deux nœuds en* A *et* B. *Déterminer la tangente en un point, les huit bitangentes, les tangentes aux points doubles et les quatre tangentes issues de chacun de ces points*

(V. Retali).

*Solution par* MM. J. Déprez *et* H. Lez(*). I. Plus généralement : *On donne un cercle* $K^2$ *dont le diamètre* $AB = 2r$ *et le centre* O, *et une conique dont le centre est situé sur* AB *et dont* O *est un foyer; si une tangente mobile à cette conique coupe le cercle aux deux points* P, P', *le lieu du point d'intersection des droites* AP', BP *est une quartique.*

Prenons pour axes coordonnés AB et le diamètre de $K^2$ perpendiculaire à AB. Soient $(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$, $(r\cos\beta,\ r\sin\beta)$ les coordonnées de P, P'. Les équations de AP', BP sont

$$y = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\,(x+r), \qquad y = \cot\tfrac{1}{2}\alpha\,(r-x). \tag{1}$$

Les coordonnées de la projection M de O sur la droite PP' sont

$$x = \frac{r}{2}(\cos\alpha + \cos\beta), \quad y = \frac{r}{2}(\sin\alpha + \sin\beta).$$

Ce point M appartient au cercle principal de la conique; donc si $2a$,

---

(*) Nous empruntons la recherche de l'équation du lieu à la solution de M. Déprez, et la discussion des particularités de la courbe à la solution de M. Lez. (*Rédaction*).

$2b$, $2c$ désignent les axes et la distance des foyers, on a la relation

$$[r(\cos\alpha+\cos\beta)-2c]^2+r^2(\sin\alpha+\sin\beta)^2=4a^2,$$

ou
$$r^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)-rc(\cos\alpha+\cos\beta)=b^2. \qquad (2)$$

L'équation du lieu demandé s'obtient en éliminant $\alpha$, $\beta$ entre les égalités (1) et (2). On trouve d'abord

$$\cos\alpha=\frac{y^2-(r-x)^2}{(r-x)^2+y^2}, \qquad \cos\beta=\frac{(x+r)^2-y^2}{(x+r)^2+y^2},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{4r^2y^2}{[y^2+(x+r)^2]\,[y^2+(r-x)^2]}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (2); il vient

$$4r^4y^2-8r^2cxy^2-b^2[y^2+(x+r)^2]\,[y^2+(x-r)^2]=0.$$

Dans le cas particulier de la question 1284, l'équation du lieu est

$$y^4+2y^2(x^2+4x-3)+(x^2-1)^2=0. \qquad (3)$$

II. On peut l'écrire ainsi, après avoir transporté l'origine des coordonnées au point A :

$$(x^2+y^2-2x)^2+4y^2(2x-3)=0, \qquad (4)$$

ou (si $x^2+y^2-2x=C$, $D=2x-3$), $C^2+4y^2D=0$.

La quartique est donc l'enveloppe de la conique variable

$$\lambda^2D+2\lambda C-4y^2=0,$$

ou
$$2\lambda x^2+2(\lambda-2)y^2+2\lambda(\lambda-2)x-3\lambda^2=0,$$

qui a son centre sur l'axe des X au point

$$x=\frac{\lambda-2}{2}$$

et dont les demi-axes sont :

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+2\lambda+4}, \qquad b=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda(\lambda^2+2\lambda+4)}{\lambda-2}}.$$

Cette remarque permet de mener une tangente à la quartique, puisqu'on sait mener une tangente à une conique, en un point donné.

Maintenant, résolvant l'équation (4) par rapport à $y$, on a :

$$y^2=-(x^2+2x-6)\pm2\sqrt{(2x-3)(x^2-3)};$$

il est aussi facile de déterminer des points de la courbe, qui est symétrique par rapport à l'axe des X.

Pour

$x = 0$, $y = 0$, $y = \pm 2\sqrt{3}$

$x = 1$, $y = \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = \pm(\sqrt{2} \pm 1)$

$x = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{2\sqrt{3}}$, $y = \pm(2 - \sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}$

$x = \sqrt{2}$, $y = \pm\sqrt{2}$, $y = \pm(2 - \sqrt{2})$

$x = \frac{3}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 2$, $y = 0$, $y = \pm 2\sqrt{-1}$

$x = -1$, $y = \pm\sqrt{7 \pm 2\sqrt{10}}$

$x = -\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$.

Les points A et B, (ou $x = 0$, $y = 0$ et $x = 2$, $y = 0$), dont les coordonnées annulent les dérivées premières

$$f'_x = x(x^2 + y^2) - 3x^2 + y^2 + 2x, \qquad (5)$$

$$f'_y = y(x^2 + y^2) + 2y(x - 3), \qquad (6)$$

sont des points multiples; de plus, ils sont doubles, car dans l'équation

$$f''_{xx} + 2f''_{xy}\frac{\beta}{\alpha} + f''_{yy}\frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0$$

ou

$$6x^2 + y^2 - 6x + 2 + 4y(x + 1)\frac{\beta}{\alpha} + (x^2 + 6y^2 + 2x - 6)\frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0,$$

la substitution de leurs coordonnées n'annule pas les 3 termes.

Ainsi, pour l'origine 0, on a $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1}{3}$ ou $\frac{y}{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; ce sont les deux tangentes réelles aux deux branches qui se croisent en ce point.

La courbe ayant deux points doubles A, B, sa classe $4(4 - 1) = 12$ est diminuée de quatre unités; elle est donc de la $8^{me}$ classe.

Quant aux points limites, leurs coordonnées doivent annuler $f'_y$; ce sont les racines communes aux équations (5), (6), soit

$$x = \frac{3}{2}, \qquad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = -\sqrt{3}, \quad y = \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}.$$

Les droites $x=\frac{3}{2}$, $x=-\sqrt{3}$ sont donc bitangentes aux ovales déformées de la quartique.

Enfin, le coefficient angulaire d'une tangente en général étant

$$\gamma=-\frac{x(x^2+y^2)-3x^2+y^2+2x}{y(x^2+y^2+2x-6)},$$

on trouve pour le point $x=3-\sqrt{3}$, $y=\pm(2-\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}$,

$$\gamma=\pm\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2\sqrt{3}}};$$

de même, pour le point $x=3-\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{2\sqrt{3}}$,

$$\gamma=\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}.$$

Par suite, les tangentes en ces points de même abscisse sont

$$y\sqrt{2\sqrt{3}}=\pm x(\sqrt{3}-1),$$
$$y(1-\sqrt{3})=\pm(x-2)\sqrt{2\sqrt{3}},$$

soit les quatre droites qui joignent les extrémités du diamètre AB du cercle $K^2$, à celles de la sécante MN commune avec l'ellipse $E^2$.

La construction de la tangente en un point de la quartique peut se déduire de considérations cinématiques ou infinitésimales en partant du mouvement du point M sur le cercle principal de la conique $E^2$. (J. N.)

---

## Question 1290.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 240.)

*On considère les triangles* ABC *qui ont leur sommet* A *fixe et dont le côté* BC *se déplace sur une droite fixe x'x avec la condition* $B-C=90°$. *Trouver les lieux décrits par le point* K *de Lemoine et par ses associés.*

*Examiner les parties parasites de ces lieux.* (E. N. Barisien).

*Solution par* M. Emmerich. En appelant V l'angle de Brocard du triangle variable on a

$$\cos V=\operatorname{tg}2C-\operatorname{tg}C+\cos C=\frac{2-\sin^2 2C}{\sin 2C\cos 2C}.$$

Désignons par $h$ la perpendiculaire AD abaissée de A sur $x'x$, par $a$, $b$, $c$

les côtés du triangle ABC et par $\alpha, \beta, \gamma$ les coordonnées normales de K. On a

$$DB = h \operatorname{tg} C, \quad DC = h \cot C, \quad BC = 2h \cot 2C, \quad AB = h : \cos C.$$

On trouve

$$\alpha = \frac{a}{2} \operatorname{tg} V = \frac{h \cos^2 2C}{2 - \sin^2 2C}, \quad \gamma = \frac{c}{2} \operatorname{tg} V = \frac{h \sin C \cos 2C}{2 - \sin^2 2C}.$$

La perpendiculaire de K sur AD rencontrant AD en E, AB en F, on a

$$KF = \gamma : \cos C = \frac{h \operatorname{tg} C \cos 2C}{2 - \sin^2 2C}, \quad EF = (h - \alpha) \operatorname{tg} C = \frac{h \operatorname{tg} C}{2 - \sin^2 2C}.$$

Les coordonnées de K rapportées aux axes DB, DA seront donc

$$x = \frac{h \sin 2C}{2 - \sin^2 2C}, \quad y = \frac{h \cos^2 2C}{2 - \sin^2 2C};$$

d'où, en éliminant 2C,

$$x^2 = (h - y)(h - 2y), \tag{1}$$

ou bien

$$\frac{(y - \frac{3}{4}h)^2}{(\frac{1}{4}h)^2} - \frac{x^2}{(\frac{1}{4}h\sqrt{2})^2} = 1,$$

hyperbole dont les sommets sont A et le milieu de AD, et qui passe par les points $y = 0$, $x = \pm h$.

La droite AD touchant constamment le cercle ABC, elle est le lieu des associés $K_b$, $K_c$. Les coordonnées normales de l'associé $K_c$ de BC et AB étant

$$\alpha' = -\frac{a}{2} \operatorname{tg} A = h \cot^2 2C, \quad \gamma' = -\frac{c}{2} \operatorname{tg} C = \frac{h \cot 2C}{2 \cos C},$$

on trouve, pour les parties de la perpendiculaire $K_cE_c$ de $K_c$ sur AD,

$$K_cF_c = \frac{h \cot 2C}{2 \cos^2 C}, \quad E_cF_c = \frac{h}{2 \sin 2C \cos^2 C}.$$

Les coordonnées cartésiennes de $K_c$ seront ainsi

$$x = \frac{h}{\sin 2C}, \quad y = -\frac{h \cos^2 2C}{\sin^2 2C},$$

et le point $K_c$ décrit la parabole $x^2 = h(h - y)$ passant par A et par les points $\pm h$, 0.

Note. M. Deprez a résolu la même question et a accompagné sa solution de remarques intéressantes que nous croyons utiles de reproduire.

1° Soient F le milieu de AD, P et P′ les points $(\pm k, 0)$. La partie *utile* de l'hyperbole (1) est la portion de la branche d'hyperbole passant par F, P, P′ et située du même côté de PP′ que A.

La partie utile de la parabole trouvée pour le lieu de $K_2$ est la portion située au-dessous de l'axe des $x$, A étant supposé au-dessus.

Pour les parties utiles des lieux des points $K_1$, $K_2$ il faut prendre respectivement l'axe des $y$ négatifs et le segment OF.

2° L'orthocentre du triangle ABC est le symétrique A′ de A par rapport à $x'x$.

Le centre du cercle circonscrit décrit la parallèle à $x'x$ par A, et le centre du cercle des neuf points parcourt $x'x$.

3° Le cercle inscrit et le cercle exinscrit dans l'angle A ont leurs centres sur la droite AP, et les deux autres cercles exinscrits ont leurs centres sur AP′ (ou inversement).

4° Les médianes issues de B et de C enveloppent une ellipse ayant pour sommets D et F, pour grand axe $k\sqrt{2}$.

5° Les rayons du cercle circonscrit qui aboutissent à B et C enveloppent le cercle (A, $k$). Les pieds des hauteurs issues de B et C se meuvent sur le même cercle.

6° Les bissectrices des angles B et C, et les médiatrices des côtés AB, AC enveloppent la parabole ayant pour foyer A et pour sommet F.

7° L'axe orthique passe par A et par le pied de la symédiane AK; l'axe antiorthique tourne autour de P (ou de P′), et la droite de Lemoine autour de O.

8° On peut généraliser la question 1290 en supposant $B - C = \text{const.}$ Les points K et $K_2$ décriront deux hyperboles; les points $K_1$, $K_2$ deux droites.

---

## Question 1321.

(Voir *Mathesis*, (3) I, p. 128).

***Le lieu des sommets des triangles équilatéraux qui ont pour bases les divers rayons de courbure d'une ellipse, se compose de deux courbes d'aire équivalente à celle de l'ellipse.*** (E. N. Barisien).

***Solution par*** M. Gustave Gérard. Le théorème de M. Barisien s'applique à une courbe fermée quelconque, à condition de toujours donner un signe aux aires.

Soient, en effet, en un point M d'une courbe plane quelconque, $\omega$ le centre de courbure et N le sommet d'un des deux triangles équilatéraux construits sur M$\omega$, par exemple à gauche, pour un observateur placé en M et regardant le centre de courbure.

Puisque l'angle $\omega$MN est constamment égal à 60°, la droite MN enveloppe une *développoïde* de la courbe (M) et, par suite, son point caractéristique est la projection du centre de courbure $\omega$, c'est-à-dire le milieu P de la distance MN.

Le point P décrit une courbe fermée dont l'aire algébrique est égale à A. Le mouvement élémentaire de la droite MN est un glissement sur elle-même, qui n'engendre aucune surface, et une rotation autour de P. Comme on a toujours

$$PM = PN,$$

les aires élémentaires balayées par les segments PM et PN sont égales; donc il en est de même des aires totales balayées tout le long de la courbe (P) et, si on les désigne par B, on a :

$$\text{aire de la courbe (M)} = A + B,$$
$$\text{aire de la courbe (N)} = A + B,$$

donc

$$\text{aire de (N)} = \text{aire de (M)}.$$

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**1022.** Des égalités

$$\cos^2\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad \cos^2\mu = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}, \quad \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\mu} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

déduire

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

**1023.** Si $x^5 + y^5 = z^5$, on a aussi

$$(x^5 + z^5)^5 y^5 + (x^5 - y^5)^5 z^5 = (y^5 + z^5)^5 x^5. \qquad \text{(Tait.)}$$

**1024.** Démontrer l'identité

$$(\sin\varphi + \cos\varphi)^{\frac{2}{5}}(1 + \sin 2\varphi)^{\frac{1}{5}} + (\sin\varphi - \cos\varphi)^{\frac{2}{5}}(1 - \sin 2\varphi)^{\frac{1}{5}} = 2.$$

Il suffit de remarquer que

$$(\sin\varphi \pm \cos\varphi)^2 = 1 \pm \sin 2\varphi.$$

(E. N. Barisien).

**1025.** Résoudre le système

$$(x-a)(y-b)=z,$$
$$(x-a')(y-b')=z.$$
$$(x-a'')(y-b'')=z. \qquad \text{(Grunert).}$$

On trouve

$$z=\frac{(a-a')(a'-a'')(a''-a)(b-b')(b'-b'')(b''-b)}{[ab'-a'b+a'b''-a''b'+a''b-ab'']^2}.$$

**1026.** Soit *abcde* une section plane d'une pyramide pentagonale SABCDE; démontrer que

$$\frac{\text{ECA}}{\text{ECB}}:\frac{\text{EDA}}{\text{EDB}}=\frac{eca}{ecb}:\frac{eda}{edb},$$

ECA, ECB... désignant les aires des triangles ECA, ECB...

**1027.** Etant donné un triangle ABC, mener parallèlement à BC une droite qui rencontre AB, AC en des points B', C' tels que les droites BC', B'C soient perpendiculaires. (Dienger).

Plus généralement, mener la droite B'C', de manière que les droites BC', B'C se coupent sous un angle donné $\varphi$.

Il suffit d'observer que les droites BC', B'C se coupent sur la médiane.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**1343.** Le lieu des centres des coniques qui passent par deux points donnés et touchent deux droites données se compose généralement de deux coniques. Cas particuliers.

×**1344.** Construire un triangle ABC, connaissant la hauteur $AA_1=h$, la bissectrice $AD=\alpha$, et la médiane $BB_1=b'$.

×**1345.** Soient O, R le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, et I, $r$ le centre et le rayon du cercle $r$ inscrit. Si l'on a

$$\text{AI}=\sqrt{2\text{R}r},$$

l'angle OIA est droit, et $2a=b+c$. (Walker).

**1346.** Soient D, E, F les points où les droites AM, BM, CM qui joignent les sommets du triangle ABC à un même point M rencontrent les côtés opposés BC, CA, AB. Les droites AM, BM, CM rencontrent respectivement les côtés du triangle DEF aux points D', E', F'. Démontrer : 1° que les droites joignant A, B, C aux milieux H, K, L des droites EF, FD, DE concourent en un point N; 2° que les droites joignant D, E, F aux milieux $h$, $k$, $l$ des côtés correspondants du triangle D'E'F' concourent en un point P; 3° que les points M, N, P sont en ligne droite.

## *THÉORÈMES DE MÉTAGÉOMÉTRIE,

par M. C. E. Wastrels, Répétiteur à l'Université de Gand.

1. *Un côté quelconque d'un triangle et la droite qui joint les milieux des deux autres ont une perpendiculaire commune passant par le milieu du premier.*

En effet, soient B′ et C′ les milieux des côtés AC et AB du triangle ABC (fig. 1) et abaissons les perpendiculaires AD, BE, CF sur la droite B′C′ (en G. R.(*), ces perpendiculaires sont supposées $\leq \Delta$).

Les triangles rectangles ADC′ et BEC′ sont égaux, et, par suite, AD = BE ; les triangles ADB′ et CFB′ donnent pareillement AD = CF. Donc, BE = CF.

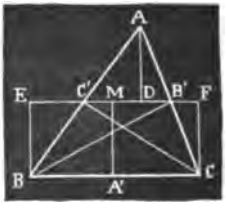


Fig. 1.

Cela étant, la perpendiculaire élevée sur la droite EF en son milieu M doit couper BC ; soit A′ le point de rencontre de ces droites.

Les quadrilatères BEMA′ et CFMA′ sont égaux et donnent BA′ = A′C et *angle* BA′M = MA′C, ce qui établit le théorème.

Remarque. La droite B′C′ vaut la moitié de EF et les points M et D sont symétriques par rapport au milieu de C′B′.

2. Un raisonnement analogue, appliqué aux trièdres, conduit au théorème suivant :

*Si, dans un trièdre* SABC, *on mène les bissectrices* SA′, SB′, SC′ *des faces* BSC, CSA, ASB, *ainsi que le plan* B′SC′, *ce plan et celui de la face* BSC *ont un plan perpendiculaire commun contenant la bissectrice* SA′.

Ce théorème peut d'ailleurs se déduire du premier si l'on observe que la propriété en question, existant pour un triangle riemannien, appartient aussi aux triangles sphériques et, par suite, aux trièdres.

3. *Si, par les bissectrices des faces d'un trièdre, on mène des plans perpendiculaires aux plans de ces faces, ces trois plans perpendiculaires se coupent suivant une même droite.*

La démonstration de ce théorème ne présente aucune difficulté.

4. *Si, par les arêtes d'un trièdre* SA′B′C′, *on mène des plans perpendiculaires aux faces opposées, ces plans se coupent suivant une même droite.*

---

(*) G. R. = géométrie riemannienne; G. L. = géométrie lobatchefskienne; G. E. = géométrie euclidienne.

***Démonstration.*** Soient SA'M, SB'N, SC'P les plans perpendiculaires aux faces du trièdre proposé. Par SA' et SB'. menons les plans SA'C et et SB'C perpendiculaires à SA'M et SB'N; faisons, dans les plans auxiliaires, l'angle B'SA = CSB' et A'SB = CSA' et menons le plan ASB.

En vertu du n° 2, les plans B'SC' et A'SC' doivent contenir la bissectrice de l'angle ASB; cette bissectrice n'est donc autre chose que la droite SC'. De plus, le plan SC'P, perpendiculaire à SA'B', est aussi perpendiculaire à SAB.

D'après le théorème 3, les plans SA'M, SB'N, SC'P se coupent donc suivant une même droite; c. q. f. d.

**5.** Considérons maintenant un triangle rectiligne ABC et menons les trois hauteurs AA', BB', CC'.

Par le sommet A, élevons une perpendiculaire AS au plan du triangle et considérons le trièdre SABC. Les droites BB' et CC' sont respectivement perpendiculaires aux plans SAC et SAB; il en est donc de même des plans SBB' et SCC'. Comme SA' est perpendiculaire à BC, on voit que le plan SAA' est aussi perpendiculaire à SBC. En vertu du n° 4, les trois plans SAA', SBB', SCC' se coupent suivant une même droite SS'.

En G.E. *et en* G.R., cette droite coupe nécessairement le plan ABC en un point H; d'où l'on conclut que *les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.*

En G.L., la droite SS' peut occuper, par rapport au plan ABC, trois positions différentes :

1° elle peut couper le plan ABC en un point H; dans ce cas, les trois hauteurs du triangle ABC passent par ce point;

2° elle peut être parallèle au plan ABC; dans ce cas, elle est aussi parallèle aux droites AA', BB', CC', intersections du plan ABC avec les plans SAA', SBB', SCC', qui contiennent SS'; par suite, les trois hauteurs du triangle ABC sont parallèles;

3° SS' peut être une droite non-sécante par rapport à ABC; elle a alors avec ce plan une normale commune S'H. Si, par S', on imagine le plan normal à SS', on sait que ce plan sera aussi normal aux droites AA', BB', CC'; il en résulte que ce plan auxiliaire coupe le plan ABC suivant une perpendiculaire commune aux trois hauteurs du triangle.

Ainsi, *en* G. L., *les trois hauteurs d'un triangle doivent, ou bien se couper en un même point, ou être parallèles ou enfin admettre une perpendiculaire commune.*

●. Du théorème précédent, on déduit sans peine le théorème analogue relatif aux *médiatrices* d'un triangle rectiligne.

En effet, d'après le n° 1, les perpendiculaires élevées aux milieux A', B', C' des côtés du triangle ABC ne sont autre chose que les hauteurs du triangle A'B'C'. Par suite, *en* G. E. *et* R., *elles se coupent en un même point, tandis qu'en* G. L., *elles se coupent en un même point, ou bien sont parallèles ou admettent une perpendiculaire commune.*

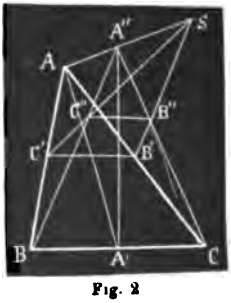


Fig. 2

**7.** *Les médianes* AA', BB', CC' *d'un triangle* ABC *se coupent en un même point* (fig. 2).

Pour le démontrer, prenons, dans le plan $\alpha$ mené par A' normalement à BC, un point quelconque A'' et, sur le prolongement de AA'', un point S que nous considérons comme le sommet d'un tétraèdre ayant pour base ABC. Soient C'' et B'' respectivement les intersections des droites A''B et SC', A''C et SB'; je dis que C'' et B'' sont symétriques par rapport à A''A'. En effet, le plan $\alpha$ est perpendiculaire à la droite C'B' (n° 1); donc, il est perpendiculaire au plan SC'B'; comme il l'est aussi au plan A''BC, on peut conclure que C''B'', intersection des plans SC'B' et A''BC, est aussi perpendiculaire à $\alpha$ et par suite à A''A'. Les droites A''B et A''C étant symétriques par rapport à A''A', il en est de même des points C'' et B''.

Observons maintenant que, dans le triangle A''BC, la droite CC'' doit couper A''A' et que sa symétrique BB'' doit passer par le même point. Il en résulte que les plans SAA', SBB', SCC' se coupent suivant une même droite. Comme deux médianes quelconques du triangle ABC doivent se couper à l'intérieur de cette figure, l'intersection des trois plans en question coupe nécessairement le plan ABC en un point G; ce point devra donc se trouver à la fois sur les trois médianes; ce qui démontre le théorème.

## ×SUR LA FRACTION $\frac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}$.

Posons

$$N = ax^2 + 2bx + c, \quad D = Ax^2 + 2Bx + C, \quad y = \frac{N}{D};$$

nous aurons

$$(Ay - a)x^2 + 2(By - b)x + Cy - c = 0;$$

d'où

$$x = \frac{-By + b \pm \sqrt{(By-b)^2 - (Ay-a)(Cy-c)}}{Ay - a}.$$

Les *valeurs limites* de $y$, s'il en existe, sont déterminées par l'équation du second degré

$$(By - b)^2 - (Ay - a)(Cy - c) = 0, \qquad (1)$$

ou

$$\frac{Ay - a}{By - b} = \frac{By - b}{Cy - c},$$

et les valeurs correspondantes de $x$ résultent de

$$x = \frac{-By + b}{Ay - a} = \frac{Cy - c}{-By + b},$$

ou

$$y = \frac{ax + b}{Ax + B} = \frac{bx + c}{Bx + C},$$

de sorte que

$$(ax + b)(Bx + C) - (Ax + B)(bx + c) = 0,$$
$$(aB - Ab)x^2 + (aC - Ac)x + bC - Bc = 0. \qquad (2)$$

Les racines des équations (1) et (2) sont imaginaires seulement lorsque les racines des deux équations $N = 0$, $D = 0$ étant réelles sont *entrelacées*, ainsi qu'on le voit graphiquement par le tracé de la courbe $y = \frac{N}{D}$, ou par la composition du discriminant de ces équations en fonction des racines des équations $N = 0$, $D = 0$.

Dans tous les autres cas, les racines de (1) et de (2) sont réelles; et, en

les désignant par $y_1$, $y_2$ et $x_1$, $x_2$ ($y_1$ étant le maximum et $y_2$ le minimum de $y$) on a

$$y_1 - y = \frac{(Ay_1 - a)x^2 + 2(By_1 - b)x + Cy_1 - c}{D},$$

expression dont le numérateur est un carré en vertu de (1); de sorte que

$$y_1 - y = \frac{(Ay_1 - a)(x - x_1)^2}{D}, \tag{3}$$

et de la même manière

$$y - y_2 = \frac{(a - Ay_2)(x - x_2)^2}{D}. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) donnent, en remplaçant $y$ par (N : D),

$$N - y_2 D = (a - Ay_2)(x - x_2)^2 \quad - N + y_1 D = (Ay_1 - a)(x - x_1)^2,$$

de sorte que

$$N = p(x - x_1)^2 + q(x - x_2)^2,$$
$$D = P(x - x_1)^2 + Q(x - x_2)^2;$$

ou

$$P = \frac{Ay_1 - a}{y_1 - y_2}, \quad Q = \frac{a - Ay_2}{y_1 - y_2},$$
$$p = y_2 P. \qquad q = y_2 Q.$$

De là

$$\begin{cases} ax + b = p(x - x_1) + q(x - x_2) \\ bx + c = -px_1(x - x_1) - qx_1(x - x_2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} Ax + B = P(x - x_1) + Q(x - x_2), \\ Bx + C = -Px_1(x - x_1) - Q(x - x_2), \end{cases}$$

et une variété d'autres relations peuvent être obtenues à titre d'exercices, en Algèbre élémentaire.

Si le professeur désire préparer des exemples numériques conduisant à des résultats rationnels simples, il a seulement à former les expressions pour N et D en assignant des valeurs entières simples à $x_1$, $x_2$, $p$, $q$, P, Q. Ainsi, par exemple, pour

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad p = 1, \quad q = 2, \quad P = 2, \quad Q = 3,$$

on a

$$y = \frac{N}{D} = \frac{3x^2 - 10x + 9}{5x^2 - 16x + 14}.$$

(Extrait d'un article de M. Greenhill, dans l'*Enseignement mathématique*, 1901, III, p. 330.)

Note. Voici, d'après Catalan, une discussion très élémentaire de l'expression $y$.

1. Si $a : A = b : B = c : C$, $y$ est constant et égal à $(a : A)$.

2. Si l'on a $a : A = b : B \gtrless c : C$,

$$y = \frac{a}{A} + \frac{c - \frac{a}{A}C}{Ax^2 + Bx + C}.$$

L'étude de la fonction $y$ revient à celle du trinome $Ax^2 + Bx + C$.

3. Si l'on n'a pas $a : A = b : B$ et si l'on pose $\alpha = b - \frac{a}{A}B$, $\beta = c - \frac{a}{A}C$, on trouve

$$y = \frac{a}{A} + \frac{\alpha x + \beta}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{a}{A} + \frac{1}{\frac{Ax^2 + Bx + C}{\alpha x + \beta}}.$$

L'étude des variations de $y$ se ramène à celle de

$$\frac{Ax^2 + Bx + C}{\alpha x + \beta} = \frac{A}{\alpha}\frac{z^2 + Mz + N}{z} = \frac{A}{\alpha}M + \frac{A}{\alpha}\left(z + \frac{N}{z}\right)$$

pourvu que l'on pose $\alpha x + \beta = \alpha z$ et que l'on désigne par M et N des constantes, faciles à calculer, au moyen de $\alpha$, $\beta$, A, B, C.

Soit $N = -g^2$, $g$ étant positif. L'expression

$$z - \frac{g^2}{z} = g\left(\frac{z}{g} - \frac{g}{z}\right)$$

croît de 0 à l'infini, quand $z$ varie de $g$ à l'infini; elle prend des valeurs égales et de signes contraires quand $z$ varie de $g$ à 0. C'est d'ailleurs une fonction impaire.

Soit $N = +g^2$. L'expression

$$z + \frac{g^2}{z} = g\sqrt{\left(\frac{z}{g} - \frac{g}{z}\right)^2 + 4}$$

est impaire et varie comme le carré de l'expression $\left(\frac{z}{g} - \frac{g}{z}\right)$ que l'on vient d'étudier.

Si $N = 0$, la discussion est encore plus facile.

## BIBLIOGRAPHIE.

**Nouveaux principes de la Géométrie avec une théorie complète des parallèles par Lobatchévsky. Traduit du russe pour la première fois par F. Mallieux, avocat, docteur en philosophie, chargé du cours de langue russe à l'Université de Bruxelles (Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 3e série, t. II, 1900, t. III, 1901). Gand, Hoste, 1901 (132 p. in-8, avec 9 planches). Prix : 3 francs.**

Lobatchefsky (1793-1886) n'a cessé, pendant plus d'un quart de siècle, de 1829 à 1856, d'appeler l'attention de ses contemporains sur la nouvelle géométrie qui porte son nom, en en exposant les principes, en russe, en allemand ou en français sous trois ou quatre formes différentes.

M. Mallieux vient de faire paraître la traduction française du plus considérable des ouvrages de Lobatchefsky, les *Nouveaux principes de Géométrie*, où l'auteur fait connaître *ab ovo* l'ensemble de ses vues sur la science de l'espace.

*Sommaire.* Avant propos du traducteur : M. Mallieux annonce à ses lecteurs que M. Neuberg a bien voulu revoir le manuscrit de sa traduction au point de vue mathématique. — Introduction de l'auteur : Considérations critiques, historiques et philosophiques vraiment remarquables sur les travaux de Legendre et de Bertrand de Genève, sur l'analyse et la synthèse, et enfin sur la mesure des figures courbes. 1. Premières notions de géométrie. 2. Définition de la sphère, de la circonférence, du plan et de la droite. 3. Mesure des droites, des angles rectilignes et des dièdres. 4. Lignes et plans perpendiculaires 5. Mesure des angles solides à l'aide d'angles dièdres. 6. Égalités des triangles. 7. Les lignes parallèles. 8. Horicycle, horisphère; triangles horicycliques sur l'horisphère. — Çà et là, M. Mallieux a supprimé des démonstrations faciles de théorèmes connus; il a supprimé aussi le dernier chapitre (*fonctions trig nométriques*).

Nous ne doutons pas que la traduction du principal traité de Lobatchefsky par le savant professeur de langue russe de l'Université de Bruxelles ne soit la bien venue auprès de tous ceux qui ne peuvent lire l'original russe ou qui n'aiment pas à consulter la traduction allemande d Engel, un peu encombrante à cause des notes qui l'accompagnent. **(P. M.)**

---

## ×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**22.** ***Propriétés des triangles qui sont inscrits à un même cercle*** **(O, R)** ***et circonscrits à un même second cercle*** **(I, *r*).**

ABC est l'un des triangles considérés, et les notations sont celles qui sont généralement employées par les auteurs français.

1° Les quantités

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \quad \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2},$$

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}, \quad \cos A+\cos B+\cos C$$

sont constantes.

2° Il en est de même des quantités

$$\frac{abc}{p},\quad \frac{S}{p},\quad AH+BH+CH,$$

$$r_1+r_2+r_3,\quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3},\quad \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3},$$

$$\overline{OI_1}^2+\overline{OI_2}^2+\overline{OI_3}^2,\quad IA\cdot IB\cdot IC,\quad \overline{II_1}^2+\overline{II_2}^2+\overline{II_3}^2,$$

$$II_1\cdot II_2\cdot II_3,\quad \overline{I_1I_2}^2+\overline{I_2I_3}^2+\overline{I_3I_1}^2.$$

3° Le centre du cercle des neuf points, l'orthocentre et le centre de gravité décrivent des circonférences

$$\left(I,\frac{R}{2}-r\right),\quad (I',R-2r),\quad \left(I'',\frac{1}{3}R-\frac{2}{3}r\right),$$

I' étant le symétrique de O par rapport à I, I'' le point qui divise OI dans le rapport 2 : 3.

**28.** *Sur un théorème de géométrie solide.* Le théorème suivant, qui généralise une proposition connue, a été énoncé par Otto Böklen, dans les *Archives de Grunert*, t. XXXVII (1861), p. 253 :

*Lorsqu'une droite* AB, *de longueur constante, se meut entre deux droites fixes* Cx, Dy, *non situées dans un même plan, la sphère qui passe par ses extrémités* A, B *et par les pieds* C, D *de la perpendiculaire commune aux deux droites fixes a un rayon constant.*

Cette propriété ayant été peu remarquée, nous allons en donner une démonstration assez simple, peu différente de celle de Böklen.

Soient M, N les milieux des droites CD, AB. Projetons les points A, B en A', B', sur le plan mené par la droite MN perpendiculairement à CD; les triangles rectangles AA'N, BB'N ayant deux côtés de longueur constante, on voit que la projection A' B' de AB a une longueur constante, et comme les points A', B', se meuvent sur deux droites fixes MA', MB', le rayon du cercle circonscrit au triangle MA'B' est constant. Appelons O le centre de ce cercle; les triangles OMC, OMD, OA'A, OB'B sont égaux, donc O est le centre de la sphère passant par C, D, A, B etc.

Le lieu du centre O est une circonférence de centre M.

Böklen donne encore deux autres énoncés de son théorème :

I. *Si en deux points fixes* C, D *d'une sphère donnée, on mène deux cordes* CA, DB *perpendiculaires à la corde* CD *et faisant un angle constant, la distance des secondes extrémités* A, B *est constante.*

La démonstration de cet énoncé est facile. En effet, les points A et B

se meuvent avec la même vitesse sur deux cercles parallèles égaux de la sphère. On peut observer que la droite AB engendre un hyperboloïde de révolution.

II. *Si deux droites* AC, BD *tournent autour de deux points fixes* A, B *de manière à conserver toujours la même plus courte distance* CD, *et à faire un angle constant, la sphère passant par les points* A, B, C, D *a un rayon invariable.*

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 1805.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 40.)

*Trouver une courbe telle que la projection du pied de l'ordonnée sur la tangente parcoure une ligne droite.* (J. Neuberg).

*Solution par* M. Stuyvaert. 1° Soient X et Y les coordonnées courantes, $x$ et $y$ les coordonnées d'un point variable de la courbe cherchée, $Y = mX$ l'équation de la droite en question ; on a donc pris pour origine le point où cette droite rencontre l'axe des abscisses. Posons $p = \frac{dy}{dx}$ ; la tangente à la courbe est donnée par

$$Y - y = p(X - x),$$

la perpendiculaire à la tangente, du pied de l'ordonnée, par

$$Y = -\frac{1}{p}(X - x).$$

Dans ces équations remplaçons Y par $mX$ :

$$X(m - p) = y - px; \quad (mp + 1)X = x,$$

puis éliminons X; nous aurons à intégrer l'équation différentielle

$$(mp + 1)(y - px) = x(m - p). \tag{1}$$

Résolvons par rapport à $y$ :

$$y = mx\frac{p^2 + 1}{mp + 1}.$$

Différentions :

$$pdx = mdx\frac{p^2 + 1}{mp + 1} + mxdp\frac{mp^2 + 2p - m}{(mp + 1)^2};$$

d'où, successivement,

$$\frac{dx}{x} = mdp\frac{mp^2 + 2p - m}{(mp + 1)(p - m)}, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{mpdp}{p - m} + \frac{mdp}{mp + 1} = mdp + \frac{m^2dp}{p - m} + \frac{mdp}{mp + 1}.$$

Intégrons :

$$lx = mp + m^2 l(p - m) + l(mp + 1) + lC.$$

Ou encore

$$x = Ce^{mp}(p - m)m^2(mp + 1). \qquad (3)$$

De l'équation (1) on tire

$$p = \frac{my \pm \sqrt{m^2y^2 + 4mx(y - mx)}}{2mx};$$

il suffit de substituer cette expression à $y$ dans l'égalité (3) pour avoir l'équation de la courbe cherchée.

Seulement, en passant de l'égalité (1) à l'égalité (2), nous avons divisé par $p - m$, et par suite supprimé la réponse $p = m$ qui, par l'intermédiaire de l'équation (1), conduit à la solution, évidente *a priori*, $y = mx$.

2° Supposons que la droite, lieu de la projection du pied de l'ordonnée sur la tangente, soit parallèle à l'axe des $x$ et représentée par $Y = b$. Nous aurons à remplacer Y par $b$ dans les équations de la tangente et de sa perpendiculaire, ce qui donne

$$b - y = p(X - y); \quad b = -\frac{1}{p}(X - x).$$

L'élimination de X fournit l'équation différentielle

$$y - b = bp^2.$$

Différentions :

$$pdx = 2bpdp.$$

En négligeant la solution évidente $p = 0$, il reste

$$dx = 2bdp,$$

d'où

$$p = \frac{x + c}{2b}.$$

Enfin l'élimination de $p$ conduit à l'équation

$$y = b + \frac{(x + c)^2}{4b},$$

qui représente une série de paraboles dont l'axe $Ox$ est la directrice et dont l'ordonnée du sommet est le quart du paramètre.

3° Si la droite est perpendiculaire à l'axe des $x$ et représentée par $X = a$, ou, plus simplement, par $X = 0$, on a des développements analogues à ceux du 1°, mais plus faciles et le résultat contient une exponentielle.

*Remarque.* Il y a peu d'intérêt à considérer les courbes de l'espace (en appelant ordonnée d'un point sa distance à un plan *xoy*), parce que toute courbe dont les tangentes rencontrent une droite fixe est une courbe plane et que, par suite, les développements sont analogues aux précédents, mais plus compliqués.

Solutions analogues, par MM. Emmerich, Gob et Verheugen.

L'équation (1) étant homogène en $x$ et $y$, on pourrait aussi la résoudre par rapport à $p$ et poser ensuite $y = mx$; mais cette méthode donne des calculs plus compliqués.

---

## Question 1307.

(Voir *Mathesis* (3), t. I, p. 64).

*Si* A', A'' *sont dans un triangle* ABC *les points où la symédiane* AK *et la droite de Lemoine coupent* BC, *et* B', B'', C', C'' *les points analogues sur* CA *et sur* AB, *les trois circonférences qui ont* A'A'', B'B'', C'C'' *comme diamètres se coupent en deux points tels que leurs triangles podaires ont leurs côtés inversement proportionnels à a, b, c. Ces triangles ne sont pas homologiques avec* ABC. (E Lemoine).

*Solution par* M. A. Gob. Soient P et Q deux points inverses par rapport au triangle ABC, Q' le point d'intersection de la droite AQ avec la circonférence BQC. Les angles du triangle BQ'C sont égaux à ceux du faisceau (Q. ABC) et comme les droites QA, QB, QC sont perpendiculaires aux côtés du triangle podaire de P, ce triangle podaire est semblable au triangle Q'BC.

Les triangles ABQ', APC sont semblables; on a donc l'égalité

$$AP.AQ' = AB.AC.$$

Donc lorsque Q' décrit une ligne $(l)$, P décrit la symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle A de l'inverse de $(l)$, le pôle étant A et la puissance d'inversion AB.AC. Nous désignons cette transformation par laquelle on passe de Q' à P sous le nom d'involution (A)(*).

---

(*) On peut déduire très simplement de cette proposition les principaux théorèmes concernant les triangles podaires. Voir notre note : *Sur quelques transformations de figures*, AFAS, Limoges, 1890 (A. G).

La question 1307 rentre dans la *théorie des points tripolairement associés*, comme l'a remarqué M. Déprez dans une généralisation de la question 1307 (J. N).

En particulier si ($l$) est une circonférence ayant pour diamètre le segment compris entre deux points $A_1'$ et $A_1''$ conjugués harmoniques par rapport à BC, le rapport des côtés Q'B et Q'C du triangle Q'BC sera constant et égal au rapport $A_1'B : A_1'C$. Or le cercle ($l$) coupe orthogonalement la circonférence ABC et la droite BC; ces deux lignes se transformant l'une en l'autre par l'involution (A), on voit que le lieu d'un point P tel que son triangle podaire ait deux de ses côtés dans un rapport constant est une circonférence coupant orthogonalement BC et le cercle ABC et par conséquent ayant pour diamètre le segment compris entre deux points A' et A'' conjugués harmoniques par rapport à BC. En plaçant le point mobile P en coïncidence avec A', on voit que le rapport constant des côtés du triangle podaire est égal au rapport des perpendiculaires abaissées de A' sur AB et AC.

Donc : *Si trois droites* AA', BB', CC' *se coupent en un point* K, *et si* A'', B'', C'' *sont les conjugués harmoniques de* A', B', C' *par rapport à* BC, CA, AB, *les circonférences ayant pour diamètres* A'A'', B'B'', C'C'' *se coupent en deux points* M *et* M' *dont les triangles podaires ont les côtés inversement proportionnels aux coordonnées normales de* K.

En supposant que K soit le point de Lemoine, on retrouve la proposition énoncée par M. Lemoine.

Pour démontrer la seconde partie, purement négative de la question, il suffit de considérer un cas particulier. Supposons donc que dans le triangle ABC on ait $BC^2 = AB.AC$. Les côtés du triangle podaire de M seront alors proportionnels à $a$, $c$, $b$, et ce triangle sera semblable au triangle ABC. Or si le triangle podaire de M était homologique avec ABC, M serait situé sur la cubique des dix-sept points et il en serait de même de son inverse N. Soit N' le point de rencontre de AN avec le cercle BNC; le triangle BN'C sera semblable au triangle podaire de M, donc à ABC. Les droites BN' et CN' sont donc parallèles à AC et AB et par suite AN passe par le milieu O de BC. Mais la cubique des 17 points rencontre AO en trois points qui sont A, O et le centre de gravité de ABC; N devrait donc être le centre de gravité et l'on devrait avoir $ON = \frac{1}{3}OA$. Mais dans le cercle NCN'B on a $ON.ON' = OB.OC$, d'où $\frac{OA^2}{3} = \frac{a^2}{4}$. En remplaçant OA par sa valeur en fonction de $a$, $b$, $c$ on trouve $a^2 = b^2 + c^2$ égalité incompatible en nombres réels avec $a^2 = bc$.

*Solution par* M. A. Droz-Farny. Soient M, N et Q les milieux des segments A'A'', B'B'', C'C''. La droite de Lemoine rencontre le côté BC au même point que la tangente en A au cercle circonscrit au triangle. Or A' et A'' divisent le côté BC, le premier intérieurement, le second extérieurement suivant le rapport $c^2 : b^2$. Il en résulte que les termes de points : A'B'C'', A'C'B'', B'C'A'', A''B''C'' sont en ligne droite. Ces six points sont donc les sommets d'un quadrilatère complet ayant comme diagonales A'A'', B'B'', C'C''. Les trois circonférences décrites sur ces segments comme diamètres se coupent en deux points $P_1$ et $P_2$, les points de Monge du quadrilatère et M, N et Q sont en ligne droite. Les points B, C, A', A'' étant harmoniques, la circonférence A'A'' est orthogonale à la circonférence ABC; donc $P_1$, $P_2$ et O sont en ligne droite.

Soit $R_a$ le rayon de la circonférence A'A''; en supposant $a > b > c$ on a

$$CM = \frac{ab^4}{b^4 - c^4}, \quad CN = \frac{ba^4}{a^4 - c^4}, \quad R_a = \frac{ab^2c^2}{b^4 - c^4}. \quad R_b = \frac{ba^2c^2}{a^4 - c^4};$$

d'où, en posant $D = (a^4 - b^4)(b^4 - c^4)$,

$$\overline{MN}^2 - (R_a + R_b)^2 = a^2b^2c^2(ab + ac + bc)(ab - ac - bc) : D,$$

$$\overline{MN}^2 - (R_a - R_b)^2 = a^2b^2c^2(ab + ac - bc)(ab - ac + bc) : D.$$

La deuxième expression est positive. La première montre que les deux points $P_1$ et $P_2$ sont réels distincts, coïncidents ou imaginaires suivant que $ab < c(a + b)$; $ab = c(a + b)$; $ab > c(a + b)$.

La circonférence décrite sur A'A'' est le lieu géométrique des points P tels que $\frac{PB}{PC} = \frac{c^2}{b^2}$; il en résulte aisément :

$$\frac{P_1A}{\frac{1}{a^2}} = \frac{P_1B}{\frac{1}{b^2}} = \frac{P_1C}{\frac{1}{c^2}};$$

de même pour $P_2$.

Comme $OP_1 . OP_2 = R^2$, $P_1$ est intérieur, $P_2$ extérieur à la circonférence ABC. Représentons par $x, y, z$ les côtés du triangle podaire de $P_1$. Les perpendiculaires abaissées de $P_1$ sur les côtés de A forment avec ces côtés un quadrilatère inscriptible de diamètre PA; de là :

$$x = PA . \sin A, \quad y = PB \sin B, \quad z = PC \sin C.$$

Donc

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$$

Dans un article intitulé : Sur un lieu géométrique (*Nouvelle corresp. math.*, tome IV, page 261; 1878), M. Van Aubel démontre que le lieu géométrique des points P dont les triangles podaires sur les côtés de ABC sont homologiques avec ce dernier est une courbe du 3me degré ayant O pour centre. $P_1$ et $P_2$ ne peuvent appartenir à cette courbe : car, de par la relation $OP_1.OP_2 = R^2$, ces 2 points sont situés du même côté de O; d'ailleurs les coordonnées normales de $P_1$ et $P_2$ ne vérifient pas l'équation du lieu, qui est

$$(\beta + \gamma \cos A)(\gamma + \alpha \cos B)(\alpha + \beta \cos C) = (\alpha + \gamma \cos B)(\beta + \alpha \cos C)(\gamma + \beta \cos A).$$

MM. Déprez et Emmercich ont résolu la même question.

---

## *Question 1320.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 128).

*De l'équation* $a \sin x + b \sin y + c \sin z = 0$, *déduire*

$$p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y) + p_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z-x) - p_2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y-z) - p_3 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y-z) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z-x) = 0,$$

*où l'on a posé*

$$a+b+c=2p, \quad -a+b+c=2p_1, \quad a-b+c=2p_2, \quad a+b-c=2p_3.$$

(Grunert).

*Solution par* M. Emmerich. On connaît la formule

$$\sin(l+m+n) = \cos l \cos m \cos n (\operatorname{tg} l + \operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n - \operatorname{tg} l \operatorname{tg} m \operatorname{tg} n).$$

On en tire

$$a \sin(-l+m+n) + b \sin(l-m+n) + c \sin(l+m-n) = 2 \cos l \cos m \cos n (p_1 \operatorname{tg} l + p_2 \operatorname{tg} m + p_3 \operatorname{tg} n + p \operatorname{tg} l \operatorname{tg} m \operatorname{tg} n).$$

En substituant

$$l = \tfrac{1}{2}(y+z), \quad m = \tfrac{1}{2}(z+x), \quad n = \tfrac{1}{2}(x+y),$$

l'identité précédente prend la forme :

$$a \sin x + b \sin y + c \sin z = 2 \cos \tfrac{1}{2}(y+z) \cos \tfrac{1}{2}(z+x) \cos \tfrac{1}{2}(x+y) \times [p_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y+z) + p_2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z+x) + p_3 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y) + p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y+z) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z+x) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y)].$$

Pour avoir la relation de Grunert, il suffit de remplacer $c$ par $-c$, et $z$ par $-z$. C'est ainsi qu'on change $p_1, p_2, p_3, p$ en $-p_3, -p_2, -p_1, p$, $p_3$ respectivement.

*Solution par* M. E. Pire, *étudiant à l'Ecole des arts et manufactures* (Gand).

Des relations posées on déduit

$$p = p_1 + p_2 + p_3, \quad a = p_2 + p_3, \quad b = p_3 + p_1, \quad c = p_1 + p_2;$$

en remplaçant $a$, $b$, $c$, par ces valeurs dans l'équation donnée, on obtient

$$p_1(\sin y + \sin z) + p_2(\sin z + \sin x) + p_3(\sin x + \sin y) = 0,$$

ou bien :

$$p_1 \sin \tfrac{1}{2}(y+z)\cos \tfrac{1}{2}(y-z) + p_2 \sin \tfrac{1}{2}(z+x)\cos \tfrac{1}{2}(z-x) + p_3 \sin \tfrac{1}{2}(y+x)\cos \tfrac{1}{2}(y-x) = 0.$$

Divisons tous les termes par $\cos \frac{1}{2}(y-z)\cos \frac{1}{2}(z-x)\cos \frac{1}{2}(y+x)$ :

$$\frac{p_1 \sin \frac{1}{2}(y+z)}{\cos \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(z-x)} + \frac{p_2 \sin \frac{1}{2}(z+x)}{\cos \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(y-z)} + \frac{p_3 \sin \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(y-x)}{\cos \frac{1}{2}(y+x)\cos \frac{1}{2}(z-x)\cos \frac{1}{2}(y-z)} = 0.$$

Si, maintenant, nous remarquons que

$$\tfrac{1}{2}(y+z) = \tfrac{1}{2}(x+y) + \tfrac{1}{2}(z-x), \quad \tfrac{1}{2}(z+x) = \tfrac{1}{2}(x+y) + \tfrac{1}{2}(z-y),$$
$$\tfrac{1}{2}(y-x) = \tfrac{1}{2}(y-z) + \tfrac{1}{2}(z-x),$$

l'égalité précédente devient

$$\frac{p_1[\sin \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(z-x) + \cos \frac{1}{2}(x+y)\sin \frac{1}{2}(z-x)]}{\cos \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(z-x)}$$
$$+ \frac{p_2[\sin \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(z-y) + \cos \frac{1}{2}(x+y)\sin \frac{1}{2}(z-y)]}{\cos \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(y-z)}$$
$$+ \frac{p_3 \sin \frac{1}{2}(x+y)[\cos \frac{1}{2}(y-z)\cos \frac{1}{2}(z-x) - \sin \frac{1}{2}(y-z)\sin \frac{1}{2}(z-x)]}{\cos \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(z-x)\cos \frac{1}{2}(y-z)} = 0.$$

et, après réduction

$$p_1[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z-x)] + p_2[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z-y)] + p_3 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y)[1 - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y-z)\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z-x)] = 0$$

ou enfin,

$$p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y) + p_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z-x) - p_2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y-z) - p_3 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y)\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y-z)\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z-x) = 0.$$

MM. François et Malengreau (Institut Laurent) ont résolu la même question.

## ×QUESTIONS D'EXAMEN.

**1028.** ABC, A'BC étant deux triangles rectangles de même hypoténuse BC, et I un point quelconque de la droite BC, démontrer que le produit tang BAI. tang CA'I est constant. (STEINER).

Abaisser IK, IH perpendiculaires à AB, A'C et déduire tang BAI, CA'I des triangles AIK, A'IH, etc.

Le théorème est il applicable à deux triangles sphériques rectangles de même hypoténuse?

**1029.** Construire un triangle ABC, connaissant en position la hauteur, la bissectrice et la médiane issues de A, ainsi que le pied de la hauteur ou l'orthocentre.

**1030.** Par les sommets A, C d'un quadrilatère ABCD on mène deux droites égales et parallèles, AA' et CC'. Démontrer que les quadrilatères ABCD, A'BC'D ont même surface. (PROUHET.)

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1347.** Les tangentes menées en B et C au cercle circonscrit au triangle ABC rencontrent les côtés opposés en B' et C'. Peut-on avoir BB' = CC' sans que le triangle ABC soit isoscèle?

Trouver d'autres propriétés remarquables d'un tel triangle.

**1348.** D'un point donné P on mène des tangentes à tous les cercles qui touchent deux droites fixes. Trouver le lieu des points de contact. Cas particulier où P est situé sur l'une des droites données. (SOONS)

×**1349.** Si l'on donne les équations (où $x, y, z$ sont inégaux)

$$a\cos(y+z)+b\cos(y-z)+c=0,$$
$$a\cos(z+x)+b\cos(z-x)+c=0,$$
$$a\cos(x+y)+b\cos(x-y)+c=0,$$

on a nécessairement $a^2+2bc-b^2=0$. (CAYLEY).

**1350.** Une droite AB, de longueur constante, se meut entre deux droites fixes $Ox$, $Oy$. Pour une position donnée de AB, on considère en chaque point M de cette droite le cercle osculateur à l'ellipse décrite par M lorsque AB se déplace; trouver le lieu du centre et l'enveloppe de ce cercle, ainsi que le lieu de l'extrémité du diamètre conjugué avec OM.

---

**Rectifications.** — Page 103, l. 10 et 12, lire : $r \gtrless 5$; p. 149, l. 2 en rem., lire $(nk)!$; p. 256, l. 6 en rem., $n = M3$; p. 257, l. 3, lire l'égalité (2); p. 260, l. 2 en rem., lire $\cot V = \operatorname{tg} 2C - \operatorname{tg} C + \cot C$; p. 260, l. 9 en rem., lire $\alpha' \ldots = -\frac{1}{4}\cot^2 2C$, $\gamma' = \frac{c}{2}\operatorname{tg} A \ldots$

# TABLE DES MATIÈRES (*).

## ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.


Pages.

×Théorèmes sur les progressions arithmétiques; par M. de Rocquigny. 69, 219
×Sur les nombres de Fibonacci; par M. Emmerich . . . . . 98
×Note d'arithmologie; par M. de Rocquigny. . . . . 100
×Caractère de divisibilité par un nombre quelconque; par M J. Malengreau . . . . . 197
Question 886; solution par M. Emmerich. . . . . 101
×Question 1227; solution par Mlle Wendt . . . . . 106
×Question 1263; solution par M. Emmerich . . . . . 146


## ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.


×Sur un système d'équations du premier degré; par M. E. Gelin. . . 136
et Supplément II . . . . . 1-8
Sur les permutations absolues (J. N.) . . . . . 223
Sur les fonctions continues périodiques (J. N) . . . . . 223
×Sur un certain minimum (J. N.) . . . . . 225
Sur l'équation biquadratique (J. N.) . . . . . 244
×Sur une fraction rationnelle, d'après M. Greenhill et Catalan . . . . 268
×Question 989; solutions par MM. Klompers, Neuberg, etc. . . . . 52
Question 699; solution par M. Neuberg . . . . . 77, 139
×Question 1295; solutions par MM. Pire, Soons, etc . . . . . 124
×Question 1261; solution par M. Emmerich . . . . . 145
Question 1296; solutions par MM. Verheugen, Emmerich, etc. . . . 148
×Question 1318; solution par M. J. Neuberg . . . . . 173
×Question 1252; solution par M. J. Neuberg. . . . . 201
×Question 1309; solutions par MM. Barisien, J. Neuberg, etc. . . . 207
Question 1280; solutions par MM. A. Listray, J. Neuberg. . . . . 230
×Question 1256; solution par M. Plakhovo . . . . . 234
×Question 1255; solution par M. Emmerich . . . . . 256
×Question 1320; solution par M. Emmerich . . . . . 279


(*) Rectifications, pp. 101, 152. 255, 280. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

## ×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; MÉTAGÉOMÉTRIE.

Pages.
Théorème fondamental du plan; par M C. J. Kool; Note (P. M.). . . . 9, 47
Sur les triangles qui ont deux bissectrices extérieures égales; par M. Fontené . . . . . 24
Sur un point remarquable du quadrilatère inscriptible; par M. Mathot . 25
Sur l'aire d'un quadrilatère; par M. J. Déprez . . . . . 52
Sur une propriété du triangle isoscèle; par M. C. J. Wasteels . . . 65, 133
Géométrie des êtres plans; par M. G. Tarry . . . . . 89
Géométrie du triangle . . . . . 117
Rectification d'un arc de cercle . . . . . 118, 161
Propriétés du triangle; par M. Soons . . . . . 159
Nouvelle démonstration d'un théorème; par M. G Tarry. . . . . 161
Sur une question d'examen; par M. Emmerich . . . . . 162
Le cinquième livre de la Métagéométrie; par M. Barbarin . . . . . 177
Sur les quadrilatères (J. N.). . . . . 221
Sur la question d'examen 1010 . . . . . 225
Trois théorèmes peu connus sur les polyèdres (P M.) . . . . . 241
Théorèmes de métagéométrie; par M. C. E Wasteels . . . . . 265
Propriétés des triangles inscrits et circonscrits à deux mêmes cercles. . 271
Sur un théorème de géométrie solide . . . . . 272
Question 1285; solution par MM. Rose, Cristesco, etc. . . . . 33
Question 1288; solution par MM. Rose et Déprez . . . . . 35
Question 1184; solution par M. R. Buysens . . . . . 56
Question 1232; solution par M. Cristesco. . . . . 82
Question 1082, solution par MM. Emmerich, Soons, etc. . . . . 104
Question 1254; solution par M. Emmerich . . . . . 120
Question 1138; solution par M. Emmerich . . . . . 164
Question 1301; solution par MM. Emmerich et Soons . . . . . 172
Question 1267; solution par MM. Emmerich et Barisien . . . . . 203
Question 1314; solutions par MM. Emmerich et Colart . . . . . 210, 195
Question 1319; solutions par MM. Emmerich, Barisien, etc. . . . . 236
Question 1322; solution par M. François . . . . . 238

## COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Notes sur un théorème de Steiner; par M. Droz Farny. . . . . 22
Théorie élémentaire du complexe linéaire de droites; par M. Stuyvaert . 41
Concours général de 1900; par M. J Déprez . . . . . 44
Axes d'une conique (J. N.) . . . . . 50
Sur quelques propriétés de l'ellipsoïde; par M. C. E. Wasteels . . . 94, 154
Analogies entre le cercle, l'hyperbole et la parabole. . . . . 99
Sections planes du cône et du cylindre; par M. Fr. Breithof . . . . 113, 134
Sur un point du triangle; par M. E. Lemoine. . . . . 131
Sur les triangles orthologiques (J. N.) . . . . . 157
Théorèmes de géométrie; par M. G. Tarry. . . . . 191
Application des principes d'homographie et de dualité; par M. Stuyvaert. 193

Pages.
Sur la question 1314; par M. H. Van Aubel . . . . . 195
Question 1283; solution par M. Stuyvaert . . . . . 80
Question 1274; solution par M. Déprez . . . . . 61
Question 1160; solutions par MM. Déprez et Neuberg . . . . . 78
Question 767; solution par M. Emmerich . . . . . 101
Question 1090; solution par M. Quint . . . . . 104
Question 1293; solutions par MM. G. Gérard et Droz-Farny . . . . . 122
Question 415; solution par M. Stuyvaert . . . . . 141
Question 1048; solution par M. Emmerich . . . . . 144
Question 1279; solutions par MM. Emmerich et Déprez . . . . . 147
Question 1190; solution par M. Dogueldre . . . . . 166
Question 1257; solutions par MM E Cesáro, Emmerich . . . . . 167
Question 1299; solutions par MM. Soons, Emmerich, etc. . . . . 205
Question 13 8; solutions par MM. A. Gob, Droz Farny . . . . . 208
Question 1074; solution par M. A. Gob . . . . . 228
Question 1317; solutions par MM. Emmerich, Barisien . . . . . 235
Question 1290; solution par M. Emmerich . . . . . 260

## COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur deux lieux géométriques; par MM. Stuyvaert et Neuberg . . . . 51
Démonstrations du théorème de Lancret; par MM. Pirondini et Demoulin 92, 137
Théorèmes sur les cubiques; par M. Stuyvaert . . . . . 129
Sur la lemniscate de Bernoulli . . . . . 138
Sur la tétracuspidale de Bellavitis; par M. Teixeira . . . . . 217
Question 1262; solution par MM Emmerich, Andrien, etc. . . . . 23
Question 1294; solutions par MM. Emmerich et Boutin . . . . . 36
Question 1265; solution par MM. Emmerich, Déprez, etc . . . . . 59
Question 1289; solution par M. G. Gérard . . . . . 61
Question 1269; solution par MM. Emmerich, Déprez, etc.. . . . . 82
Question 1298; solution par MM. Emmerich, Andrien, etc. . . . . 86
Question 1080; solution par M. E. Duporcq . . . . . 103
Question 1273; solution par M. G. Gérard . . . . . 109
Question 1276; solution par MM. Barisien, Déprez, etc. . . . . 170
Question 1278; solution par M. Emmerich . . . . . 203
Question 1312; solution par M. Barisien . . . . . 234
Question 1088; solution par MM. Emmerich et Soons . . . . . 255
Question 1284; solution par MM. Déprez et Lez . . . . . 257
Question 1307; solution par M. A. Gob . . . . . 275

## CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Limite de $[(x^n - 1) : (x - 1)]$ pour $x = 1$; par M. Godefroy . . . . . 20
Sommation de quelques séries; par M. A. Boutin . . . . . 71
Sur deux familles de courbes; par M. E. N. Barisien . . . . . 153
Continuité de la fonction exponentielle composée; par M. H. Padé. . . 196
Sur certaines enveloppes; par M. E. N. Barisien . . . . . 246

Pages.

Question 1270; solution par M. Rose. Note par M. Neuberg . . . . . 108
Question 1291; solution par MM. Verheugen et G. Gérard . . . . . 126
Question 1260; solution par M. E. Cesàro . . . . . 169
Question 1315; solutions par MM. Emmerich, E. Cesàro, etc. . . . . 212
Question 1321; solution par M. G. Gérard . . . . . 262
Question 1305; solution par M. Stuyvaert. . . . . 273

## BIBLIOGRAPHIE ET BIOGRAPHIE; VARIÉTÉS.

Préface du tome XXI . . . . . 5
M. Cantor. Geschichte der Mathematik . . . . . 26, 250
E. Pascal. Repertorium der höheren Mathematik . . . . . 26
O. Schlömilch. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. . . 27
Cr. Alasia. La recente Geometria del Triangolo (J. N.) . . . . . 27
Annuaire du bureau des longitudes . . . . . 28
M. Brückner. Vielecke und Vielflache (J. N.) . . . . . 48
Finck. A Brief History of Mathematics (P. M.) . . . . . 49
H. Poincaré. Électricité et optique . . . . . 50
Föppl, Lorenz, Kubler, Gross, Heun. Ouvrages divers sur la mécanique appliquée . . . . . 74
P. Barbarin. Géométrie analytique non euclidienne (P. M.). . . . . 75
Fr. Schilling. Ueber die Nomographie . . . . . 76
Engel. Sophus Lie. . . . . 76
E. Lebon. Géométrie descriptive . . . . . 119
B. Lefèbvre. Exercices d'algèbre élémentaire . . . . . 120
C. Jordan et P. Mansion. Ch. Hermite . . . . . Supplément I, 1-47
E. Pascal. Déterminants (en italien et en allemand) (P. M.). . . . . 140
H. Laurent. L'élimination . . . . . 140
W. Ahrens. Mathematische Unterhaltungen und Spiele (P. M.) . . . 140
O. Carboni. Esercizi di Geometria elementare . . . . . 162
E Rouché Traité de géométrie (Cl S.) . . . . . 163
R. Heger. Logarithmische und goniometrische Tafeln (P. M.) . . . . 198
Z. de Galdeano. Critica y pedagogia matematicas. . . . . 199
M. Simon. Euclid (P. M.) . . . . . 199
H. Vogt. Éléments de mathématiques supérieures (J. N.) . . . . . 223
Eugène Beltrami (P. M.) . . . . . 247
Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. . . . . 249
F. Müller. Vocabulaire mathématique . . . . . 251
H. Suter. Die Mathematiker und Astronomen der Araber . . . . . 251
Lobatchévsky (tr. Mallieux). Nouveaux principes de la Géométrie (P. M.) 271

## QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 981-983; 984-986; 987-992; 993-1000; 1001-1007; 1008-1010; 1011-1015; 1016-1021; 1022-1027; 1028-1030 :
pp. 39, 62, 86, 110, 150, 175, 213, 238, 263, 280
École polytechnique de Paris. Concours de 1901. . . . . 150
Solution par M. Barisien. . . . . 252

## SUPPLÉMENTS.

I. Charles Hermite; par MM. C. Jordan et P. Mansion. . . . . p. 1-47
II. Sur un système d'équations du premier degré; par M. E. Gelin . p. 1-8

## QUESTIONS.

*Solutions de questions des deux premières séries.*

| | POSÉE | RÉSOLUE |
|---|---|---|
| | (1) V | |
| 415. | 46. | 141 |
| | (1) X | |
| 699. | 279. | 77 |
| | (2) II | |
| 767. | 108. | 101 |
| | (2) III | |
| 886. | 240. | 101 |
| | (2) IV | |
| ×989. | 263. | 52 |
| | (2) V | |
| 1030. | 176, 216 | 103 |
| 1048. | 250. | 144 |
| | (2) VI | |
| 1074. | 142. | 228 |
| ×1082. | 215. | 104 |
| 1088. | 216. | 255 |
| 1090. | 240. | 104 |
| | (2) VII | |
| ×1138. | 215. | 164 |

| | POSÉE | RÉSOLUE |
|---|---|---|
| | (2) VIII. | |
| 1160. | 56. | 78 |
| ×1184. | 216. | 56 |
| 1190. | 240. | 166 |
| | (2) IX | |
| ×1227. | 176. | 106 |
| ×1232. | 215. | 81 |
| | (2) X. | |
| ×1252. | 32. | 201 |
| ×1255. | 32. | 256 |
| 1257. | 56. | 167 |
| 1260. | 56. | 169 |
| ×1261. | 80. | 145 |
| 1262. | 80. | 28 |
| ×1263. | 80. | 146 |
| ×1264. | 80. | 120 |
| 1265. | 104. | 59 |
| ×1267. | 104. | 202 |
| 1269. | 128. | 82 |
| 1270. | 128. | 108 |
| 1278. | 152. | 109 |

| | POSÉE | RÉSOLUE |
|---|---|---|
| | (2) X | |
| 1274. | 152. | 60 |
| 1276. | 152. | 170 |
| 1278. | 176. | 203 |
| 1279. | 176. | 147 |
| 1280. | 176. | 230 |
| 1283. | 215. | 30 |
| 1284. | 216. | 257 |
| ×1285. | 216. | 33 |
| ×1286. | 216. | 234 |
| ×1288. | 216. | 35 |
| 1289. | 240. | 61 |
| 1290. | 240. | 260 |
| 1291. | 240. | 126 |
| 1293. | 264. | 122 |
| 1294. | 264. | 36 |
| ×1295. | 264. | 124 |
| 1296. | 264. | 148 |
| 1298. | 276. | 86 |
| 1299. | 276. | 205 |
| ×1300. | 276. | 207 |

*Questions posées, questions résolues et non résolues du tome I de la troisième série*(*).

| | POSÉE | RÉSOLUE |
|---|---|---|
| ×1301. | 40, 88 | 172 |
| ×1302. | 40 | |
| ×1303. | 40 | |
| 1304. | 40. | NR |
| 1305. | 40. | 273 |
| 1306. | 40 | |
| ×1307. | 64. | 275 |
| 1308. | 64. | 203 |
| ×1309 | 64 | |
| ×1310. | 64. | |
| 1311. | 88. | NR |
| 1312 | 88. | 234 |
| 1313. | 88. | NR |
| ×1314. | 88. | 210 |
| 1315 | 112. | 212 |
| 1316. | 112 | |
| 1317. | 112. | 235 |

| | POSÉE | RÉSOLUE |
|---|---|---|
| ×1318. | 112. | 173 |
| ×1319. | 128. | 236 |
| ×1320. | 128. | 278 |
| 1321. | 128. | 261 |
| ×1322. | 128. | 238 |
| 1323. | 152 | |
| 1324. | 152 | |
| ×1325. | 152 | |
| 1326. | 152 | |
| 1327. | 176. | NR |
| 1328. | 176 | |
| 1329. | 176 | |
| ×1330 | 176 | |
| 1331. | 214 | |
| 1332. | 215 | |
| ×1333. | 215 | |
| ×1334. | 215 | |

| | POSÉE | RÉSOLUE |
|---|---|---|
| 1335. | 216 | |
| 1336. | 216 | |
| 1337. | 216 | |
| 1338. | 216. | NR |
| ×1339. | 240 | |
| 1340. | 240 | |
| 1341. | 240 | |
| 1342. | 240 | |
| 1343. | 264. | NR |
| ×1344. | 264. | NR |
| ×1345. | 264 | |
| 1346. | 264. | NR |
| ×1347. | 280. | NR |
| 1348. | 280. | NR |
| ×1349. | 280. | NR |
| 1350. | 280. | NR |

(*) NR = Non résolue.

*Questions des deux premières séries résolues, mais non publiées.*

(I-X) 95, 353, 357, 597. (XI-XX) 882, 892bis, 953, 973, 986, 1033, 1044, 1046, 1057, 1079, 1087, 1101, 1107, 1162, 1167, 1177, 1183, 1194, 1229, 1244, 1275, 1282, 1287.

*Questions des deux premières séries non résolues.*

(I-X) 513, 598. (XI-XX) 778, 825, 876, 905, 1133, 1140, 1141, 1179, 1220, 1225, 1228, 1233, 1240, 1246, 1247, 1271, 1297.

---

# TABLE DES NOMS.


Abonné, 225.
Abraham, 249.
Absolonne, 230.
Ahrens, 140.
Alasia, 27, 137.
Alembert (d'), 249.
Amigues, 70.
Andrien, 28, 86, 205, 206.
Angitinus, 106.
Anonyme, 126
Apollonius, 160, 176.
Argand, 8
Aronhold, 245.
Artzt, 164.
Audibert, 167.
Baltzer, 47, 140.
Barbarin, 7, 75, 89, 177, 216.
Barisien, 7, 37, 59, 62, 83, 88, 101, 104, 111, 122, 126, 128, 152, 153, 170, 202, 204, 207, 212, 234, 235, 237, 246, 252, 260.
Baschwitz, 102.
Battaglini, 76, 163, 241.
Bauer, 118.
Bauschinger, 249.
Beha-Eddin, 251.
Bellavitis, 217.
Beltrami, 76, 247.
Beman, 49.
Bernoulli, 26, 88, 103, 108.
Bergmans, 7.
Bertrand (L ), 164.
Bessel, 47.
Betti, 200.
Bickmore, 256.
Bierens de Haan, 138.
Binder, 165.
Blondin, 50.
Bohlmann, 249.
Böklen, 272.
Bolyai, 47, 75, 76, 200, 248
Bortkiewitz (von), 249.
Boutin. 7, 56, 59, 71, 126, 146, 148, 212
Breithof (Fr ), 113, 131
Breton, 7, 226.
Brioschi, 7, 200, 247.
Brocard (G.), 23.
Brocard (H.), 7, 40, 64, 88, 101, 108, 109, 112, 164, 168, 169, 172, 193, 195, 205, 209, 235, 255.
Brounker, 26.
Bruckner, 48.
Brunhes, 50.
Burnside, 244.
Buysens, 56, 167
Cambier, 35.
Camerer, 200.
Cantor (M ), 26, 250.
Carboni, 162.
Cardoso-Laynes, 7, 59, 146.
Carnot, 199.
Catalan, 7, 224, 241, 270.
Cavallin, 7.
Cayley, 280.
Cazamian, 103, 120.
Cesàro (E.), 7, 40, 101, 126, 131, 167, 169, 213.
Cesàro (J.), 48.
Chasles, 164, 199.
Chomé, 7.
Clairant, 250.
Colart, 104, 172, 210, 212.
Cornu, 28
Cooney, 81.
Cournot, 199.
Cramer, 250.
Crelle, 47.
Cristesco, 7, 33, 35, 82, 211, 215.
Culmann, 8.
Czuber, 249.
Darboux, 243, 244.
Dauge, 7.
Deahna, 47.
Degueldre, 166.
Dellac, 47.
Demoulin, 7, 41, 137, 230.
Déprez, 7, 28, 33, 40, 44, 52, 59, 60, 61, 64, 78, 83, 86, 104, 122, 131, 145, 147, 167, 169, 170, 203, 205, 209, 255, 257, 261, 275, 278.
Dewulf, 7, 141.
Dienger, 264.
Droz Farny, 7, 22, 59, 60, 78, 104, 122, 164, 202, 206, 209, 277.
Duhamel, 47, 199.
Duporcq, 103, 120.
Duran y Loriga, 7.
Emmerich, 7, 24, 28, 33, 35, 37, 56, 59, 62, 64, 82, 83, 86, 87, 98, 101, 102, 104, 105, 111, 121, 125, 144, 145, 146, 147, 162, 164, 168, 172, 174, 202, 203, 205, 206, 210, 212, 233, 234, 235, 255, 256, 260, 275, 277.
Enestrom, 49.
Erb, 47.
Euclide, 89, 177, 199, 248.
Euler, 87, 141, 161, 241, 250.
Fagnano, 128.
Fauquembergue, 7.
Fazari(al), 251.
Ferrari, 244.
Feuerbach, 165.
Fibonacci, 98, 146.
Finck, 49.
Fontené, 7, 24, 124, 201, 207.
Föppl, 74.
Fouché, 163.
Fourier, 249.

François. 237, 238, 279.
Frenet, 27.
G. (H. D. B.), 33, 35.
Gasco, 199.
Galdaneo (de), 199.
Gauss, 47, 200, 225, 244, 249.
Gelin, 7, 137.
Gérard (G.), 59, 61, 109, 122, 126, 152, 170, 203, 214, 262.
Gérard (L.), 65, 76, 131.
Gerling, 47, 242.
Gerondal, 82.
Gilbert, 7.
Girard, 241.
Gob, 7, 87, 101, 209, 228, 234, 275.
Godefroy, 20.
Goedseels, 7.
Goering, 161.
Greenhill, 268.
Gregory, 26.
Gross, 74.
Grunert, 118, 128, 161, 175, 214, 240, 264, 278.
Gua (de), 250.
Günther, 7.
Habich, 7.
Hagen, 26.
Halley, 26.
Hamilton, 8, 141, 249.
Hartwich, 200.
Heger, 193.
Heiberg, 200.
Helmholtz, 50.
Henke, 27.
Hermite, 7, 103.
Hertz, 50.
Heun, 75.
Hilbert, 163.
Hopital (de l'), 26.
Jamet, 7.
Jerabeck, 7, 164.
Jonesco, 53.
Jordan, 49.
Kepler, 198.
Kiepert, 64, 81, 101, 169, 209.
Kirkman, 141
Klompers, 53.
Kool, 9, 47.
Kronecker, 7, 140.
Kubler, 75.
Kummer, 7.
Lacroix, 199.
Lagrandval, 76.
Lagrange, 249.
Laisant, 7, 217.
Lalisse, 77.
Lampe, 7.
Lancret, 92, 137.
Lange, 165.
Larmor, 50.
Laurent (H.), 140.
Lebon, 119.
Lefebvre, 120.
Leibniz, 26, 241, 250.
Leitzman, 140.
Lemoine, 7, 39, 40, 51, 64, 101, 112, 131, 145, 158, 163, 164, 167, 173, 176, 209, 215, 216, 240, 262.
Le Paige, 7.
Lez, 257.
Lie, 7, 76.
Lindemann, 163.
Lobatchefsky, 47, 76, 177, 200, 248, 271.
Longchamps (de), 7, 109, 164, 216.
Lorenz, 50, 75.
Loria, 7, 140.
Love, 259.
Lucas (Ed.), 7, 70, 77, 139, 140.
Maclaurin, 233, 250.
Malengreau, 197, 279.
Mallieux, 271.
Mandart, 7, 104, 164.
Mannheim, 119.
Mansion, 8, 48, 49, 65, 70, 76, 92, 112, 125, 140, 141, 198, 200, 208, 244, 250, 270, 271.
Mascheroni, 141.
Massau, 75.
Mathot, 25, 87.
Maxwell, 248, 250.
Mehmke, 249.
Mercator, 26.
Merlieux, 226.
Merlin, 58.
Mister, 7.
Möbius, 41.
Moivre (de), 26.
Monge, 8
Muir, 140.
Müller (Félix), 251.
Neculcéa, 50.
Neuberg, 8, 24, 36, 40, 51, 52, 53, 56, 60, 77, 81, 82, 84, 101, 109, 112, 121, 131, 139, 147, 151, 157, 159, 163, 166, 174, 202, 208, 210, 215, 216, 223, 226, 228, 233, 238, 241, 247, 260, 271, 278.
Newton, 26, 250.
Ocagne (d'), 7, 76.
Osborne, 101.
Padé, 196.
Pascal (E.), 26, 140.
Peano, 7.
Petit-Bois, 89, 212.
Peyrard, 200.
Pire, 124, 255, 279.
Pirondini, 7, 92, 137.
Plakhovo, 35, 106, 112, 234, 237.
Poincaré, 28, 50, 163.
Poinsot, 8.
Poncelet, 8, 163.
Poulain, 7.
Plücker, 41, 166.
Proclus, 200.
Prouhet, 280.
Quint. 105, 161.
Realis, 7.
Rebuffel, 189.
Retali, 7, 152, 170, 176, 205, 206, 211, 216, 240.
Reynaud, 47.
Ribaucour, 7.
Riemann, 8, 177, 247.
Ripert, 7, 88.
Rius y Casas, 190.
Rocquigny (de), 7, 69, 100, 203, 219.
Rose, 33, 35, 59, 108, 207.
Rosiu. 200.
Rouché, 159, 163.
Rouse Ball, 149.
Rutherford, 118.
Saccheri, 248, 250.
Salmon, 244.
Scheffler, 119.
Schepp, 26.
Schilling, 76.
Schlömilch, 27, 176.
Schoentjes, 7.
Schoute, 7, 216.
Schröter, 79, 120.
Schubert, 165.
Schur, 41.
Selivanof, 244, 249.
Serret (P.), 93.
Servais (Cl.), 7, 141, 164.
Seydewitz, 240.
Sidler, 13.
Simmons, 64, 210.
Simon (Max), 199.
Simson, 104 200, 239.
Smith, 7, 49.
Sollertinsky, 101, 228.
Soons, 104, 107, 110, 125, 148, 159, 166, 172, 207, 255, 257.

Sporer, 60.
Staudt (von), 164.
Stegmann, 242.
Steiner, 22. 78, 101, 131, 164, 167, 172, 280.
Strehlke, 223.
Studnička, 150.
Stuyvaert, 7, 30, 41, 52, 129, 141, 193, 240, 273.
Sundara, 141.
Suter, 251.
Sylvester, 7.
Tait, 141, 263.
Tannery (P.), 140, 251
Tarry, 7, 89, 131, 162, 191.
Tchebychef, 7.
Teixeira, 7, 217.
Terquem, 7.
Tilly (De), 7, 17, 47, 76, 92, 177, 189.
Tisserand, 27.
Vachtchenko-Zakhartschenko, 200.
Vallée-Poussin (de la), 7.
Van Aubel (H.), 7, 195.
Van Cauwenberghe, 212, 236
Vanderspeck, 33.
Verheugen, 86, 126, 148, 212, 275.
Verstraeten, 7.
Viète, 241.
Vigarié, 7.
Vogt, 226.
Voss, 44, 249.
Vuibert, 239.
Walker, 264.
Wallace, 200.
Wasteels (C. E.), 7, 65 94, 131, 154, 285.
Weber (H ), 249.
Weierstrass, 7.
Weill, 7, 23
Wendt (Cécile), 106.

# CHARLES HERMITE

(1822-1901)

NOTICE SUR SES TRAVAUX SCIENTIFIQUES

par M. C. JORDAN, Membre de l'Institut de France

ESQUISSE BIOGRAPHIQUE ET BIBLIOGRAPHIQUE

par M. P. MANSION, Professeur à l'Université de Gand

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands Augustins, 55
1901

Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, avril 1901.
2e série, tome XIX, pp. 353-396.

# CHARLES HERMITE

## (1822-1901)

A la séance du 14 janvier 1901 de l'Académie des Sciences de Paris, son Président, M. Fouqué, annonçant la mort de M. Hermite, décédé le jour même, s'exprima comme il suit :

« M. Hermite, doyen de la section de Géométrie, membre de l'Académie depuis 1856, était une des gloires de notre Compagnie. Tous ceux qui siègent ici comme géomètres s'honorent d'avoir été ses élèves ; tous sont pénétrés de reconnaissance pour l'appui généreux qu'il n'a cessé de leur montrer. Partout où la science est cultivée, partout le nom de M. Hermite était prononcé avec vénération. La perte, que nous déplorons, sera vivement ressentie par les correspondants si nombreux qu'il avait dans le monde entier et qui ne cessaient de faire appel chaque jour à ses conseils, à sa bienveillance inépuisable. Il appartenait à presque toutes les sociétés savantes du monde entier. Toutes, comme nous, se sentiront diminuées par sa mort (COMPTES RENDUS, t. CXXXII, pp. 49-50). »

La *Société scientifique de Bruxelles* s'est associée au deuil universel causé par cette mort. Elle a senti aussi cruellement qu'aucune autre association savante la perte qu'elle venait de faire. Le nom d'Hermite, avec ceux de Pasteur et de Le Play, était, en effet, le plus illustre qu'elle ait pu inscrire dans ses diptyques. Hermite, d'ailleurs, avait voué une sympathie particulière à la

*Société scientifique de Bruxelles :* il en avait été l'un des membres fondateurs, et nos ANNALES s'ouvrent par un Mémoire de lui, suggestif et plein d'idées comme tout ce qu'il a écrit.

Il est donc bien juste que la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES essaie de donner à ses lecteurs une idée de la féconde carrière du grand analyste, en esquissant d'abord sa vie *extérieure*, si j'ose ainsi dire ; puis, en faisant connaître ses travaux scientifiques, par l'intermédiaire d'une plume spécialement compétente.

## I

### ESQUISSE BIOGRAPHIQUE (1)

Charles Hermite est né, le 24 décembre 1822, en Lorraine, à Dieuze, chef-lieu de canton de l'arrondissement de Château-Salins (Meurthe), cédé à l'Allemagne à la suite de la guerre de 1870. Son enfance s'écoula à Nancy, où sa famille a longtemps habité et où demeurent encore, comme il le disait lui-même en 1892, « des parents affectionnés ».

Il fit ses études au collège de Nancy, puis au collège Henri IV à Paris, enfin au collège Louis-le-Grand. En 1841, il prit part au concours des collèges de Paris, pour le prix de mathématiques spéciales. Sa composition

(1) Les renseignements contenus dans cette esquisse biographique sont empruntés, textuellement autant que possible, aux discours de MM. Darboux et Poincaré lors du jubilé d'Hermite en 1892, à la notice de M. Jordan reproduite plus bas et publiée d'abord dans les COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS (21 janvier 1901, t. CXXXII, pp. 101-105), à celles de M. Painlevé, dans la NATURE (2 février 1901, t. XXIX, pp. 145-146) et de M. Appell, dans la REVUE DES SCIENCES PURES ET APPLIQUÉES (15 février 1901, t. XII, pp. 109-110) ; enfin aux articles nécrologiques du TEMPS et du COURRIER DE BRUXELLES. Nous les complétons au moyen de notes empruntées aux lettres de l'illustre géomètre qui, depuis plus d'un quart de siècle, voulait bien nous honorer de son amitié.

n'obtint que le premier accessit ; « mais les fines remarques qu'elle contenait nous ont été conservées, dit M. Darboux ; on s'étonne qu'elles ne lui aient pas assuré le succès, et elles demeurent ce qu'on a ajouté de plus ingénieux et de plus original au théorème de Descartes ».

Il entre à l'École Polytechnique en 1842. Durant toute sa vie, Catalan s'est honoré de l'avoir eu pour élève pendant l'année de préparation à l'examen d'entrée. Mais, d'après le témoignage de Terquem, c'est surtout Richard qui fut son professeur pendant cette année décisive, Richard qui, dès lors, disait de lui à son père : *C'est un petit Lagrange*. Quinze ans auparavant, Richard avait eu aussi pour élève le malheureux Galois (1811-1832). C'est de cette année de préparation à l'École Polytechnique que date le premier mémoire d'Hermite ; il y démontre à sa manière le célèbre théorème d'Abel sur l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation du cinquième degré. Le mémoire d'Abel sur le même sujet avait été écrit en français, mais publié en allemand par Crelle ; il n'était alors connu en France que par un résumé du BULLETIN DE FERUSSAC (1).

Dès sa première année à l'École Polytechnique, Hermite, à peine âgé de vingt ans, « entrait en correspondance avec l'illustre Jacobi (janvier 1843) et se plaçait immédiatement, par une lettre de quelques pages, sur le même rang que les meilleurs analystes de l'Europe » (DARBOUX). La lettre contenait les principes de la division des fonctions hyperelliptiques. La même année, il présentait à l'Académie des Sciences de Paris un mémoire contenant la théorie de la transformation de ces transcen-

(1) Hermite, à cette époque, ne savait pas l'allemand (voir sa troisième lettre à Jacobi, sur la théorie des nombres, dans CRELLE, XL, p. 291, ou dans les MATHEMATISCHE WERKE de Jacobi, II, p. 251). L'édition française des OEuvres d'Abel avait bien paru à Christiana, en 1839, mais elle était inconnue en France ; en 1842 encore, Terquem parlait de traduire de l'allemand le mémoire d'Abel sur l'équation du cinquième degré.

dantes nouvelles, alors à peine connues des plus savants géomètres.

Chateaubriand et bien d'autres littérateurs, avant et après lui, ont célébré la précocité légendaire du génie mathématique de Pascal sans jamais d'ailleurs en donner des preuves authentiques (1). Pour Hermite, au contraire, comme pour Lagrange, Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi et Galois, la précocité est patente. Jacobi publia presque immédiatement sa correspondance avec Hermite, dans le JOURNAL DE CRELLE, puis dans le recueil de ses œuvres.

Hermite, à sa sortie de l'École Polytechnique, résolut de se consacrer tout entier à l'étude de l'analyse mathématique. Vingt années s'écoulèrent, vingt années de méditations solitaires consacrées à de profondes recherches sur ces sommets élevés de la science où règne le nombre pur : l'analyse infinitésimale, l'algèbre et l'arithmétique supérieure (POINCARÉ). Il y eut des moments où sa santé en fut ébranlée, comme il le dit dans une de ses lettres à Jacobi. Mais c'est pendant ces années fécondes, qu'il crée la théorie des formes algébriques avec Sylvester et Cayley, qu'il découvre la véritable nature des équations modulaires, qu'il rattache le problème du nombre des classes à la théorie des fonctions elliptiques ; c'est alors enfin qu'il résout au moyen de ces transcendantes l'équation du cinquième degré. C'est surtout dans les travaux arithmétiques de cette période que, d'après M. Picard, se montra le génie d'Hermite : sa puissance d'invention, dans des sujets aussi nouveaux et aussi difficiles, y est prodigieuse.

L'Institut de France ne pouvait manquer d'ouvrir ses portes à un aussi profond géomètre. Le 14 juillet 1856, Hermite fut élu membre de l'Académie des Sciences, à la place de Binet, par 40 suffrages sur 48 : Puiseux en avait recueilli 4, Serret 3. « De 1851 à 1859, l'Europe

(1) On sait d'ailleurs que Pascal n'a pas fait de découverte mathématique capitale comme Descartes ou Fermat, Newton ou Leibniz.

savante eut la douleur de perdre les quatre grands géomètres qui avaient illustré l'âge précédent, Gauss, Cauchy, Jacobi et Dirichlet. » Personne, sauf Hermite lui-même, ne soupçonnait alors la profondeur des travaux de Weierstrass et de Riemann sur les fonctions abéliennes, de Kronecker et de Smith sur les mystérieuses relations des nombres avec les fonctions elliptiques. Hermite, d'ailleurs, les avait devancés dans ces divers domaines de recherches. « Le sceptre de l'arithmétique supérieure et de l'analyse passa donc d'une manière incontestée des mains de Gauss et de Cauchy dans celles d'Hermite et il le conserva jusqu'à son dernier jour, malgré les admirables découvertes d'émules et de disciples dont les écrits ont fait pâlir l'éclat des plus brillants travaux, les siens exceptés. »

En 1862, à l'âge de quarante ans, Hermite entra enfin dans la carrière de l'enseignement : grâce à l'initiative de Pasteur, une place de Maître de conférences fut créée pour lui à l'École normale supérieure. Il l'occupa jusqu'en 1869, époque où il devint professeur d'Algèbre Supérieure à la Sorbonne (Faculté des Sciences) en remplacement de Duhamel.

En 1848, il avait été nommé Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique (1); en 1863, Examinateur de sortie et de classement à cette grande École. En 1869, il y succéda à Duhamel encore, comme Professeur d'Analyse.

La première partie du cours d'Hermite à l'École Polytechnique fut publiée par lui en 1873 ; la seconde a été maintes fois autographiée pour ses élèves. Dans ces leçons imprimées ou autographiées, on rencontre une foule d'échappées sur les parties les plus élevées de la science,

(1) « Comme examinateur, nous écrit un ami, Hermite a laissé un souvenir ineffaçable : choix des questions, patience, sûreté de jugement, tout en lui était admirable ; car ce grand mathématicien était en même temps une grande conscience. »

résumés ou germes de mémoires publiés plus tard par l'auteur.

En 1876, Hermite abandonna sa chaire de l'École Polytechnique, pour se consacrer de plus en plus à son cours de la Sorbonne. « Ce cours, dit M. Appell, a répandu partout sous une forme saisissante, les découvertes de Weierstrass et de ses élèves sur la théorie des fonctions : par des exemples choisis pour l'application des théorèmes généraux de cette théorie, Hermite a renouvelé l'étude des fonctions elliptiques et des fonctions eulériennes. »

« Au lieu de s'attacher étroitement comme l'illustre analyste allemand, dit à son tour M. Painlevé, à l'unique méthode des séries entières, Hermite a fait appel à toutes les ressources des méthodes de Cauchy, donnant ainsi à la doctrine une brièveté et une élégance incomparables. C'est dans le cours autographié d'Hermite, remanié à fond chaque année, que toute la jeune école des mathématiciens français a appris l'analyse. »

Ce ne fut qu'en 1897, « à l'âge de soixante-quinze ans, qu'Hermite quitta ses fonctions de professeur à la Sorbonne, malgré les instances de M. le Directeur de l'Enseignement supérieur et des professeurs de la Faculté des Sciences ».

« L'admiration est la source du savoir », disait souvent l'illustre géomètre. Cette admiration il savait la provoquer au plus haut point dans ses leçons. « Ceux qui ont eu l'heureuse fortune d'être ses élèves ne sauraient oublier l'accent presque religieux de son enseignement, le frisson de beauté ou de mystère qu'il faisait passer à travers son auditoire devant quelque admirable découverte ou devant l'inconnu. Hermite fut un professeur incomparable : sa parole saisissante ouvrait brusquement de larges horizons sur les régions inexplorées de la science ; elle suggérait à la curiosité et à l'invention les problèmes nouveaux et essentiels ; mais surtout elle communiquait l'amour et le respect des idéales vérités. Dans l'inoubliable journée de

son jubilé, en accueillant l'hommage d'admiration de tous les pays civilisés, l'illustre analyste parla, en termes pleins de noblesse, de la corrélation étroite et secrète qui existe « entre le sentiment absolu de la justice et du devoir et « l'intelligence des vérités absolues de la géométrie ». Cette corrélation semblait évidente quand on écoutait ses leçons (PAINLEVÉ). »

« J'en appelle à ceux qui ont suivi les cours de M. Hermite. Lorsque, les yeux brillants, la voix émue, comme un poète, un voyant, il parlait des fonctions, on sentait qu'elles existaient pour lui, qu'il les voyait, qu'il les admirait vraiment. A sa suite, on pénétrait un peu plus avant dans la pensée de Celui qui a tout disposé suivant des nombres et des mesures; l'enthousiasme de ce maître incomparable se communiquait à ses auditeurs, à qui il arrivait de s'oublier et d'applaudir (PAUTONNIER). »

Pendant les trente-cinq années de son laborieux professorat et au delà même, jusqu'à son dernier jour, on peut le dire, Hermite ne cessa de travailler et d'écrire d'admirables mémoires mathématiques, on peut le voir plus bas dans la notice de M. Jordan et dans la bibliographie qui la suit; ce n'est pas le lieu ici d'en parler avec plus de détails, mais nous ne pouvons résister au plaisir de citer au moins quelques lignes de M. Painlevé, consacrées au célèbre Mémoire du grand géomètre *Sur la fonction exponentielle* (1873), parce qu'elles font entrevoir, même aux profanes, la difficulté de la question qui y est résolue : « La découverte d'Hermite qui surpasse toutes les autres, c'est la démonstration de la *transcendance* du nombre *e*, démonstration qui, à peine modifiée, entraîne la transcendance du nombre $\pi$, c'est-à-dire l'impossibilité du fameux problème de la *quadrature du cercle*. Les nombres algébriques (nombres définis par une relation algébrique à coefficients rationnels) forment une classe si dense qu'il semblait presque impossible de trouver un critérium assez subtil pour permettre de discerner si un nombre

tel que $e$ ou $\pi$ est algébrique ou transcendant. Ce critérium, c'est dans la théorie généralisée des fractions continues qu'Hermite a su le découvrir, et sa méthode sera admirée tant que des hommes existeront capables de comprendre la notion de nombre. »

En 1892, le 24 décembre, les élèves, les admirateurs d'Hermite, disons mieux, les mathématiciens du monde entier, célébrèrent le soixante-dixième anniversaire de sa naissance dans une fête dont la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES a rendu compte (janvier 1893, t. XXXIII, pp. 235-247). On lui offrit à cette occasion une médaille de grand module, œuvre de Chaplain, membre de l'Institut de France. Elle mesure environ 10 centimètres de diamètre. Au revers, on trouve une palme avec l'inscription : A | CHARLES . HERMITE | M^BRE DE . L'INSTITUT | PROFESSEUR . D'ALGÈBRE | SUPÉRIEURE | A . LA . FACULTÉ . DES SCIENCES | SES . ÉLÈVES . SES . ADMIRATEURS | SES . AMIS | EN . SOUVENIR | DE . SON . 70^MR . ANNIVERSAIRE | 24 . DÉCEMBRE . 1892 | — | SOUSCRIPTION | INTERNATIONALE. Sur la face, Hermite est représenté de profil : « La figure est puissamment expressive, au front génial, aux yeux profonds, comme fixés sur un monde mystérieux, invisible aux profanes. » Une inscription entoure le profil : CHARLES . HERMITE . DE . L'ACADÉMIE . DES . SCIENCES ; à côté, se trouve la signature de l'artiste.

A cette époque, Hermite, en dépit de son extrême modestie et de l'éloignement voulu où il se tenait du monde, avait conquis les suffrages et les respects de tous, Français et étrangers, tant par sa haute science que par sa bonté et son affabilité. Au Congrès mathématique de Zurich (1897), comme à celui de Paris (1900), il fut nommé par acclamation Président d'honneur.

Comme nous l'avons dit, il était membre de l'Académie des Sciences de Paris, depuis 1856. En outre, il était associé étranger ou membre honoraire des Académies des sciences de Berlin, de Munich, de la Société royale de

Gœttingue, de la Société physico-médicale d'Erlangen, de l'Académie hongroise des sciences de Budapest, de la Société royale des sciences de Prague, de la Société royale et de la Société mathématique de Londres, de l'Académie des sciences de Dublin, de la Société royale d'Edimbourg, de la Société philosophique et littéraire de Manchester, de l'Académie américaine des sciences et arts de Boston, de la Société scientifique Antonio Alzate de Mexico, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, de l'Académie royale des Lincei, des Académies des sciences de Turin, Naples, de la Société italienne des XL, de l'Académie des sciences de l'Institut de Bologne, de l'Académie royale et du Cercle mathématique de Palerme, des Académies des sciences de Stockholm, de Copenhague, de Bruxelles, de la Société scientifique de Bruxelles, de la Société royale des sciences de Liége, de la Société royale des sciences d'Upsal, de la Société hollandaise des sciences de Harlem, de la Société des sciences d'Helsingfors, de l'Académie des sciences d'Amsterdam, de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, de l'Académie Stanislas à Nancy, etc., etc.

Lors de son jubilé, il fut nommé Grand-Officier de la Légion d'honneur, Grand'Croix de l'Ordre de l'Étoile polaire de Suède. Il était aussi Chevalier de l'Ordre du Mérite Civil de Prusse, Grand-Officier de l'Ordre des Saints Maurice et Lazare et Commandeur de l'Ordre du Sauveur de Grèce ; etc.

Comme on le voit, les dix dernières années de la vie d'Hermite lui apportèrent, comme par surcroit, une gloire qu'il n'avait jamais recherchée. Mais ce fut alors aussi qu'il eut la douleur de voir disparaître peu à peu tous les grands mathématiciens dont il avait été l'ami et l'heureux émule : Kronecker (1823-1891), Kummer (1810-1893), Tchebychef (1821-1894), Cayley (1821-1895), Weierstrass (1815-1897), Sylvester (1814-1897), Brioschi (1824-1897), enfin son beau-frère, Joseph Bertrand (1822-1900), à la

fois membre de l'Académie des sciences et de l'Académie française. Il écrivit sur la plupart d'entre eux des notices scientifiques où leurs recherches sont appréciées de main de maître. Si l'on joint à ces notices celles qu'il a consacrées à Bouquet, à Halphen et à Rosenhain, puis son discours à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne (où il donne un aperçu des travaux de Lacroix, Francœur, Biot, Lagrange, Fourier, Sturm, Poncelet, Delaunay, Le Verrier, Lamé, Liouville, Serret, Duhamel, Chasles, Cauchy, Puiseux, Briot et Bouquet), son allocution comme Président de l'Académie en 1889, enfin deux préfaces où il caractérise admirablement l'œuvre de Riemann, on aura une esquisse à la fois brillante et solide d'une grande partie de l'histoire de l'analyse au XIX^e^ siècle : il n'y manque que l'indication de ses propres travaux et ceux de la brillante pléiade de jeunes analystes qui ont illustré la fin du siècle.

Hermite est mort à Paris, le 14 janvier 1901, consolé à ses derniers moments par les secours de la Religion.

Sa perte a été vivement ressentie dans le monde savant et ses disciples, devenus depuis longtemps ses confrères à l'Institut, se sont plu à célébrer sa mémoire. « Il laisse pour l'histoire, dit M. Appell, un nom impérissable et pour tous ceux qui ont eu le bonheur de l'approcher, le souvenir d'un homme aussi grand par le cœur que par l'intelligence. Spiritualiste convaincu, il pensait que l'âme aurait un jour la révélation complète de ces harmonies mathématiques dont le reflet seul est accessible à l'intelligence humaine. »

« Son influence sur le mouvement mathématique du XIX^e^ siècle a été capitale, non seulement par ses découvertes et ses publications, mais par l'exemple de sa vie entièrement consacrée à la science, par les conseils personnels et directs qu'il ne refusait à aucun chercheur, par les idées et les encouragements bienveillants qu'il donnait à ses élèves en pénétrant dans leurs vues plus loin qu'ils

ne faisaient eux-mêmes. Cette influence s'étendit au monde entier et la correspondance mathématique d'Hermite, si elle pouvait être recueillie et publiée, constituerait comme le tableau de la vie mathématique des soixante dernières années (APPELL). »

« Accueillant avec bienveillance toutes les communications, répondant à tous, au plus humble comme au plus illustre, sans mesurer son temps ni sa peine, que de fois il a su répandre d'une main libérale, et sans rien réclamer pour lui-même, ces indications géniales, qui, communiquées à un esprit bien doué, peuvent l'éclairer subitement, lui faire franchir le pas difficile et lui inspirer une longue suite de travaux (DARBOUX). »

« Avec M. Hermite, dit à son tour M. Painlevé, disparaît une des gloires les plus pures qui aient jamais illustré la science française. M. Hermite ne fut pas seulement un des plus grands mathématiciens du dernier siècle : sa vie fut un exemple ; personne n'a poussé plus loin l'amour désintéressé de la science, le dédain de la notoriété. Les sévères régions de la pensée dont il avait fait son domaine, leurs harmonieuses et rigides beautés, les lois rigoureuses et éternelles qui les régissent lui avaient donné des joies trop hautes pour qu'il pût condescendre encore aux soucis dont s'agitent la plupart des hommes. A ce puissant génie visionnaire, le mystérieux univers du nombre n'apparaissait pas comme dépourvu d'existence objective, mais bien comme une sorte d'armature immatérielle et inflexible de l'univers réel dont elle contient les dérèglements. »

M. E. Gautier a apprécié à un point de vue moins spécial le caractère du grand mathématicien. Les travaux d'Hermite, dit-il en substance, ne sont pas de ceux qui passionnent les foules. Ce n'est donc pas à son œuvre qu'il devait cette espèce de pontificat intellectuel et moral qui ne se discutait nulle part. C'est à l'élévation de son esprit, à la splendeur de son génie ; c'est à la noblesse véritablement antique de ce caractère, mélange exquis de sagesse

sereine, de grandeur d'âme et de bonté, qui faisait de Charles Hermite le type, par excellence, de ce que la piété populaire appelle « un saint ». Un saint, il le fut à la fois dans le sens philosophique et dans le sens ordinaire du mot ; car depuis le jour où, en 1856, il trouva son chemin de Damas (1), la ferveur de ses sentiments religieux ne s'est jamais attiédie.

Que pouvons-nous ajouter à tous ces témoignages ? Un mot peut-être. Ceux qui ont eu l'honneur et le bonheur de pénétrer dans l'intimité d'Hermite nous disent qu'il n'était pas simplement un grand analyste confiné dans sa spécialité : il suivait d'un œil attentif, trop attristé peut-être, tous les grands mouvements du monde, au point de vue religieux et social ; son esprit était ouvert à toutes les activités de l'intelligence humaine.

Nous le savions à la *Société scientifique de Bruxelles*. Dès 1877, il s'était vivement intéressé à notre Revue, il félicitait notre regretté secrétaire général et ses collaborateurs de leurs articles si solides et si appropriés aux besoins intellectuels de notre temps. L'apologétique oratoire, esthétique ou philosophique abstraite, disait-il, n'atteint plus les esprits habitués au raisonnement scientifique. Parlant de la même Revue, il nous écrivait quinze ans plus tard, qu'il se délassait de son labeur d'algébriste en s'y initiant aux progrès de la géologie, de la paléontologie, de la zoologie, de la physiologie, etc. Il louait en même temps la modération de la Revue dans la discussion des opinions des adversaires de nos croyances, ces croyances qu'il se sentait si heureux, disait-il, de partager avec nous.

Restons-en sur ces belles paroles et résumons-nous : Émule de Kummer, de Kronecker, de Smith dans la théorie des nombres, de Cayley et de Sylvester en inva-

(1) Grâce à la charité de la sœur qui le soigna alors dans une maladie grave, grâce aussi sans doute à l'influence de Cauchy (d'après le témoignage d'un contemporain).

riantologie, de Kronecker et de Brioschi dans la résolution des équations par les transcendantes, de Tchebychef dans l'approximation des fonctions ; devancier de Weierstrass et de Riemann dans la théorie des fonctions abéliennes ; précurseur des jeunes géomètres contemporains dans l'étude des fonctions automorphes et de la transcendance des nombres, Hermite fut vraiment un mathématicien de génie. Mais il fut, de plus, un professeur éminent, un homme modeste, bon et serviable, un chrétien fervent, sans peur et sans ostentation. « Heureux, dit Pasteur, celui qui porte en soi un Dieu, un idéal de beauté et qui lui obéit : idéal de l'art, idéal de la science, idéal de la patrie, idéal des vertus de l'Évangile. » Hermite a été de ceux-là, grand par l'intelligence et par le cœur, par le caractère et par la Foi : il a porté en soi un double idéal, l'idéal de la science et l'idéal des vertus de l'Évangile, il y a été fidèle.

P. Mansion.

Gand, 7 mars 1901.

## II

### NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE CH. HERMITE

L'École mathématique française vient de perdre, en la personne de M. Hermite, son chef et son maître.

Il serait assurément téméraire de vouloir analyser a la hâte et sous le coup de la première émotion la longue suite de ses travaux, qui a jeté tant d'éclat sur toute la seconde moitié du XIX^e^ siècle. Une pareille entreprise demande plus de temps et un esprit plus calme. Nous nous bornerons donc, en adressant à notre vénéré Confrère le suprême adieu que sa modestie nous a interdit de prononcer sur sa tombe, à indiquer à grands traits, autant que notre mémoire nous le permettra, quelques-unes des découvertes dont nous lui sommes redevables.

En 1843, M. Hermite, âgé de vingt ans, venait d'entrer à l'École Polytechnique. Sur le conseil de Liouville, il écrivit à Jacobi pour lui communiquer les résultats qu'il venait d'obtenir pour la division des fonctions abéliennes, alors à peine connues. L'illustre géomètre allemand, qui s'occupait à cette époque de l'édition de ses Œuvres, n'hésita pas à y faire figurer, à côté de ses propres travaux, la lettre de son jeune correspondant.

Il lui écrivait, un peu plus tard : « Ne soyez pas fâché, Monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre. »

La prédiction du grand géomètre ne devait pas tarder à se vérifier.

Dans les quatre lettres qui suivent et que Jacobi nous a également conservées, M. Hermite s'était proposé tout d'abord de généraliser la théorie des fonctions continues; mais il se trouva bientôt amené aux problèmes plus vastes de la théorie arithmétique des formes, où il ne tarda pas à obtenir d'admirables résultats.

Dès le début de ses travaux, il indique plusieurs méthodes pour réduire les formes quadratiques à un nombre quelconque d'indéterminées. Un peu plus tard, l'introduction des variables continues dans la théorie l'amène à découvrir des vérités plus cachées.

Il donne la solution complète du problème de l'équivalence arithmétique des formes quadratiques générales ou des formes décomposables en facteurs linéaires; il détermine les transformations de ces formes en elles-mêmes ; il démontre, par une voie toute nouvelle et purement arithmétique, les théorèmes célèbres de Sturm et de Cauchy sur la séparation des racines des équations algébriques. Il introduit la notion féconde des formes quadratiques à variables conjuguées et déduit de leur théorie

une nouvelle démonstration des beaux théorèmes de Jacobi sur le nombre des décompositions d'un nombre en quatre carrés.

Il arrive enfin à cette merveilleuse proposition que les racines des équations algébriques à coefficients entiers et d'un même discriminant s'expriment par un nombre limité d'irrationnelles distinctes.

L'étude algébrique des formes est également l'objet de ses méditations. La notion des invariants qui domine cette théorie était restée un peu confuse, jusqu'au jour où M. Cayley la mit en pleine lumière dans un Mémoire célèbre daté de 1845. MM. Cayley, Sylvester et Hermite se partagèrent le nouveau domaine qui venait de leur être ouvert.

Leurs travaux sont tellement entrelacés dans cette rivalité fraternelle qu'il serait difficile et à peine désirable de préciser exactement la part de chacun d'eux dans l'œuvre commune. Il semble toutefois que l'on puisse attribuer spécialement à M. Hermite la loi de réciprocité, la découverte des covariants associés, celle des invariants gauches, et la formation du système complet des covariants des formes cubiques et biquadratiques et des invariants de la forme du cinquième ordre.

Ces importantes recherches d'Arithmétique et d'Algèbre ne suffisaient pas à son activité ; il poursuivait en même temps ses études sur les transcendantes ; dans une série de recherches mémorables, il résolvait le problème de la transformation des fonctions hyperelliptiques, et des développements en série des fonctions elliptiques il déduisait des formules importantes relatives au nombre des classes des formes quadratiques.

Il posait en même temps les bases de la théorie des fonctions modulaires et résolvait jusque dans ses détails la question si difficile de leur transformation, donnant ainsi longtemps d'avance un modèle à ceux qui devaient de nos jours reprendre et généraliser cette théorie.

L'impression produite sur les géomètres par l'ensemble de ces travaux se résume assez bien dans ce mot pittoresque que nous avons recueilli jadis de la bouche de M. Lamé : « En lisant les Mémoires d'Hermite, on a la » chair de poule. »

En 1856, à l'âge de trente-quatre ans, M. Hermite entrait à l'Institut ; en 1862, on créait pour lui une chaire à l'École Normale ; peu après il devint également professeur à l'École Polytechnique et à la Sorbonne.

A cette époque, l'enseignement supérieur était, il faut bien le dire, un peu arriéré. Les grandes découvertes par lesquelles Gauss, Abel, Jacobi, Cauchy avaient transformé la science pendant un demi-siècle étaient passées sous silence, comme si elles n'intéressaient que de rares initiés. M. Hermite les jeta hardiment dans le domaine public. Cette heureuse audace a porté ses fruits : témoin notre jeune et brillante école de géomètres. Tous furent des élèves d'Hermite et doivent à ses leçons, à ses bienveillants encouragements une grande part de leurs succès.

Cette royauté pacifique ne s'arrêtait pas à nos frontières : M. Hermite entretenait des correspondances dans toute l'Europe savante, et partout les jeunes talents pouvaient compter sur ses conseils et sur son appui.

Mais ni les devoirs de son enseignement, ni même les atteintes de l'âge ne purent porter préjudice à la fécondité de son esprit. De cette seconde période datent, en effet, un grand nombre de beaux travaux qui ne le cèdent en rien aux œuvres de sa jeunesse.

Une évolution sensible se produit pourtant dans l'objet de ses recherches. L'Arithmétique et l'Algèbre, prédominantes jusque-là, vont céder le pas au Calcul intégral.

La transition se fait par un Mémoire célèbre sur l'équation du cinquième degré, dont il donne la résolution par les fonctions elliptiques.

Puis viennent les recherches sur l'interpolation, sur de nouveaux modes de développement des fonctions en

séries de polynomes, sur les discontinuités des intégrales définies qui dépendent d'un paramètre, etc.

Dans la théorie des fonctions elliptiques, M. Hermite découvre une formule fondamentale qui permet de les décomposer en éléments simples et, par suite, de les intégrer. Il étudie, le premier, les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

Nous arrivons enfin au Mémoire sur la fonction exponentielle, digne couronnement de ses longues recherches sur les développements en fractions continues. Il y fait voir que le nombre $e$ est transcendant. M. Lindemann a reconnu depuis que le nombre $\pi$ l'est également. Le problème de la quadrature du cercle, si vainement cherché pendant tant de siècles, est donc démontré impossible.

On peut légitimement revendiquer pour M. Hermite une part dans ce beau résultat, car il a été obtenu en imitant la marche qu'il avait suivie pour l'exponentielle. Or, on se ferait une idée bien incomplète du rôle des grands esprits en les mesurant exclusivement sur les vérités nouvelles qu'ils ont énoncées explicitement. Les méthodes qu'ils ont léguées à leurs successeurs, en leur laissant le soin de les appliquer à de nouveaux problèmes qu'eux-mêmes ne prévoyaient peut-être pas, constituent une autre part de leur gloire et parfois la principale, comme le montre l'exemple de Leibnitz.

Depuis bientôt un siècle nous travaillons à développer les germes féconds que Gauss et Cauchy ont semés dans leurs écrits ; il en sera de même pour Hermite. Voici deux nouveaux exemples qui le prouvent :

Le groupe remarquable de substitutions qu'il a rencontré dans ses recherches sur la transformation des fonctions abéliennes sert d'élément essentiel à la solution d'un problème tout différent, celui de la résolution des équations par radicaux. Il apparaît encore dans la discussion de la seconde variation des intégrales définies.

Les formes quadratiques à variables conjuguées sont

le fondement indispensable des recherches sur la réduction des formes les plus générales, à coefficients réels ou complexes.

M. Hermite aimait la science pour elle-même et ne se préoccupait guère des applications ; elles sont venues spontanément et par surcroît. A l'équation de Lamé, dont l'intégration constitue le dernier de ses grands travaux, il a rattaché toute une série de problèmes de Mécanique : rotation d'un solide ; détermination de la courbe élastique ; oscillations du pendule conique.

Pour se faire une idée exacte de la place que M. Hermite occupait dans le monde mathématique, il faut avoir assisté comme nous aux fêtes inoubliables de son jubilé en 1892. Tous ses amis, ses disciples, ses admirateurs s'étaient donné rendez-vous à cette touchante cérémonie ; toutes les Sociétés savantes de l'Europe avaient envoyé des adresses ou des délégués.

La même année a vu le jubilé de Pasteur. Aujourd'hui Pasteur et Hermite ne sont plus : il ne nous reste que le souvenir de leurs exemples et leurs ouvrages, mais ceux-ci suffisent à éterniser leur mémoire.

Que l'on nous permette, en terminant, d'exprimer un vœu au nom de la Section de Géométrie. L'œuvre d'Hermite est fort éparpillée ; en dehors des principaux Mémoires, elle contient beaucoup de lettres ou notes concises dispersées çà et là, mais qui portent toutes la griffe du lion. L'Académie s'honorerait et rendrait un grand service aux géomètres en entreprenant la publication des Œuvres complètes de Charles Hermite (1).

C. JORDAN,
membre de l'Institut de France.

(1) Conformément au vœu exprimé par M. Jordan, les œuvres d'Hermite vont être publiées chez Gauthier-Villars, mais par les soins de la famille, sous la direction de M. E. Picard, gendre de l'illustre géomètre. M. Picard a publié, dans les ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1901, 3e série, t. XVIII) une leçon faite à la Sorbonne, le 2 mars 1901, sous le titre : *L'Œuvre scientifique de Charles Hermite* (26 p. in 4).

## Liste des Ouvrages, Mémoires et Notes de Charles Hermite

Dans la liste des Ouvrages, Mémoires et Notes du grand géomètre, nous avons suivi autant que possible l'ordre chronologique de *publication*, mais en signalant l'année même où l'écrit a été composé, lorsque cela présente de l'intérêt (voir p. ex. II, n° 9).

Nous avons fait suivre le titre d'un grand nombre de ces mémoires d'une courte indication de ce qu'ils contiennent. Beaucoup de ces analyses sommaires sont empruntées, après 1868, au *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* ; avant 1868, nous avons examiné les mémoires eux-mêmes, mais, faute de compétence suffisante, nous ne sommes pas certain d'avoir toujours signalé le point essentiel de chacun des écrits du grand analyste, ni même d'avoir toujours été exact. Dans ce tirage à part, nous avons pu réparer quelques omissions, grâce à la bibliographie moins précise, mais très complète, publiée par M. G. Loria, dans son *Bollettino*, 1901, pp. 20-31.

P. Mansion

**Abréviations.** AM = *Acta mathematica.*
AJM = *American Journal of Mathematics.*
CR = *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.*
*Crelle* = *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, publié d'abord par Crelle, puis par Borchardt, etc.
*Darboux* = *Bulletin des sciences mathématiques* etc., rédigé par G. Darboux, etc.
*Liouville* = *Journal de mathématiques pures et appliquées*, publié d'abord par Liouville, ensuite par Résal, et enfin par Jordan.
NAM = *Nouvelles Annales de Mathématiques.*
NAM, (3), IV, 191-193 = *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, 4e volume, pages 191 à 193.

# I

## OUVRAGES, NOTES, PRÉFACES, DISCOURS

### 1. Note sur la théorie des fonctions elliptiques.

Publié en appendice à la sixième édition (1862) du *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul integral* de Lacroix et dans les éditions suivantes. Dans la neuvième édition elle occupe les pages 365 à 491 (Paris, Gauthier-Villars, 1881). Cette même note, *complétée et remaniée*, a paru sous le même titre, dans le *Cours de Calcul différentiel et intégral*, de J. A. SERRET, quatrième édition (1894) et cinquième édition (1900), t. II, pp. 735 904.

Elle a été traduite en allemand sous le titre : *Uebersicht der elliptischen Funktionen von C. Hermite*. Aus dem Französischen übertragen und mit einem Anhange versehen von Leopold Natani. Berlin, 1865. Verlag von Wiegandt und Hempel (VI-143 p. in-8°).

On trouve, dans cet opuscule d'apparence élémentaire, une foule de vues nouvelles ou peu connues à cette époque, ainsi que des aperçus sur les parties les plus élevées de la science, entre autres sur les recherches de Cauchy relativement aux intégrales définies entre limites imaginaires, de Puiseux sur les fonctions algébriques, de Weierstrass et de Riemann sur les fonctions abéliennes. Cfr. CAUCHY et LIOUVILLE, CR, 1851, XXXII. 442-452.

### 2. Notes. I. Sur les invariants des formes du cinquième degré. II. Sur l'invariant gauche des formes du sixième degré (pp. 237-247 des *Leçons d'algèbre supérieure* par G. Salmon, traduit de l'anglais par M. Bazin. Paris, Gauthier-Villars, 1868).

Ces notes sont extraites des recherches d'Hermite sur l'équation du cinquième degré.

### 3. Cours d'analyse de l'École polytechnique. Première partie, Paris, Gauthier-Villars, 1873 (Un vol. in-8° de VIII-2-455 pages).

Nous en avons publié une analyse complète dans le *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze mathematiche e fisiche* de Boncompagni, livraison de septembre 1873, t. VI, pp. 387-434, ou en une brochure in-8° de 80 pages (Paris, Gauthier-Villars, 1874).

### 4. Cours d'analyse (autographié) de l'École polytechnique.

Nous avons sous les yeux le cours de première année, 1873-1874 (256 p. in-4°), et trois leçons faites par Hermite en 1881-1882 (20 p. in-4°), lorsqu'il était déjà remplacé par M. Jordan.

5. Faculté des Sciences de Paris. Cours de M. Hermite, professé pendant le 2e semestre 1881-82, rédigé par M. Andoyer, élève de l'École normale supérieure. Paris, Hermann, 1882 (autographie de 202 p. in-4°).

Deuxième édition (Cours de 1884).

Cette édition, que nous n'avons pu voir, contient, au moins sur l'aire des surfaces courbes, des remarques qui n'ont pas été reproduites dans les deux suivantes.

Troisième édition, revue par M. Hermite. 1887 (Cours de 1886 ; autographie de VI-266 pages).

Quatrième édition, revue et augmentée. 1891 (Cours de 1888 ; autographie de VI-293 p. in-4°).

Les additions comprennent les pages 265-293 et portent sur la transformation des fonctions elliptiques, la différentiation de *sn*, *cn*, *dn*, par rapport au module et la démonstration d'un théorème de Gauss sur la série hypergéométrique.

6. Préfaces à divers ouvrages.

A. Préface de l'ouvrage intitulé : *La vie et les travaux du baron Cauchy* par Valson. Paris, Gauthier-Villars, 1868 (t. I, p. v).

B. Préface de l'ouvrage intitulé : *Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales* par P. Appell et Ed. Goursat. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895 (pp. a, b, c, d, e, f, g).

C. Préface de l'ouvrage intitulé : *Œuvres mathématiques de Riemann*, traduites par L. Laugel. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898 (pp. VII-XI).

Ces deux dernières préfaces constituent au fond une notice sur les travaux de Riemann, analogue à celles qu'Hermite a publiées sur Weierstrass, Kronecker, Kummer, Rosenhain, Brioschi et Cayley, etc.

7. Discours. A. Séance de l'Académie des Sciences de Paris du lundi 29 décembre 1889. CR, CIX, 991 999.

Notice sur Chevreul, Halphen, Philipps, et sur les mémoires de MM. Poincaré et Appell couronnés au concours de Stockholm.

B. Discours prononcé lors de son jubilé [pp. 13-17 de la brochure intitulée : 1822-1892. Jubilé de M. Hermite (24 décembre). Paris, Gauthier-Villars, 1893 ; 45 pages in 8°].

## II

### NOTES ET MÉMOIRES

*1842.* 1. Lieu géométrique des pôles d'une section conique par rapport à une autre. NAM, (1), I, 263-264.

Le lieu des pôles des tangentes à une conique, par rapport à une autre, est une troisième conique (réciproque d'un théorème de Poncelet).

2. Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré. NAM, (1) I, 329-336.

Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique de l'équation générale du cinquième degré. La suite annoncée, p. 336, où il devait (d'après Terquem, pp. 326-328) s'occuper d'équations spéciales résolubles, n'a pas paru.

*1844.* 3. Sur la théorie des transcendantes à différentielles algébriques. CR, XVIII, pp. 1133-1148; *Liouville*, (1), IX, 353-368.

Premiers principes de la théorie des fonctions inverses des intégrales abéliennes les plus générales; définition; périodes; esquisse d'une théorie de la transformation bornée aux fonctions elliptiques; équations modulaires dans la théorie des fonctions abéliennes.

*1845.* 4. Principaux théorèmes de l'analyse des fonctions elliptiques. *Mémoires de la Société des sciences de Nancy*, 201-211.

*1846.* 5. Extraits de deux lettres à M. Jacobi. *Crelle*, XXXII, 297-299.

Ces lettres portent les dates : janvier 1843, août 1844. Elles sont aussi reproduites dans C. G. J. JACOBI, *Mathematische Werke*, Band I (Berlin, Reimer, 1851), pp. 391-413 et dans le tome II des *Gesammelte Werke* (Berlin, Reimer, 1882), pp 87-114. Le n° 3 fait allusion aux recherches contenues dans ces lettres.

La première lettre traite d'une méthode pour obtenir de la manière la plus simple les racines des équations de la division des fonctions abéliennes; la seconde, de la transformation inverse des fonctions elliptiques, avec une extension à l'analyse des fonctions hyperelliptiques de deux variables à quatre périodes simultanées.

*1848.* 6. Note sur la théorie des fonctions elliptiques. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, III, 54 56.

7. Note (sur un théorème de Fermat). *Liouville*, (1), XIII, 15.

Démonstration nouvelle du théorème : un nombre premier de la forme $4n + 1$ est la somme de deux carrés. Reproduit en substance. NAM, (1), XII, 45-46 (1853).

8. Note sur la réduction des fonctions homogènes à coefficients entiers et à deux indéterminées. *Crelle*, XXXVI, 357-364.

Définition du déterminant (discriminant) d'une forme binaire; c'est un invariant; cas d'une forme cubique ou biquadratique; méthode générale de réduction.

9. Sur la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques (1843). *Mémoires des savants étrangers de l'Institut*, X, 563-572.

Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des sciences, par M. Hermite, élève à l'École polytechnique, le 10 juillet 1843 (CR, XVII, 82). A rapprocher des nos 3 et 5. L'auteur, qui écrit déjà avec la sobriété et la concision d'un maître, prouve que le problème de la division est résoluble par radicaux, pour les fonctions hyperelliptiques les plus simples.

*1849.* 10. Sur une question relative à la théorie des nombres. *Liouville*, (1), XIV, 21-30.

On connaît dans un déterminant, les éléments de la première ligne qui sont des nombres entiers ayant l'unité pour plus grand commun diviseur; déterminer toutes les valeurs entières des autres éléments qui rendent le déterminant égal à plus ou moins l'unité.

11. Démonstration élémentaire d'une proposition relative aux diviseurs de $x^2 + Ay^2$. *Liouville*, (1), XIV, 451-452.

Une puissance convenablement déterminée de ces diviseurs est aussi de la forme $x^2 + Ay^2$.

12. Sur la théorie des fonctions elliptiques. CR, XXIX, 594.

Annonce d'un Mémoire fondé sur la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, telle qu'elle a été exposée plus tard par Briot et Bouquet.

*1850.* 13. Sur la théorie des formes quadratiques ternaires. *Crelle*, XL, 173-177.

Démonstration nouvelle d'un théorème de Gauss : le produit des coeffi-

cients des trois carrés des variables des formes quadratiques ternaires est inférieur au double du déterminant.

14. Sur différents objets de la théorie des nombres. *Crelle*, XL, 261-315.

Quatre lettres à Jacobi (1847), publiées aussi dans les *Mathematische Werke* du grand géomètre, t. II, pp. 231-275 (mais non dans les *Ges Werke*). Hermite expose diverses méthodes pour la réduction des formes quadratiques. Dès le début il donne une limite supérieure du minimum d'une forme positive quadratique à un nombre quelconque de variables.

*1851.* 15. Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. *Crelle*, XLI, 191-216. Cf. CR, XXXIV, 133.

Voir l'article de M. Jordan. La méthode consiste, dit l'auteur, dans l'introduction de variables continues qui font dépendre les questions relatives aux nombres entiers des principes analytiques élémentaires. Il présente d'une manière nouvelle le problème de l'équivalence des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables et des formes binaires quelconques et essaie ensuite de fonder la théorie des nombres complexes. Voir SMITH, *Report on the Theory of Numbers*, n° 92.

16. Sur les fonctions algébriques. CR, XXXII, 458-461.

L'auteur trouve, au moyen des théorèmes de Puiseux sur les racines des équations algébriques considérées comme fonction d'une variable, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit résoluble par radicaux.

*1852.* 17. Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées. CR, XXXV, 52-54.

Il existe une infinité de systèmes de fonctions jouissant, pour une ou plusieurs équations, des propriétés de la suite de Sturm.

*1853.* 18. Remarques sur le théorème de M. Sturm. CR, XXXVI, 294-297.

Nouvelle suite de fonctions jouissant, dans le cas d'une ou de plusieurs équations, des propriétés de la suite de Sturm.

19. Sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés. CR, XXXVII, 133-134.

Extrait du n° 23.

*1854.* 20. Remarques sur un mémoire de M. Cayley relatif aux déterminants gauches. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, IX, 63-67.

21. Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, IX, 172-217 ; *Crelle*, LII (1856), 1-38.

Le mémoire publié dans le *Journal de Crelle* est un développement de celui qui a paru dans le journal anglais. 1. Théorie algébrique des formes biquadratiques. 2. Théorie arithmétique. 3. Principes de la distribution en ordres des formes binaires. 4. Division en ordres des formes cubiques et biquadratiques. 5. Covariants des quintiques. — C'est dans ce mémoire qu'Hermite a établi la loi de réciprocité. On y trouve aussi la relation fondamentale, qui permet de passer de la formule normale de Legendre à celle de Weierstrass dans les intégrales elliptiques, sans résoudre une équation du 3e ou du 4e degré.

22. Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. *Crelle*, XLVII, 307-312.

Méthode pour obtenir toutes les transformations en elle-même d'une forme ternaire indéfinie.

23. Sur la théorie des formes quadratiques. *Crelle*, XLVII, 313-342, 343-368.

Étude algébrique des mêmes formes. Étude parallèle de l'équivalence des formes du $n^{ième}$ degré, décomposables en $n$ facteurs linéaires et des formes quadratiques indéfinies. Principes nouveaux nécessaires pour étudier la représentation d'un nombre par une somme de quatre carrés. — D'après M. Picard, les mémoires 22 et 23 sont *fondamentaux* dans l'œuvre arithmétique d'Hermite.

*1854*. 24. Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. CR, XL, 249-254, 304-309, 365-369, 427-431, 485-489, 536-541, 704-707, 785-787.

Solution du problème de la transformation quand les intégrales qui servent de point de départ renferment un radical carré portant sur un polynome du cinquième ou du sixième degré ; relations de cette théorie avec la théorie arithmétique des formes quadratiques.

25. Remarques sur un théorème de M. Cauchy. CR, XLI, 181-183.

L'équation en $s$ (ou des inégalités séculaires) de degré $n$ a toutes ses racines réelles, si les coefficients placés symétriquement par rapport à la diagonale principale sont des imaginaires conjuguées. Relations avec le n° 26.

*1856*. 26. Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données. *Crelle*, LII, 39-51.

C'est dans ce mémoire que les théorèmes de Sturm et de Cauchy sont démontrés par une voie arithmétique.

*1857.* 27. Sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés. *Crelle*, LIII, 182-192.

Un des plus beaux mémoires d'Hermite, d'après M. Picard.

28. Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogènes du second degré. *Crelle*, LIII, 271-274.

29. Sur les formes cubiques à deux indéterminées. *Quarterly Journal of Mathematics*, I, 20-22.

30. (Correspondence with M. Cayley on cubic forms). *Quarterly Journal of Mathematics*, I, 85-91.

31. Extract of a letter to Professor Sylvester. *Quarterly Journal of Mathematics*, I, 370-373.

Sur le nombre des solutions entières et positives de l'équation $ax + by + cz +$ etc. $= n$. La curieuse méthode d'Hermite est analysée dans NAM, 1858, (1) XVII, pp. 127-130, par Terquem.

*1858.* 32. Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. CR, XLVI, 171-175.

33. Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. *Liouville* (2), III, 26-36.

Le premier mémoire est un extrait du second. L'auteur condense en une seule formule très générale la transformation des fonctions thêta du premier ordre. Voir SMITH, *Report*, n° 125.

34. Sur la théorie des formes cubiques à trois indéterminées. *Liouville*, (2), III, 37-40.

Relations nouvelles entre les covariants de ces formes cubiques et des covariants de formes biquadratiques binaires.

35. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. CR, XLVI, 508-515 ; *Annali di Tortolini*, I, 256-259, 326-328.

Premier exposé de la solution au moyen des fonctions elliptiques, l'une des découvertes capitales d'Hermite. Voir n° 56.

36. Sur la résolution de l'équation du quatrième degré. CR, XLVI, 715-722.

Résolution de certaines équations du quatrième degré par les fonctions elliptiques.

37. Sur quelques théorèmes d'algèbre, et la résolution de l'équation du quatrième degré. CR, XLVI, 961-967.

Etude de la transformation de Tchirnhausen. Elle permet de ramener l'équation générale du quatrième degré à celle dont il est question au n° 36.

*1859.* 38. Sur l'interpolation. CR, XLVIII, 62-67.

Démonstration des résultats trouvés par Tchebychef en 1855, sans recourir à la théorie des fractions continues.

39. Sur la réduction des formes cubiques à deux indéterminées. CR, XLVIII, 351-357.

Etude de ces formes à déterminant positif; conditions nécessaires et suffisantes de réduction.

40. Sur la théorie des équations modulaires. CR, XLVIII, 940-947, 1079-1084, 1095-1102; XLIX, 16-24, 110-118, 141-144.

Sur ce sujet, voir la notice de M. Jordan et SMITH, *Report*, n°s 130, 137, 138.

41. Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré. *Annali di Tortolini*, II, 59-61.

*1860.* 42. Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires. *Crelle*, LVII, 371-375.

Expression de ce résultant au moyen de certains invariants du 4e degré, par rapport à un covariant et à un contrevariant des trois formes données. Autre méthode pour y arriver, extension de la méthode du mémoire 21 aux formes à trois variables.

*1861.* 43. Sur l'invariant du dix-huitième ordre des formes du cinquième degré, et sur le rôle qu'il joue dans la résolution de l'équation du cinquième degré. *Crelle*, LIX, 304-305.

Expression au moyen des racines.

44. Sur la théorie des nombres. CR, LIII, 214-228. *Liouville*, (2), VII, 25-40; 41-48 (Liouville).

Démonstration nouvelle, au moyen des fonctions thêta, de théorèmes sur le nombre de classes des formes quadratiques. Voir SMITH, *Report*, nos 127, 134, 135 et JOUBERT, *Sur la theorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres.*

*1862.* 45. Sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques. *Crelle*, LX, 304.

Elle est déduite de la théorie algébrique des formes biquadratiques.

46. Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique. CR, LV, 11-18, 85-91.

Développement des principes exposés dans le n° 44.

47. Sur la théorie des formes quadratiques. CR, LV, 684-692.

Simplification de la méthode de Dirichlet pour la détermination du nombre des classes de formes quadratiques de même déterminant.

*1863.* 48. Sur la théorie des fonctions elliptiques. CR, LVII, 613-618, 993-1000. Sur quelques formules relatives au module dans la théorie des fonctions elliptiques. *Liouville*, (2), IX, 313-320.

Nouveaux développements de $\mathrm{sn}x$, $\mathrm{cn}x$, $\mathrm{dn}x$, en series de sinus et cosinus, permettant de prouver, comme par les produits infinis, que la racine quatrième du module et de son complément est fonction uniforme du rapport des périodes. La racine carrée de $(1 + \mathrm{sn}x)(1 + k\mathrm{sn}x)$ est aussi fonction uniforme de $x$.

49. Sur les fonctions de sept lettres. CR, LVII, 750-757.

Representation de toutes les substitutions d'un système de sept lettres. Consequences pour certaines substitutions particulières.

*1864.* 50. Lettre à M. Brioschi. *Crelle*, LXIII, 30-32.

Brioschi a considéré pour une forme cubique, un nouveau covariant, jacob en de la forme, de l'hessien et du covariant du 6e degré. L'auteur remarque que ce nouveau covariant est decomposable en facteurs linéaires, que ses covariants sont des puissances du discriminant de la forme. Propriétés analogues d'un contrevariant.

51. Sur les theorèmes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques. *Liouville*, 2e, IX, 145-159.

Developpement des principes exposés dans le memoire 42.

52. Remarque sur le développement de cosam $x$. *Liouville*, (2), IX, 289-295.

Loi de formation des polynomes en $k$ qui sont les coefficients des puissances successives de $x$ dans ce développement.

53. Sur un nouveau développement en série des fonctions. CR, LVIII, 93-100, 266-273.

Développements analogues à ceux où entrent les polynomes de Legendre, mais dont les éléments sont des exponentielles où l'exposant est une forme quadratique à un nombre quelconque de variables, comme celles que l'on rencontre dans la théorie des abéliennes.

*1865*. 54. Extrait d'une lettre à M. Borchardt. *Crelle*, LXIV, 294-296.

Extension des propriétés des polynomes de Legendre à des fonctions analogues à deux variables. Le même sujet est développé davantage dans le mémoire suivant.

55. Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables. CR, LX, 370-377, 432-440, 461-466, 512-518.

56. Sur l'équation du cinquième degré. CR, LXI, 877-882, 965-972, 1073-1081. LXII, (1866), 65-72, 157-162, 245-253, 715-722, 919-924, 959-966, 1054-1059, 1161-1167, 1213-1215.

Exposé d'ensemble de sa propre méthode (n° 35), de celle de Kronecker et des recherches de Sylvester et de Brioschi, relatives à des points spéciaux y relatifs ; rapprochement des deux méthodes. Sur ces recherches, voir SALMON, *Higher Algebra*, 3e édition, pp. 206-258, 296-302.

*1866*. 57. Sur le rayon de courbure des courbes gauches. NAM, (2), V, 297-298.

La valeur du rayon s'obtient immédiatement en remplaçant l'angle de contingence par son sinus.

*1867*. 58. Sur l'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Annali di Matematica*, (2), I, 155-158.

Détermination directe de la partie algébrique de l'intégrale, ou de l'intégrale elle-même quand elle n'a pas de partie algébrique.

*1868*. 59. Sur le développement en série des inté-

grales elliptiques de première et de seconde espèce. *Annali di Matematica*, (2), II, 97-98.

Ces développements sont mis sous la forme $F(k, x)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, où F est une série entière en $x$, dont les coefficients sont des polynomes entiers en $k$.

*1869.* 60. Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques en fonction du quotient des deux périodes. *Annali di Matematica*, (2), III, 81-82.

Développement algébrique où les coefficients sont rationnels en fonction du quotient des périodes.

61. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. *Annali di Matematica*, (2), III, 83.

Examen du cas curieux où $a$ est imaginaire.

62. Sur la transcendante $E_n$. *Annali di Matematica*, (2), III, 83.

Valeur approximative de la fonction de Bessel, pour un indice très grand.

*1870.* 63. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{\sin a\, dx}{1-2x\cos a+x^2}$. *Darboux*, (1), I, 320-323.

Développement de cette fonction discontinue et périodique de $a$ en série procédant suivant les sinus des arcs multiples de $a$. A rapprocher de 61.

*1871.* 64. Sur la construction géométrique de l'équation relative à l'addition des intégrales elliptiques de première espèce. *Darboux*, (1), II, 21-23.

Construction géométrique, au moyen d'un cercle et d'une ellipse, de $\operatorname{sn}(x+2na+a)$, $\operatorname{cn}(x+2na+a)$.

*1872.* 65. Sur l'intégration des fonctions circulaires. *Proceedings of the London Mathematical Society*, IV, 164-175.

Ce Mémoire est reproduit en substance dans le *Cours d'Analyse*, pp. 320-331.

66. Sur l'élimination des fonctions arbitraires. *Report of the British Association*, XLII, 1872, 233-238. *Messenger of Mathematics*, II, 69-70.

67. Sur l'équation $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$. NAM, (2), XI, 5-8.

L'auteur, en partant d'une propriété des surfaces du troisième ordre, retrouve les formules de Binet et d'Euler.

68. Sur l'intégration des fractions rationnelles. NAM, (2), XI, 145-148. *Annales de l'École normale supérieure*, (1), I, 215-218.

Calcul de la partie algébrique de l'intégrale sans trouver les racines du dénominateur de la fraction rationnelle. Ce procédé a été reproduit dans le *Cours d'Analyse* de l'auteur, pp. 268 et suivantes.

*1873.* 69. On an application of the theory of unicursal curves. *Proceedings of the London Mathematical Society*, IV, 343-345.

Conditions pour qu'une équation différentielle ait une intégrale qui représente une courbe unicursale.

70. Sur l'irrationalité de la base des logarithmes hyperboliques. *Report of the British Association*, XLIII, 22-23; *Messenger of Mathematics*, III, 1874, 98-100.

Extrait du n° 75.

71. Sur une équation transcendante. *Darboux*, (1), IV, 61-64.

Le logarithme de $[(1 + x) : (1 - x)]$ diminué d'une fonction rationnelle dont les pôles réels en nombre $n$ sont situés entre $+1$ et $-1$, a $n + 1$ zéros réels entre $+1$ et $-1$ et ses zéros imaginaires ont un module supérieur à l'unité.

72. Sur l'expression U sin $x$ + V cos $x$ + W. *Crelle*, LXXVI, 303-312, 342-344.

Détermination des trois polynomes U, V, W, entiers en $x$, de manière que l'expression commence par une puissance de $x$ d'ordre le plus élevé possible. Conséquences relatives à l'irrationalité de $\pi^2$.

73. Sur la fonction exponentielle. CR, LXXVII, 18-24, 74-79, 226-233, 285-293.

Mémoire capital sur la transcendance du nombre $e$. Ce mémoire a été publié à part en une brochure in-4° de 33 pages (Paris, Gauthier-Villars, 1874).

*1874.* 74. Sur l'intégrale $\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin^2 x}{2a\cos x + a^2}\right)^n dx$.

*Nouvelle Correspondance mathématique*, I, 33-35.

La fonction sous le signe étant désignée par $r^n$, l'auteur somme la série dont $(xr)^n$ est le terme général, intègre le résultat entre les limites données et égale les coefficients de $x^n$ dans les deux membres.

75. Sur quelques intégrales définies. *Journal de l'École polytechnique*, XXVII (Cahier 44), 181-196.

Détermination de l'intégrale de zéro à $2\pi$, d'une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, multipliée par $x$, ou du logarithme d'une pareille fonction. Extension aux intégrales portant sur des fonctions elliptiques.

76. Sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mêmes. *Crelle*, LXXVIII, 325-328.

L'auteur, pour répondre à une objection très fondée, dit-il, de Bachmann, prouve que ses formules de transformation, obtenues par voie indirecte (n° 22), comprennent toutes les substitutions qui reproduisent une forme donnée.

77. Sur la réduction des formes quadratiques ternaires. *Crelle*, LXXIX, 17-20.

*1875.* 78. Sur quelques équations différentielles linéaires. *Crelle*, LXXIX, 324-338.

Mémoire important sur le calcul approché des valeurs des fonctions par des procédés qui sont la généralisation de ceux employés par divers géomètres et par Hermite lui-même pour $\log[(x+1):(x-1)]$

79. Sur la fonction de Jacob Bernoulli. *Crelle*, LXXIX, 339-344.

Démonstration directe d'une formule de Raabe, d'une autre formule analogue et d'un théorème de Malmstèn.

80. Sur les nombres de Bernoulli. *Crelle*, LXXXI, 93-95.

Formule récurrente pour calculer la partie entière de ces nombres dans la formule de Clausen et von Staudt.

81. Sur les développements de la fonction $F(x) = \mathrm{sn}^a x.\ \mathrm{cn}^b x.\ \mathrm{dn}^c x$ où les exposants sont entiers. *Mémoires de l'Académie de Stockholm*. Bihang, III, n° 10, p. 1-10.

L'auteur developpe la fonction à étudier où $x$ est remplacé par $a = iK' + \epsilon$, suivant les puissances de $\epsilon$; il la multiplie par l'inverse de $\mathrm{sn}(x - a)$, $\mathrm{cn}(x - a)$, $\mathrm{dn}(x - a)$, et égale les résidus des deux membres. Les résultats relatifs à l'inverse de $\mathrm{sn}^2 x$ sont surtout remarquables.

82. Sur un théorème d'Eisenstein. *Proceedings of the London Mathematical Society*, VII, 173-175.

Démonstration simple et extension à des équations transcendantes du théorème sur le développement des racines d'une équation algébrique.

83. Sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances de la variable. *Crelle*, LXXXI, 220-228. Sur le développement de l'inverse du sinus d'amplitude et de son carré, suivant les puissances croissantes de la variable. *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des sciences*, 1875, p. 131-136.

Recherches sur les coefficients des développements de $sn$, $cn$, $dn$, $(1 : sn)$, $(1 : sn)^2$.

84. Sur une formule de M. Delaunay. *Nouvelle Correspondance mathématique*, II, 54-55.

Démonstration de la formule qui donne $\mathrm{PD^m Q} - \mathrm{D^m PQ}$, en posant $\mathrm{P} = e^{px}$, $\mathrm{Q} = e^{qx}$.

85. Lettre à M. P. Gordan. *Mathematische Annalen*, X, 287-288.

Démonstration d'une formule de Jacobi sur la dérivée $n^{ième}$ de $(1 - x^2)^n \sqrt{(1 - x^2)}$.

86. Question 95. *Nouvelle Correspondance mathématique*, II, 217.

L'aire d'un segment de courbe convexe est très approximativement le sixième de la somme des triangles rectangles ayant la corde pour hypoténuse et les tangentes aux extrémités pour côtés.

87. Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, I, deuxième partie, 1-16.

Généralisation d'une remarque de Jacobi, susceptible elle-même de généralisations nouvelles, relative à des intégrales pseudo-abéliennes.

*1877*. 88. Note sur une formule de Jacobi. *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, (2), VI, 1-7.

Démonstration par les fractions continues du théorème dont il est question au n° 85.

89. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. CR, LXXXV (1877) 689-695, 728-732, 821-826, 870-875, 984-990, 1085-1091, 1185-1191. LXXXVI (1878) 271-277, 422-427, 622-628, 777-780, 850-854. LXXXIX (1879) 1001-1005, 1092-1097. XC (1880) 106-112, 201-208, 478-483, 643-649, 761-766. XCIII (1881) 920-925, 1098-1103. XCIV (1882) 186-192, 372-377, 477-482, 594-600, 753-759.

Étude approfondie de l'équation de Lamé $D^2y = y\,[n\,(n+1)\,k^2\mathrm{sn}^2x + h]$ et des fonctions elliptiques de seconde espèce. Applications au problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, quand il n'est soumis à aucune force, au pendule sphérique, à la ligne élastique, à des équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques ayant des intégrales monodromes. Ces recherches ont été réunies en un volume de 146 pp. in-4° (Paris, Gauthier-Villars, 1885) et ont été analysées dans *Darboux* (2), X, 33-41.

90. Études de M. Sylvester sur la théorie des formes. CR, LXXXIV, 974-975.

91. Extrait d'une lettre à M. Fuchs. *Crelle*, LXXXII, 343-347.

Expression de toute fonction doublement périodique au moyen d'une somme de fonction zêta de Jacobi. Expression des coordonnees d'une cubique en fonction d'un paramètre.

92. Sur la formule de Maclaurin. *Crelle*, LXXXIV, 64-69.

Démonstration de cette formule sommatoire en introduisant au début les fonctions circulaires, au lieu des exponentielles, dans la formule de Malmstèn sur les nombres de Bernoulli.

93. Sur la formule d'interpolation de Lagrange. *Crelle*, LXXXIV, 70-79.

Détermination d'une fonction entière qui prend ainsi que ses $n$ premières dérivées la même valeur qu'une fonction donnée et ses $n$ dérivées, pour

$x = a$, $b$, $c$, etc., $n$ pouvant avoir des valeurs différentes pour $x = a$, ou $x = b$, etc. Le point de départ est une formule exprimant au moyen d'une intégrale multiple ou d'une intégrale simple imaginaire, une fonction interpolaire d'Ampère, même quand plusieurs éléments en sont égaux.

*1878.* 94. Observations algébriques sur les courbes planes. *Crelle*, LXXXIV, 298-299.

Condition pour qu'une courbe plane ait plusieurs points doubles.

95. Sur le pendule. *Crelle*, LXXXV, 246-249.

Voir n° 89. 1° Les coordonnées rectangulaires du pendule sphérique sont des dérivées de fonctions du temps. 2° Dérivées de *sn*, *cn*, *dn*, Z, par rapport au module.

96. Sur la théorie des fonctions sphériques. CR, LXXXVI, 1515-1519.

L'auteur signale ce qu'il y a de nouveau dans le livre de Heine sur les fonctions de Lamé d'ordre supérieur et sur les fonctions relatives au cylindre elliptique.

97. Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\, dz$. *Atti de l'Académie de Turin*, XIV, 91-115.

Développement en série, même dans le cas où $a$ est imaginaire ; l'auteur en déduit la formule de Binet pour le logarithme de gamma.

98. Sur les formules de M. Frenet. *Journal de Teixeira*, I, 65-70.

99. Sur l'équation de Lamé. *Annali di matematica*, (2), IX, 21-24.

Voir n° 89.

100. Sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, II, 2e partie, 157-161.

La formule relative au cas des racines égales se déduit de l'autre en dérivant celle-ci une ou plusieurs fois par rapport à chacune des racines multiples.

*1879.* 101. Équations différentielles linéaires. *Darboux*, (2), III, 311-325.

Méthode de Cauchy pour intégrer les équations linéaires sans second membre à coefficients constants.

102. Sur l'indice des fractions rationnelles. *Bulletin de la Société mathématique de France*, VII, 128-131.

Démonstration élémentaire du théorème de Cauchy sur le nombre des racines d'une équation, contenues dans un contour fermé.

103. Sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. Tchebychef. *Crelle*, LXXXVIII, 10-15.

Calcul de $x$ et $y$ de manière que $x - ay - b$ devienne inférieur à la moitié de l'inverse de $y$, $a$ et $b$ étant des nombres entiers. Extension au cas où $a$ et $b$ sont des fonctions données d'une variable, $x$ et $y$ des polynomes entiers à déterminer en fonction de cette variable de manière que l'expression commence par une puissance négative de la variable la plus élevée possible.

*1880.* 104. Sur l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\, dx$. *Journal de Teixeira*, II, 65-67.

105. Sur la différentiation des fonctions elliptiques par rapport au module. *Astronomische Nachrichten*, XCVI, col. 321-326.

Dérivées par rapport au module, des fonctions *sn*, *cn*, *dn*, Z, Λ.

106. Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. *Crelle*, LXXXIX, 9-18.

L'auteur traite le cas où le module est égal à l'unité.

107. Sur une proposition de la théorie des fonctions elliptiques. CR, XC, 1096-1098.

La partie réelle de (K' : K) est positive.

108. Sur la série de Fourier et autres représentations analytiques des fonctions d'une variable réelle. CR, XCI, 1018-1019.

Note à propos de l'ouvrage de Dini, qui s'occupe d'une formule donnée par Hermite dans l'un de ses cours.

109. Sur une formule d'Euler. *Liouville*, (3), VI, 5-18.

Etude de quelques intégrales pseudo-elliptiques.

*1881.* 110. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. *Annali di Matematica*, (2), X, 101-104.

Si l'on connaît le produit de deux intégrales, on peut transformer l'équation en une autre dont l'intégrale générale est beaucoup plus simple.

111. Sur une série. *Mathesis*, I, 26.

112. Sur une représentation analytique des fonctions au moyen des transcendantes elliptiques. *Annali di Matematica*, (2), X, 137-144.

Généralisation des séries de Fourier, où les sinus et cosinus sont remplacés par des quotients de fonction théta.

113. Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Crelle*, XCI, 54-78. *Darboux*, (2), V, 312-320. *Acta Societatis scientiarum Fennicae*, 1883, XII, 67-94.

Nouvelle démonstration du théorème de Mittag-Leffler; le théorème de Weierstrass peut s'en déduire. L'article du journal de Darboux est une analyse du Mémoire d'Hermite.

114. Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. *Crelle*, XC, 332-338.

Généralisation des deux fonctions dans lesquelles Prym a décomposé gamma.

115. Détermination de l'intégrale $\int \frac{\mathrm{dn}^4 u\, du}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u}$. *Astronomische Nachrichten*, CI, col. 17-18.

116. Sur les fonctions $\Theta(x)$ et $\mathrm{H}(x)$ de Jacobi. *Collectanea mathematica (in memoriam Chelini)*, 1-5.

Détermination de ces fonctions par des équations fonctionnelles.

*1882.* 117. Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler dans la théorie des fonctions. *Crelle*, XCII, 145-155. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, XII, 425-436.

Application à la première intégrale eulérienne.

118. Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce. CR. XCV, 901-904.

Les intégrales elliptiques complètes où l'intégration se fait en ligne droite, sont bien déterminées.

*1883.* 119. Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques. AM, I, 368-370.

Démonstration de la formule de Cayley liant les produits de quatre *sn*, quatre *cn*, quatre *dn*, pour quatre valeurs de la variable.

120. Remarque au sujet de la note de M. Lipschitz sur un point de la théorie des fonctions elliptiques. CR. XCVII, 1414-1415.

Une seule formule de Jacobi donne trois équations différentielles de Lipschitz relatives à la représentation des nombres comme sommes de quatre carrés.

121. Sur la fonction $\mathrm{sn}^a x$. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, XII, 437-443.

Détermination des coefficients du développement en série.

122. Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques aux fonctions de première, de seconde et de troisième espèce. *Darboux*, (2), VII, 36-42.

Méthode nouvelle.

123. Sur quelques points dans la théorie des nombres. AM, II, 299-300.

Démonstration très élémentaire d'une formule équivalente à celle de Dirichlet pour trouver la somme des diviseurs des nombres jusqu'à une limite donnée.

124. Sur une formule relative à la théorie des fonctions d'une variable. AJM, VI, 60-63.

Correction à son *Cours d'Analyse* : décomposition rigoureuse, en fractions simples, des cosécantes et cotangentes d'une variable.

125. Extrait d'une lettre à M. Sylvester. AJM, VI, 173-175.

Emploi du symbole $\mathbf{E}(x)$, pour représenter diverses fonctions numériques.

*1884.* 126. Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques. ***Bulletin de l'Académie de S. Pétersbourg***, XXIX, 325-352 et AM, V, 297-330.

Relations entre le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant négatif et les fonctions théta. A rapprocher de 46.

127. Sur les polynomes de Legendre. *Journal de Teixeira*, VI, 81-84.

Le polygone $X_n$ est le dénominateur de la *nième* réduite de $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ développé en fraction continue.

128. Sur un développement en fraction continue. AM, IV, 89-90.

Démonstration élémentaire d'un théorème de Fuchs sur $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}$.

129. Sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques (avec Lipschitz). AM, IV, 193.

Simplification des formules 7-11 de la page 89 des *Fundamenta*.

*1885.* 130. Discours prononcé aux obsèques de M. Bouquet. CR, CI, 585-588; *Darboux*, (2), IX, 301-305.

131. Sur la théorie des fractions continues. *Darboux*, (2), IX, 11-13.

132. Note. *Darboux*, (2), IX, 135-137.

L'auteur indique comment il a trouvé certaines formules de son *Cours d'Analyse*.

133. Note au sujet de la communication de M. Stieltjes sur une fonction uniforme. CR, CI, 112-115.

La fonction $\zeta s$ de Riemann est continue et monodrome, sauf pour $s = 1$; $\zeta s - (1 : s - 1)$ est partout fini.

134. Sur les fonctions holomorphes. *Liouville*, (4), I, 9-10.

Une fonction holomorphe n'ayant de pôle qu'à l'infini est entière.

135. Sur une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. *Ann. de l'École normale supérieure*, (3), II, 303-314.

Expression en série trigonométrique des seize quotients des quatre fonctions thêta de $(x + a)$ par ces fonctions de $x$.

136. Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, XII, 642-646.

Simplification d'une méthode exposée par l'auteur, dans le *Bulletin de Darboux*

137. Sur une identité trigonométrique. NAM, (3), IV. 57-59.

Généralisation par la théorie des résidus d'une identité de Glaisher.

*1886*. 138. Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques. *Crelle*, IC, 324-328.

139. Remarques sur les formes quadratiques de déterminant négatif. *Darboux*, (2), X, 23-30.

Sur la détermination du nombre des classes.

140. Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques. *Crelle*, C, 51-65.

Conséquences arithmétiques déduites d'identités où entrent les intégrales de diverses combinaisons de fonctions thêta.

141. Question 8164. *Educational Times*, XLIV, 87.

Valeur d'une intégrale.

*1887*. 142. Rosenhain, CR, CIV, 891.

143. Extrait de deux lettres adressées à M. Craig. AJM, IX, 381-388.

144. Solutions of questions 8510, 8560, 8588, 8596, 8717, 8863. *Educational Times*, XLVI, 50-51; 21; 63-64; 73-74; 111; XLVII, 53.

*1888*. 145. Sur un mémoire de Laguerre concernant les équations algébriques. *Mémoires de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei*, III, 155-164.

Démonstration de théorèmes de Laguerre NA, (2), XIX, (1880), sur la détermination des racines d'une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles.

146. Solution of question 9072. *Educational Times*, XLVIII, 21.

147. Démonstration nouvelle d'une formule relative aux intégrales eulériennes de seconde espèce. *Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*, (7), II, 365-366.

Expression de $\Gamma a$ au moyen de l'intégrale de Raabe.

148. Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, II, C, 1-12.

149. Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, II, G, 1-6. (Aussi dans le recueil cité n° 147).

*1889*. 150. Discours prononcé aux funérailles de Halphen. CR, CVIII, 1079-1081.

*1890*. 151. Discours prononcé à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne. *Darboux*, (2), XIV, 6-36.

Notices sur Lacroix, Lefebure de Fourcy, Francœur, Biot, Poisson, Sturm, Poncelet, Delaunay, Leverrier, Lamé, Liouville, Serret, Duhamel, Chasles, Cauchy, Puiseux, Briot et Bouquet.

152. Sur les polynomes de Legendre. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, IV, 146-152.

153. Sur les polynomes de Legendre. *Crelle*, CVII, 80-83.

Démonstrations nouvelles de théorèmes connus. Conséquences nouvelles.

154. Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, IV, I, 1-10.

L'auteur introduit une nouvelle variable dans la fonction et trouve le nombre des racines au moyen d'un théorème de Cauchy.

*1891*. 155. Sur une formule de Jacobi concernant

l'intégrale elliptique à module imaginaire. *Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft*, III, 22-24.

Généralisation d'une formule de Heymann simplifiant celle de Jacobi.

156. Sur la transformation des fonctions elliptiques. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, V, 155-157.

Sur les transformations complémentaires donnant la multiplication.

*1892*. 157. Note sur M. Kronecker. CR, CXIV, 19-21.

158. Sur l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. *Journal de Teixeira*, XI, 65-66.

Du théorème de l'addition pour $\wp x$ défini par la relation $\left(\frac{d\wp}{dx}\right)^2 =$ un polynome du 4e degré en $\wp$, l'auteur déduit les formules de l'addition pour $sn$, $cn$, $dn$, $p$.

159. Sur la transformation des fonctions elliptiques. *Rospravy* etc. de Prague (en langue tchèque). I, n° 30.

160. Sur la transformation des fonctions elliptiques. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, VI, 1-12.

Exposé de sa théorie de la transformation, au moyen des fonctions Al de Weierstrass.

*1893*. 161. Notice sur les travaux de M. Kummer. CR, CXVI, 1163-1164.

162. Sur la généralisation des fractions continues algébriques. *Annali di Matematica* (2), XXI, 289-308.

Mémoire très intéressant montrant que la théorie des fonctions continues peut être généralisée de diverses manières (E. PICARD).

163. Remarque sur la définition du logarithme des quantités imaginaires. *Casopis*, XXII, 225.

Définition naturelle au moyen d'une intégrale définie.

164. Sur une extension de la formule de Stirling. *Mathematische Annalen*, XLI, 581-590.

Développement en série contenant comme cas particuliers ceux de Gauss et de Stirling.

*1894*. 165. Sur les polynomes entiers à une variable. *Nyt Tidsskrift for Mathematik*, V, B, 1-4.

Un polynome entier garde son signe entre deux de ses zéros consécutifs.

166. Remarque sur les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler. *Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* (4 pages).

167. Sur la fonction eulérienne. *Casopis*, XXIII, 65.

168. Sur une intégrale définie. *Casopis*, XXIII, 273-274.

*1895*. 169. Notice sur M. Cayley. CR, CXX, 230-234.

170. Sur l'équation bicarrée. *Mathesis*, (2), V, 11-12.

171. Sur les nombres de Bernoulli. *Mathesis*, (2), V, *Supplément*, II, 1-7 *(Congrès scientifique international des catholiques*, t. VII, 5-11).

Démonstration très simple, au moyen des notations symboliques, de diverses relations entre les nombres de Bernoulli et, en particulier, de deux formules de Malmstèn.

172. Extrait d'une lettre adressée à M. Craig (sur la fonction gamma). AJM, XVII, 6-10.

173. Sur la fonction log $\Gamma(a)$. *Crelle*, CXV, 201-208.

174. Sur le logarithme de la fonction gamma. AJM, XVII, 111-116.

Continuation du travail publié en 1893, dans les *Mathematische Annalen*.

175. Extrait d'une lettre (sur la fonction gamma). *Bulletin international de Prague*, p. 5-6 (1895).

*1896*. 176. Sur une extension du théorème de Laurent. *Crelle*, CXVI, 85-89.

177. Sur les polynomes de Bernoulli. Extrait d'une correspondance entre M. Sonin et M. Hermite. *Crelle*, CXVI, 133-156.

Complément des recherches sur $\Gamma a$ indiquées plus haut.

178. Note sur une formule de M. Fontené. *Darboux*, (2), XX, 218-220.

Démonstration simple d'une formule relative à la théorie des fonctions elliptiques (théorème d'addition).

179. Sur quelques propriétés fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques. *Papers published by the American Mathematical Society*, I, 105-115.

Suite au précédent relatif à une note de Fontené.

*1897*. 180. Notice sur M. Weierstrass. CR, CXXIV, 430-433.

181. Notice sur M. F. Brioschi. CR, CXXV, 1139-1141.

182. Question 951. *Intermédiaire des mathématiciens*, IV, 1.

183. Sur quelques développements en série dans la théorie des fonctions elliptiques. *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan* (2), VI, 1-21.

Développement de $q$ et $(\pi K' : K) - \log (16 : k^2)$ suivant les puissances de $k$.

*1898*. 184. De la sommation d'une série considérée par Abel. *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan* (2), VIII, 107-108.

Sommation de la série dont le terme général est $x^n$ multiplié par une fonction entière de $n$.

185. Expression approchée de l'aire d'un segment d'une courbe. *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan* (2) VIII, 109.

*1899*. 186. Remarques sur une identité liée à la théorie des polynomes de Legendre. *Ofversigt af Finska Vetenskaps-Societens Förhandlingar*, XLII, 88-90.

*1900*. 187. Sur la forme des équations différentielles à coefficients périodiques (avec M. Anissimof). *Recueil mathématique de la Société mathématique de Moscou*, XXI, 62-67.

188. Extraits de quelques lettres à M. S. Pincherle. *Annali di Matematica*, (3), V, 57-72.

Applications nouvelles de la première formule d'interpolation de Newton, en particulier au logarithme de gamma et à la fonction zéta (de Riemann), généralisée par MM. Lerch et Mellin.

*1901.* 189. Sulle frazioni continue. *Le Matematiche pure ed applicate* (Journal de M. le Prof. Alasia, à Oristano, en Sardaigne), I, 1-2.

Exposé nouveau de la méthode de Dirichlet pour calculer approximativement une quantité. Cette note porte la date : janvier 1901.

190. Extrait d'une lettre à M. E. Jahnke. *Archiv der Mathematik und Physik* (3), I, 21-22.

Lettre du 25 novembre 1900 sur l'enseignement mathématique dans les Universités.

191. Sur une équation transcendante. *Archiv der Mathematik und Physik*, (3), I, 22-26.

Cette note porte la date du 17 décembre 1900.

Imprimerie POLLEUNIS & CEUTERICK, 32, rue des Orphelins, Louvain.
Même maison à Bruxelles, 37, rue des Ursulines

# SU DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI DEL PRIMO GRADO *

*Nota del signor Abate* **E. Gelin** *(Professore nel Collegio San Quirino ad Huy)*

**1.** Abbiasi un sistema di $n+1$ equazioni del primo grado ad $n+1$ incognite $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{\alpha_0}+\dfrac{x_1}{\alpha_0-a_1}+\dfrac{x_2}{\alpha_0-a_2}+\dots+\dfrac{x_k}{\alpha_0-a_k}+\dots+\dfrac{x_n}{\alpha_0-a_n}=1 \\ \dfrac{x_0}{\alpha_1}+\dfrac{x_1}{\alpha_1-a_1}+\dfrac{x_2}{\alpha_1-a_2}+\dots+\dfrac{x_k}{\alpha_1-a_k}+\dots+\dfrac{x_n}{\alpha_1-a_n}=1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_0}{\alpha_i}+\dfrac{x_1}{\alpha_i-a_1}+\dfrac{x_2}{\alpha_i-a_2}+\dots+\dfrac{x_k}{\alpha_i-a_k}+\dots+\dfrac{x_n}{\alpha_i-a_n}=1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_0}{\alpha_n}+\dfrac{x_1}{\alpha_n-a_1}+\dfrac{x_2}{\alpha_n-a_2}+\dots+\dfrac{x_k}{\alpha_n-a_k}+\dots+\dfrac{x_n}{\alpha_n-a_n}=1 \end{cases}$$

, sotto forma più breve:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{\alpha_i}+\dfrac{x_1}{\alpha_i-a_1}+\dfrac{x_2}{\alpha_i-a_2}+\dots+\dfrac{x_k}{\alpha_i-a_k}+\dots+\dfrac{x_n}{\alpha_i-a_n}=1 \\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots n. \end{cases}$$

Se si fanno sparire i denominatori, si ordina rispetto ad $\alpha_i$ e si pone: $)=-1$, si ha:

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha_i^{n+1}+A\alpha_i^{n}+B\alpha_i^{n-1}+C\alpha_i^{n-2}+\dots+L\alpha_i-\theta^n a_1a_2a_3\dots a_n x_0=0 \\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots n. \end{cases}$$

ssendo i coefficenti $A,\ B,\ C,\dots L$ funzioni dei parametri $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots a_n$ delle incognite $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$.

Ne segue che $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ sono le $n+1$ radici dell'equazione in $\alpha$:

$$(4)\quad \alpha^{n+1}+A\alpha^{n}+B\alpha^{n-1}+C\alpha^{n-2}+\dots+L\alpha-\theta^n a_1a_2a_3\dots a_n x_0=0$$

* Estratto dal Periodico mensile *Le Matematiche pure ed applicate* diretto dal *Prof. Cristoforo* lasio (Anno I, Num. 1-2 - febbraio-marzo 1901). — Città di Castello, S. Lapi tipografo-editore.

Il prodotto di queste $n+1$ radici è uguale al termine indipendente da $\alpha$, preso col proprio segno o con segno contrario, secondochè il grado $n+1$ dell'equazione è pari o dispari. Si ha dunque in ogni caso:

$$\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n = a_1\,a_2\,a_3\ldots a_0\,x_0$$

da cui:

$$(5)\qquad x_0 = \frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n}{a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n}.$$

Poniamo ora:

$$\alpha_i - a_k = \alpha'_i, \qquad \text{da cui:}\quad \alpha_i = \alpha'_i + a_k \qquad (i=0,\,1,\,2,\,3,\ldots n);$$

il sistema (1) o il (2) diverranno:

$$(6)\quad \frac{x_0}{\alpha'_i+a_k}+\frac{x_1}{\alpha'_i+a_k-a_1}+\frac{x_2}{\alpha'_i+a_k-a_2}+\frac{x_3}{\alpha'_i+a_k-a_3}+\ldots+\frac{x_{k-1}}{\alpha'_i+a_k-a_{k-1}}$$
$$+\frac{x_k}{\alpha'_i}+\frac{x_{k+1}}{\alpha'_i+a_k-a_{k+1}}+\ldots+\frac{x_n}{\alpha'_i+a_k-a_n}=1 \qquad (i=0,1,2,3\ldots n).$$

Ora, questo sistema non è altro che il sistema (1) o (2) nel quale ad

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\ldots x_k,\quad x_{k+1},\ldots x_n$$

si sono rispettivamente sostituiti:

$$x_k,\quad x_0,\quad x_1,\quad x_2,\ldots x_{k-1},\quad x_{k+1},\ldots x_n$$

ed a:

$$\alpha_i,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots a_k,\quad a_{k+1},\ldots a_n$$

rispettivamente:

$$\alpha'_i,\quad -a_k,\quad -a_k+a_1,\quad -a_k+a_2,\ldots -a_k+a_{k-1},\quad -a_k+a_{k+1},\ldots a_n.$$

La formula (5) dà dunque:

$$x_k = \frac{\alpha'_0\,\alpha'_1\,\alpha'_2\,\alpha'_3\ldots\alpha'_n}{-a_k(a_1-a_k)(a_2-a_k)\ldots(a_{k-1}-a_k)(a_{k+1}-a_k)\ldots(a_n-a_k)}$$

ossia:

$$(7)\quad x_k = \frac{(\alpha_0-a_k)(\alpha_1-a_k)(\alpha_2-a_k)\ldots(\alpha_n-a_k)}{-a_k(a_1-a_k)(a_2-a_k)\ldots(a_{k-1}-a_k)\times(a_{k+1}-a_k)\ldots(a_n-a_k)}$$

Ne segue che il sistema (1) o (2) ha per soluzione:

$$(8)\quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n}{a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n} \\ x_k = \dfrac{(\alpha_0-a_k)(\alpha_1-a_k)(\alpha_2-a_k)\ldots(\alpha_n-a_k)}{-a_k(a_1-a_k)(a_2-a_k)\ldots(a_{k-1}-a_k)\times(a_{k+1}-a_k)\ldots(a_n-a_k)} & (k=1,2,3,\ldots n-1) \\ x_n = \dfrac{(\alpha_0-a_n)(\alpha_1-a_n)(\alpha_2-a_n)\ldots(\alpha_n-a_n)}{-a_n(a_1-a_n)(a_2-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n)}. \end{cases}$$

Consideriamo, in particolare, il sistema:

$$9)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{a_0}+\dfrac{x_1}{a_0-1}+\dfrac{x_2}{a_0-2}+\ldots+\dfrac{x_n}{a_0-n}=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_0}{a_n}+\dfrac{x_1}{a_n-1}+\dfrac{x_2}{a_n-2}+\ldots+\dfrac{x_n}{a_n-n}=1. \end{cases}$$

Se nella formula (7) sostituiamo $a$ ad $\alpha$ e $k$ ad $a_k$, si ha per soluzione del sistema (9):

$$10)\quad \begin{cases} x_k=\theta^k\dfrac{(a_0-k)(a_1-k)(a_2-k)\ldots(a_n-k)}{1.2.3\ldots k\times 1.2.3\ldots(n-k)} \\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n \end{cases}$$

Ad esempio, il sistema:

$$11)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{a_i}+\dfrac{x_1}{a_i-1}+\dfrac{x_2}{a_i-2}+\dfrac{x_3}{a_i-3}+\dfrac{x_4}{a_i-4}=1 \\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{cases}$$

ha per soluzione:

$$12)\quad \begin{cases} x_0=\dfrac{a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4}{1.2.3.4} \\ x_1=-\dfrac{(a_0-1)(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)(a_4-1)}{1\times 1.2.3} \\ x_2=\dfrac{(a_0-2)(a_1-2)(a_2-2)(a_3-2)(a_4-2)}{1.2\times 1.2} \\ x_3=-\dfrac{(a_0-3)(a_1-3)(a_2-3)(a_3-3)(a_4-3)}{1.2.3\times 1} \\ x_4=\dfrac{(a_0-4)(a_1-4)(a_2-4)(a_3-4)(a_4-4)}{1.2.3.4}. \end{cases}$$

2. Se ad $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$ sostituiamo i loro valori nella prima delle equazioni (9), si ha l'identità:

$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{1.2.3\ldots n}-\dfrac{(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1)}{1\times 1.2.3\ldots(n-1)}+\dfrac{(a_1-2)(a_2-2)\ldots(a_n-2)}{1.2\times 1.2.3\ldots(n-2)}-\ldots \\ +\theta^k\dfrac{(a_1-k)(a_2-k)\ldots(a_n-k)}{1.2.3..k\times 1.2.3..(n-k)}+\ldots+\theta^n\dfrac{(a_1-n)(a_2-n)\ldots(a_n-n)}{1.2.3\ldots n}=1 \end{cases}$$

e, moltiplicando per 1, 2, 3, ... $n$, e ponendo:

$$C_{n,k}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

si ha:

$$14)\quad \begin{cases} a_1a_2a_3\ldots a_n-C_{n,1}(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1) \\ \qquad +C_{n,2}(a_1-2)(a_2-2)\ldots(a_n-2)-\ldots \\ \qquad +\theta^kC_{n,k}(a_1-k)(a_2-k)\ldots(a_n-k)+\ldots \\ \qquad +\theta^nC_{n,n}(a_1-n)(a_2-n)\ldots(a_n-n)=1.2.3\ldots n. \end{cases}$$

Si ha, ad esempio:

$$(15)\quad \begin{cases} a-(a-1)=1 \\ ab-2(a-1)(b-1)+(a-2)(b-2)=1.2 \\ abc-3(a-1)(b-1)(c-1)+3(a-2)(b-2)(c-2)-(a-3)(b-3)(c-3)=1.2.3 \\ abcd-4(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)+6(a-2)(b-2)(c-2)(d-2 \\ \quad -4(a-3)(b-3)(c-3)(d-3)+(a-4)(b-4)(c-4)(d-4)=1.2.3.4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Se si fa: $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=a$, la formula (14) diventa:

$$(16)\quad a^n-C_{n,1}(a-1)^n+C_{n,2}(a-2)^n-\ldots+\theta^n C_{n,n}(a-n)^n=1.2.3\ldots n$$

Si ha, ad esempio:

$$(17)\quad \begin{cases} a-(a-1)=1 \\ a^2-2(a-1)^2+(a-2)^2=1.2 \\ a^3-3(a-1)^3+3(a-2)^3-(a-3)^3=1.2.3 \\ a^4-4(a-1)^4+6(a-2)^4-4(a-3)^4+(a-4)^4=1.2.3.4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

**3.** Se nella formula (16) sviluppiamo le potenze $(a-1)^n$, $(a-2)^n$, $\ldots(a-n)^n$ ed osserviamo che questa formula ha luogo per tutti i valori di $a$, vediamo che i coefficienti delle successive potenze di $a$ sono nulli, e si ha:

$$(18)\quad C_{n,1}-C_{n,2}+C_{n,3}-C_{n,4}+\ldots-\theta^n C_{n,n}=1$$

$$(19)\quad C_{n,1}-2^k C_{n,2}+3^k C_{n,3}-4^k C_{n,4}+\ldots-\theta^n n^k C_{n,n}=0 \quad (k=1,2,3,\ldots n-1$$

$$(20)\quad C_{n,1}-2^n C_{n,2}+3^n C_{n,3}-4^n C_{n,4}+\ldots-\theta^n n^n C_{n,n}=-\theta^n.1.2.3\ldots n$$

Se, ad esempio, si fa: $n=5$, si ha:

$$(21)\qquad 5-10.2^k+10.3^k-5.4^k+5^k=1,0,0,0,0,1.2.3.4.5$$

rispettivamente per $k=0,1,2,3,4,5$.

La formula (18) non è altro che lo sviluppo di $(1-1)^n=0$.

Dalla formula (19) può dedursi la seguente:

$$(22)\quad \begin{cases} (p\pm q)C_{n,1}-(p\pm 2q)2^k C_{n,2}+(p\pm 3q)3^k C_{n,3}-\ldots-\theta^n(p\pm nq)n^k.C_{n,n}=0 \\ k=1,2,3,\ldots n-2. \end{cases}$$

**4.** Se moltiplichiamo l'uguaglianza (16) per $(n+1)(n+2)\ldots(n+p)$ abbiamo:

$$(23)\quad \Sigma_{k=n}^{k=0}\theta^k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)C_{n+p,p+k}(a-k)^n=1.2.3\ldots(n+p),$$

da cui, sviluppando $(a-k)^n$ ed osservando che i vari coefficienti delle varie potenze di $a$ sono tutti nulli:

$$(24)\quad \begin{cases} 1.2.3\ldots p\,C_{n+p,p}-2.3.4\ldots(p+1)C_{n+p,p+1}+3.4.5\ldots(p+2)C_{n+p,p+2} \\ \qquad -\ldots+\theta^n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)\,C_{n+p,n+p}=0, \end{cases}$$

$$(25)\quad \begin{cases} 2.3.4\ldots(p+1)C_{n+p,p+1}-3.4.5\ldots(p+2)2^kC_{n+p,p+2}+4.5.6\ldots(p+3)3^kC_{n+p,p+3} \\ \qquad -\ldots-\theta^n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)\,n^kC_{n+p,n+p}=0, \\ k=1,2,3,\ldots.n-1 \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} 2.3.4\ldots(p+1)C_{n+p,p+1}-3.4.5\ldots(p+2).2^nC_{n+p,p+2}+4.5.6\ldots(p+3).3^nC_{n+p,p+3} \\ \qquad -\ldots-\theta^n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)\,n^nC_{n+p,n+p}=-\theta^n.1.2.3\ldots(n+p). \end{cases}$$

Ad esempio, per $p=3$, $n-4$ si ha:

$$(27)\quad 1.2.3.C_{7,3}-2.3.4.C_{7,4}+3.4.5.C_{7,5}-4.5.6.C_{7,6}+5.6.7.C_{7,7}=0;$$

$$(28)\quad \begin{cases} 2.3.4.C_{7,4}-3.4.5.2^kC_{7,5}+4.5.6.3^k.C_{7,6}-5.6.7.4^k.C_{7,7}=0; \\ k=1,2,3. \end{cases}$$

$$(29)\quad 2.3.4.C_{7,4}-3.4.5.2^4C_{7,5}+4.5.6.3^4C_{7,6}-5.6.7.4^4C_{7,7}=1.2.3.4.5.6.7.$$

**5.** Il sistema (1) o (2) dà ancora, ponendo $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=s$:

$$(30)\quad \begin{cases} x_0[\alpha^n-s\,\alpha^{n-1}+\ldots]+x_1[\alpha^n-(s-a_1)\alpha^{n-1}+\ldots]+x_2[\alpha^n-(s-a_2)\alpha^{n-1}\ldots]+\ldots \\ \qquad +x_n[\alpha^n-(s-a_n)\alpha^{n-1}+\ldots]=\alpha^{n+1}-s\,\alpha^n+\Sigma\,a_1a_2\,\alpha^{n-1}-\ldots \end{cases}$$

ossia:

$$(31)\quad \alpha^{n+1}-(x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n+s)\,\alpha^n + [s\,x_0+(s-a_1)x_1+(s-a_2)x_2+\ldots+(s-a_n)x_n+\Sigma\,a_1a_2]\,\alpha^{n-1}-\ldots=0.$$

La somma delle $n+1$ radici $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ di questa equazione essendo uguale al coefficiente di $\alpha_n$ preso con segno contrario, si ha:

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n+a_1+a_2+\ldots+a_n$$

da cui:

$$(32)\quad x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n=\alpha_0+(\alpha_1-a_1)+(\alpha_2-a_2)+\ldots+(\alpha_n-a_n).$$

In particolare, il sistema (6) dà:

$$x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n=a_0+(a_1-1)+(a_2-2)+\ldots+(a_n-n)$$

ossia:

$$(33)\quad x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n-\frac{1}{2}n(n+1)$$

da cui, sostituendo ad $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ i loro valori, e moltiplicando l'uguaglianza ottenuta per $1.2.3\ldots n$,

$$(34)\quad \begin{cases} a_0.a_1.a_2\ldots a_n-C_{n,1}(a_0-1)(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1) \\ +C_{n,2}(a_0-2)(a_1-2)(a_2-2)\ldots(a_n-2)-\ldots+\theta^nC_{n,n}(a_0-n)(a_1-n)(a_2-n).. \\ \qquad ..(a_n-n)=1.2.3\ldots n[a_0+a_1+a_2\ldots+a_n-\frac{1}{2}n(n+1)] \end{cases}$$

Si ha ad esempio:

$$(35)\quad \begin{cases} ab-(a-1)(b-)=a+b-1 \\ abc-2(a-1)(b-1)(c-1)+(a-2)(b-2)(c-2)=1.2.(a+b+c-3) \\ abcd-3(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)+3(a-2)(b-2)(c-2)(d-2) \\ -(a-3)(b-3)(c-3)(d-3)=1.2.3.(a+b+c+d-6) \\ abcde-4(a-1)(b-1)..(e-1)+6(a-2)(b-2)...(e-2)-4(a-3)(b-3)...(e-3) \\ \qquad +(a-4)(b-4)....(e-4)=1.2.3.4.(a+b+c+d+e-10) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Se si fa: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, la formula (34) diventa:

$$(36)\quad \begin{cases} a^{n+1} - C_{n,1}(a-1)^{n+1} + C_{n,2}(a-2)^{n+1} - \ldots + \theta^n C_{n,n}(a-n)^{n+1} \\ = 1.2.3.\ldots\ldots n(n+1)(a-\frac{1}{2}n). \end{cases}$$

Si ha, ad esempio:

$$(37)\quad \begin{cases} a^2 - (a-1)^2 = 1.2.\left(a-\frac{1}{2}\right) \\ a^3 - 2(a-1)^3 + (a-2)^3 = 1.2.3.(a-1) \\ a^4 - 3(a-1)^4 + 3(a-2)^4 - (a-3)^4 = 1.2.3.4.\left(a-\frac{3}{2}\right) \\ a^5 - 4(a-1)^5 + 6(a-2)^5 - 4(a-3)^5 + (a-4)^5 = 1.2.3.4.5.(a-2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Se invece delle $n$ lettere $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ si suppongono $m$ lettere $a$ $n$ lettere $b$; $p$ lettere $c$; ecc. e si pone per abbreviare: $m+n+p+\ldots = s$ la formula (34) diventa:

$$(38)\quad \begin{cases} a^m b^n c^p \ldots C_{s,1}(a-1)^m (b-1)^n (c-1)^p + C_{s,2}(a-2)^m (b-2)^n (c-2)\ldots, \\ \qquad -\ldots + \theta^s C_{s,s}(a-s)^m (b-s)^n (c-s)^p \ldots = 1.2.3\ldots s. \end{cases}$$

6. Più generalmente, sia proposto di risolvere il sistema di $n+1$ equazioni ad $n+1$ incognite:

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda\mu_i} + \dfrac{x_1}{(\alpha-a_1)(\beta-b_1)(\gamma-c_1)\ldots(\lambda-l_1)(\mu_i-m_1)} \\ \qquad + \dfrac{x_2}{(\alpha-a_2)(\beta-b_2)(\gamma-c_2)\ldots(\lambda-l_2)(\mu_i-m_2)} \\ \quad +\ldots+ \dfrac{x_k}{(\alpha-a_k)(\beta-b_k)(\gamma-c_k)\ldots(\lambda-l_k)(\mu_i-m_k)} + \ldots \\ + \dfrac{x_n}{(\alpha-a_n)(\beta-b_n)(\gamma-c_n)\ldots(\lambda-l_n)(\mu_i-m_n)} = 1 \quad (i=0,1,2,\ldots n) \end{cases}$$

o, ponendo: $P_0 = \alpha\beta\gamma\ldots\lambda$, $P_k = (\alpha-a_k)(\beta-b_k)\ldots(\lambda-l_k)$:

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{P_0\mu_i} + \dfrac{x_1}{P_1(\mu_i-m_1)} + \dfrac{x_2}{P_2(\mu_i-m_2)} + \ldots + \dfrac{x_k}{P_k(\mu_i-m_k)} + \ldots + \dfrac{x_n}{P_n(\mu_i-m_n)} = 1 \\ i = 0, 1, 2, 3, \ldots n. \end{cases}$$

Se si fanno sparire i denominatori, si vede che $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ sono le $n+1$ radici di un'equazione in $\mu$, della forma:

$$(41)\quad \begin{cases} P_0 P_1 P_2 \ldots P_n \mu^{n+1} + A\mu^n + B\mu^{n-1} + C\mu^{n-2} + \ldots + L\mu - \theta^n P_1 P_2 P_3 \ldots \\ \qquad \ldots P_n m_1 m_2 m_3 \ldots m_n x_0 = 0 \end{cases}$$

da cui ricavasi quale prodotto di queste $n+1$ radici:

$$\mu_0 \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n = \frac{m_1 m_2 m_3 \ldots m_n x_0}{P_0},$$

e quindi:

$$x_0 = \frac{P_0 \mu_0 \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}{m_1 m_2 m_3 \ldots m_n}$$

ossia:

$$x_0 = \frac{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda\,\mu_0\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{m_1 m_2 m_3\ldots m_n}. \tag{42}$$

Se ora si fa:

$$\alpha - a_k = \alpha',\quad \beta - b_k = \beta',\ldots\lambda - l_k = \lambda',\quad \mu_i - m_k = \mu_i'$$

da cui rispettivamente:

$$\alpha = \alpha' + a_k,\quad \beta = \beta' - b_k,\ldots\lambda = \lambda' - l_k,\quad \mu_i = \mu_i' + m_k$$

al sistema (39) o (40) ne sarà sostituito un altro nel quale al posto di:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots x_k,\ x_{k+1},\ldots. x_n$$

si sarà messo:

$$x_k,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{k-1},\ x_{k+1},\ldots x_n,$$

ed al posto di:

$$\begin{array}{llllllll}
\alpha, & a_1, & a_2, & a_3, & \ldots a_k, & a_{k+1} & \ldots a_n,\\
\beta, & b_1, & b_2, & b_3, & \ldots b_k, & b_{k+1} & \ldots b_n,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\lambda, & l_1, & l_2, & l_3, & \ldots l_k, & l_{k+1} & \ldots l_n,\\
\mu, & m_1, & m_2, & m_3, & \ldots m_k, & m_{k+1} & \ldots m_n,
\end{array}$$

si sarà rispettivamente messo:

$$\begin{array}{llllllll}
\alpha', & -a_k, & -a_k+1, & -a_k+a_2, & \ldots -a_k+a_{k-1}, & -a_k+a_{k+1} & \ldots -a_k+a_n,\\
\beta', & -b_k, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\lambda', & -l_k, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\mu_i', & -m_k, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

La formula (42) dà dunque:

$$x_k = \frac{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\lambda'\cdot\mu_0'\mu_1'\mu_2'\ldots\mu_n'}{-m_k(-m_k+m_1)(-m_k+m_2)\ldots(-m_k+m_{k-1})(-m_k+m_{k+1})\ldots(-m_k+m_n)},$$

ossia:

$$x_k = \frac{(\alpha-a_k)(\beta-b_k)(\gamma-c_k)\ldots(\lambda-l_k)\cdot(\mu_0-m_k)(\mu_1-m_k)\ldots(\mu_n-m_k)}{-m_k(m_1-m_k)(m_2-m_k)\ldots(m_{k-1}-m_k)(m_{k+1}-m_k)\ldots(m_n-m_k)}. \tag{43}$$

Il sistema (39) o (40) è così risolto.

Se in particolare, si considera il sistema:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{x_0}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\ldots\lambda\cdot\mu_i} + \dfrac{x_2}{(\alpha-1)(\beta-1)\ldots(\lambda-1)\cdot(\mu_i-1)} + \ldots + \dfrac{x_n}{(\alpha-n)(\beta-n)\ldots(\lambda-n)\cdot(\mu_i-n)} = 1\\
i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots n.
\end{array}\right. \tag{44}$$

si ha:

$$x_k = \vartheta^k\,\frac{(\alpha-k)(\beta-k)\ldots(\lambda-k)\cdot(\mu_0-k)(\mu_1-k)\ldots(\mu_n-k)}{1.2.3\ldots k\times 1.2.3\ldots(n-k)},\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots n. \tag{45}$$

Ad esempio, il sistema:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{x_0}{\alpha\cdot\beta\cdot\mu_i} + \dfrac{x_1}{(\alpha-1)(\beta-1)(\mu_i-1)} + \dfrac{x_2}{(\alpha-2)(\beta-2)(\mu_i-2)} + \dfrac{x_3}{(\alpha-3)(\beta-3)(\mu_i-3)}\\
\qquad + \dfrac{x_4}{(\alpha-4)(\beta-4)(\mu_i-4)} = 1,\qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4
\end{array}\right. \tag{46}$$

Il prodotto di queste $n+1$ radici è uguale al termine indipendente d
$\alpha$, preso col proprio segno o con segno contrario, secondochè il grado $n+$
dell'equazione è pari o dispari. Si ha dunque in ogni caso:

$$\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n = a_1\,a_2\,a_3\ldots a_0\,x_0$$

da cui:

$$(5)\qquad x_0 = \frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n}{a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n}.$$

Poniamo ora:

$$\alpha_i - a_k = \alpha'_i, \qquad \text{da cui:}\quad \alpha_i = \alpha'_i + a_k \qquad (i=0,1,2,3,\ldots n);$$

il sistema (1) o il (2) diverranno:

$$(6)\quad \frac{x_0}{\alpha'_i+a_k}+\frac{x_1}{\alpha'_i+a_k-a_1}+\frac{x_2}{\alpha'_i+a_k-a_2}+\frac{x_3}{\alpha'_i+a_k-a_3}+\ldots+\frac{x_{k-1}}{\alpha'_i+a_k-a_{k-1}}$$
$$+\frac{x_k}{\alpha'_i}+\frac{x_{k+1}}{\alpha'_i+a_k-a_{k+1}}+\ldots+\frac{x_n}{\alpha'_i+a_k-a_n}=1 \qquad (i=0,1,2,3\ldots n).$$

Ora, questo sistema non è altro che il sistema (1) o (2) nel quale ad

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\ldots x_k,\quad x_{k+1},\ldots x_n$$

si sono rispettivamente sostituiti:

$$x_k,\quad x_0,\quad x_1,\quad x_2,\ldots x_{k-1},\quad x_{k+1},\ldots x_n$$

ed a:

$$\alpha_i,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots a_k,\quad a_{k+1},\ldots a_n$$

rispettivamente:

$$\alpha'_i,\quad -a_k,\quad -a_k+a_1,\quad -a_k+a_2,\ldots -a_k+a_{k-1},\quad -a_k+a_{k+1},\ldots a_n.$$

La formula (5) dà dunque:

$$x_k = \frac{\alpha'_0\,\alpha'_1\,\alpha'_2\,\alpha'_3\ldots\alpha'_n}{-a_k(a_1-a_k)(a_2-a_k)\ldots(a_{k-1}-a_k)(a_{k+1}-a_k)\ldots(a_n-a_k)}$$

ossia:

$$(7)\ x_k = \frac{(\alpha_0-a_k)(\alpha_1-a_k)(\alpha_2-a_k)\ldots(\alpha_n-a_k)}{-a_k(a_1-a_k)(a_2-a_k)\ldots(a_{k-1}-a_k)\times(a_{k+1}-a_k)\ldots(a_n-a_k)}$$

Ne segue che il sistema (1) o (2) ha per soluzione:

$$(8)\begin{cases} x_0 = \dfrac{\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n}{a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n} \\ x_k = \dfrac{(\alpha_0-a_k)(\alpha_1-a_k)(\alpha_2-a_k)\ldots(\alpha_n-a_k)}{-a_k(a_1-a_k)(a_2-a_k)\ldots(a_{k-1}-a_k)\times(a_{k+1}-a_k)\ldots(a_n-a_k)} & (k=1,2,3,\ldots n-1) \\ x_n = \dfrac{(\alpha_0-a_n)(\alpha_1-a_n)(\alpha_2-a_n)\ldots(\alpha_n-a_n)}{-a_n(a_1-a_n)(a_2-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n)}. \end{cases}$$

Consideriamo, in particolare, il sistema:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_0}{a_0}+\dfrac{x_1}{a_0-1}+\dfrac{x_2}{a_0-2}+\ldots+\dfrac{x_n}{a_0-n}=1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{x_0}{a_n}+\dfrac{x_1}{a_n-1}+\dfrac{x_2}{a_n-2}+\ldots+\dfrac{x_n}{a_n-n}=1. \end{cases}$$

Se nella formula (7) sostituiamo $a$ ad $\alpha$ e $k$ ad $a_k$, si ha per soluzione del sistema (9):

$$(10)\qquad \begin{cases} x_k=\theta^k\dfrac{(a_0-k)(a_1-k)(a_2-k)\ldots(a_n-k)}{1.2.3\ldots k\times 1.2.3\ldots(n-k)} \\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n \end{cases}$$

Ad esempio, il sistema:

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_0}{a_i}+\dfrac{x_1}{a_i-1}+\dfrac{x_2}{a_i-2}+\dfrac{x_3}{a_i-3}+\dfrac{x_4}{a_i-4}=1 \\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{cases}$$

ha per soluzione:

$$(12)\qquad \begin{cases} x_0=\dfrac{a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4}{1.2.3.4} \\ x_1=-\dfrac{(a_0-1)(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)(a_4-1)}{1\times 1.2.3} \\ x_2=\dfrac{(a_0-2)(a_1-2)(a_2-2)(a_3-2)(a_4-2)}{1.2\times 1.2} \\ x_3=-\dfrac{(a_0-3)(a_1-3)(a_2-3)(a_3-3)(a_4-3)}{1.2.3\times 1} \\ x_4=\dfrac{(a_0-4)(a_1-4)(a_2-4)(a_3-4)(a_4-4)}{1.2.3.4}. \end{cases}$$

2. Se ad $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$ sostituiamo i loro valori nella prima delle equazioni (9), si ha l'identità:

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{1.2.3\ldots n}-\dfrac{(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1)}{1\times 1.2.3\ldots(n-1)}+\dfrac{(a_1-2)(a_2-2)\ldots(a_n-2)}{1.2\times 1.2.3\ldots(n-2)}-\ldots \\ +\theta^k\dfrac{(a_1-k)(a_2-k)\ldots(a_n-k)}{1.2.3..k\times 1.2.3..(n-k)}+\ldots+\theta^n\dfrac{(a_1-n)(a_2-n)\ldots(a_n-n)}{1.2.3\ldots n}=1 \end{cases}$$

o, moltiplicando per 1, 2, 3, ... $n$, e ponendo:

$$C_{n,k}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

si ha:

$$(14)\qquad \begin{cases} a_1a_2a_3\ldots a_n-C_{n,1}(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1) \\ \qquad +C_{n,2}(a_1-2)(a_2-2)\ldots(a_n-2)-\ldots \\ \qquad +\theta^kC_{n,k}(a_1-k)(a_2-k)\ldots(a_n-k)+\ldots \\ \qquad +\theta^nC_{n,n}(a_1-n)(a_2-n)\ldots(a_n-n)=1.2.3\ldots n. \end{cases}$$

ha per soluzione:

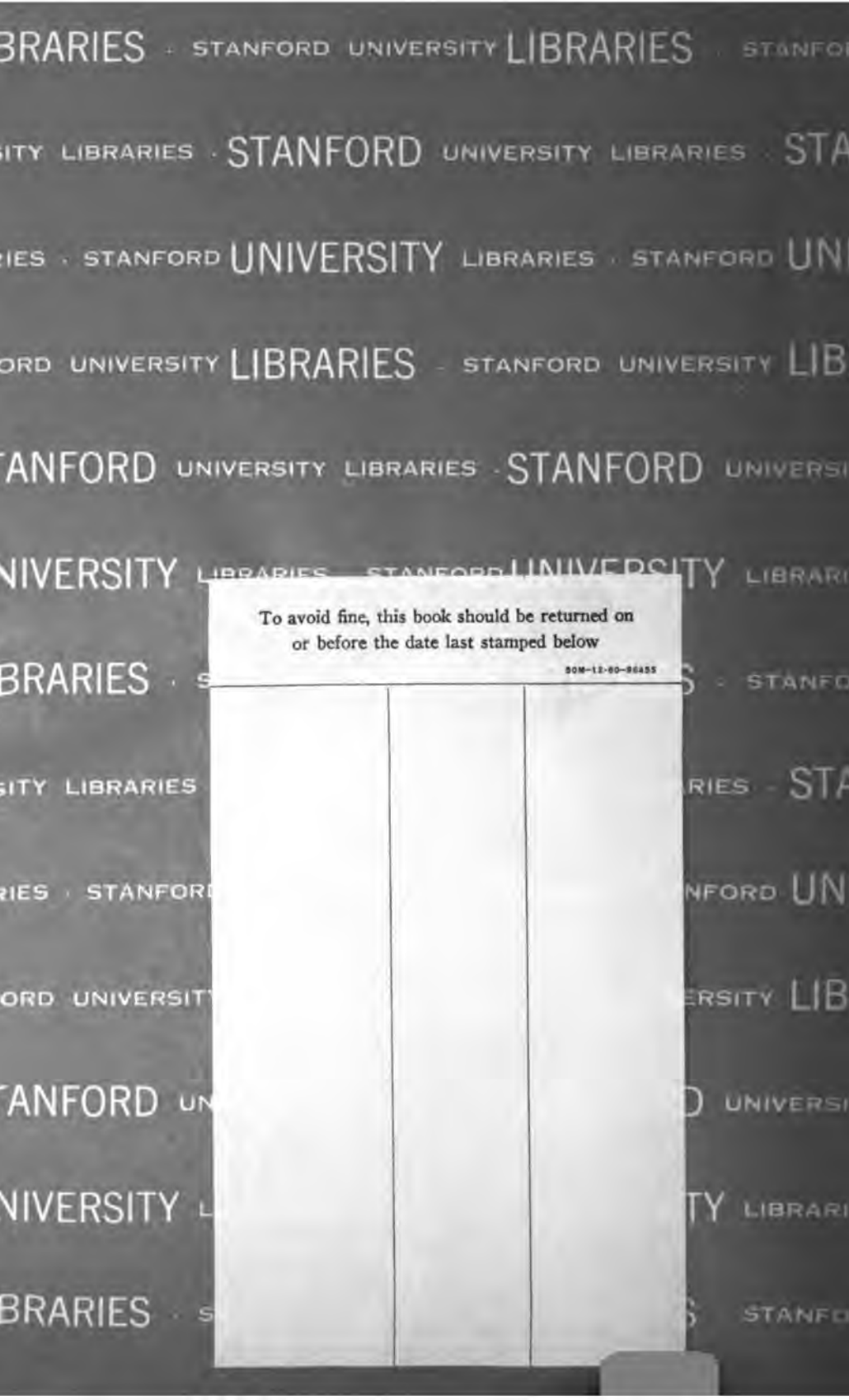
$$x_0 = \frac{\alpha\,\beta\,\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4}{1.2.3.4}$$

$$x_1 = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)(\mu_0-1)(\mu_1-1)(\mu_2-1)(\mu_3-1)(\mu_4-}{1\times 1.2.3}$$

$$x_2 = \frac{(\alpha-2)(\beta-2)(\mu_0-2)(\mu_1-2)(\mu_2-2)(\mu_3-2)(\mu_4-}{1.2\times 1.2}$$

$$x_3 = \frac{(\alpha-3)(\beta-3)(\mu_0-3)(\mu_1-3)(\mu_2-3)(\mu_3-3)(\mu_4-}{1.2.3\times 1}$$

$$x_4 = \frac{(\alpha-4)(\beta-4)(\mu_0-4)(\mu_1-4)(\mu_2-4)(\mu_3-4)(\mu_4-}{1.2.3.4}$$


To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below
50M-12-60-86455

Stanford University Libraries
3 6105 010 230 196

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

F/S JUL 0 1 1996